

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.COM

В четвертом разделе приведены основные методы исследования устойчивости, оценки качества и коррекции импульсных систем.

В пятом разделе изложено введение в теорию статистической динамики.

В шестом разделе дано понятие об оптимальных и самонастраивающихся системах, их особенностях и принципах построения.

В данной книге использована терминология, рекомендуемая Комитетом научно-технической терминологии АН СССР («Основные понятия автоматики». Терминология, выпуск 71. «Наука», 1966).

При написании книги была использована указанная в библиографии литература, однако детальные литературные ссылки в книге не приводятся.

При работе над рукописью автор с благодарностью учел замечания и рекомендации чл.-корр. АН СССР А. Е. Алексеева и проф., д-ра техн. наук Е. И. Хлыпало, высказанные при просмотре рукописи.

Автор выражает благодарность рецензентам книги проф., д-ру техн. наук А. В. Нетушилу и всем сотрудникам кафедры автоматики и телемеханики ЛЭТИ им. Ульянова (Ленина) за ценные замечания, сделанные ими при просмотре рукописи.

Автор.

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Теория автоматического управления охватывает большой комплекс вопросов, базирующихся на ряде смежных дисциплин (теория связи и информации, усилительная техника, высшая математика и др.). При более обобщенном подходе подобная теория может быть названа технической кибернетикой.

В данной книге рассматриваются лишь прикладные вопросы теории, связанные с разработкой систем автоматического регулирования и управления.

Глава 1

ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

§ 1.1. Введение

Автоматика — это отрасль науки и техники, охватывающая теорию и практику автоматического управления, а также принципы построения автоматических систем и образующих их технических средств [Л. 29]. Автоматика позволяет существенно повышать эффективность ведения технологических процессов, сокращать количество обслуживающего персонала, увеличивать производительность труда и улучшать качество выпускаемой продукции, обеспечивая высокую точность ведения процессов, а также проводить требуемый процесс в условиях и местах, не доступных для человека (атомное производство, освоение космоса и др.).

Режим работы машины, агрегата, производственного процесса характеризуется рядом физических величин. Например, режим работы электрического генератора характеризуется напряжением, током нагрузки и частотой (при переменном токе); режим работы двигателя — скоростью вращения его вала, развиваемым вращающим моментом и т. д.

Если в процессе работы технического устройства остаются неизменными все величины, определяющие режим работы, то работа устройства является стабильной. Например, при неизменных скорости вращения, температуре окружающей среды, токе возбуждения и сопротивлении нагрузки напряжение генератора будет стабильным.

Если же величины, характеризующие режим работы технического устройства, существенно отклоняются в процессе работы от требуемых значений, то такое устройство должно снабжаться регулируемыми или управляющими органами. При помощи регулирующего органа можно поддерживать неизменной или соответствующим образом изменять выходную переменную, являющуюся *регулируемой* или *управляемой переменной* (величиной) технического устройства, называемого *регулируемым* или *управляемым объектом*.

Регулирующее или управляющее устройство, которое выполняет операции регулирования или управления объектом без участия человека, называется *прибором автоматического регулирования или управления*. Совокупность такого прибора и объекта представляет собой автоматическую систему.

Работа объекта управления зависит от совокупности контролируемых (измеряемых в процессе работы) возмущений $Z (z_1, z_2, \dots, z_r)$, неконтролируемых внешних воздействий $F (f_1, f_2, \dots, f_m)$, управляющих воздействий $X (x_1, x_2, \dots, x_m)$ и управляемых переменных $X_{вых} (x_{вых1}, x_{вых2}, \dots, x_{выхl})$, которые в общем случае являются векторами.

Если известно математическое описание объекта, то известна и система уравнений, связывающая управляемые переменные со всеми внешними воздействиями на объект. Поэтому по заданным внешним воздействиям можно определить управляемые переменные $X_{вых} (Z, F, X)$. В простых объектах имеется только одно управляющее воздействие $X_{вх}$ и одна управляемая переменная $X_{вых}$.

Работа каждого объекта управления может рассматриваться в статике и динамике. В статических режимах внешние воздействия Z, F и управляющие воздействия X являются постоянными, не зависящими от времени, или принимаются постоянными в дискретные моменты времени. В случае гармонических воздействий анализируется квазистационарный режим, характеризующийся, например, амплитудами и фазами гармонических сигналов объекта.

При изучении статистики объекта рассматривается зависимость $X_{вых} = f(X)$, которая называется *статической характеристикой объекта*. Она может быть монотонной (когда производная $\partial X_{вых} / \partial X$ не меняет знак) или экстремальной (когда производная $\partial X_{вых} / \partial X$ меняет знак на отдельных участках, а при некоторых значениях переменных равна нулю).

При изучении динамики объекта исследуются зависимости $X_{вых} (Z, F, X)$, характеризующиеся дифференциальными уравнениями объекта и заданными воздействиями $Z(t), F(t)$ и $X(t)$. В общем случае дифференциальные уравнения объекта являются нелинейными. Если эта система уравнений может быть сведена к системе линейных дифференциальных уравнений, то объект управления называется *линейным*.

Объект управления может быть устойчивым, неустойчивым и нейтральным. *Объект устойчив*, если после окончания внешнего воздействия он приходит к установившемуся равновесному состоянию, определяемому статической характеристикой. В *неустойчивом объекте*

по окончании воздействия (как бы мало оно ни было) выходная переменная продолжает изменяться и объект не приходит к установившемуся равновесному состоянию. *Нейтральными объектами* являются такие, у которых после окончания воздействия устанавливается новое произвольное состояние равновесия, отличное от первоначального и зависящее от произведенного воздействия. Один и тот же объект при нелинейной его характеристике в зависимости от режима работы может находиться в устойчивом, неустойчивом и нейтральном состояниях. Например, асинхронный электродвигатель будет устойчивым относительно скорости вращения при скольжении, меньшем критического, и неустойчивым при скольжении, большем критического значения. Если в качестве управляемой переменной двигателя является угол поворота выходного вала, то двигатель является нейтральным объектом.

На практике встречаются различные типы задач регулирования и управления. Нормальная работа некоторых установок обуславливается неизменным значением выходной переменной. Например, в электрических генераторах напряжение и частота должны оставаться постоянными при изменении величины потребляемой энергии. Задача регулирования здесь состоит в том, чтобы, воздействуя на регулирующие органы, поддерживать выходную переменную на заданном уровне при всех возможных условиях работы объекта.

В качестве примеров регулируемых объектов можно привести следующие: гидравлический резервуар, в котором необходимо поддерживать заданный уровень жидкости при различном расходе жидкости; двигатель (электрический или тепловой), у которого требуется поддерживать неизменной скорость вращения или момент; печь (топливная и электрическая) или помещение, в которых поддерживается заданная температура, и др.

Встречаются также объекты, нормальный режим которых обуславливается изменяющимся по определенному закону значением управляемой переменной. Например, расход воздуха, подаваемого в топку котла, должен изменяться так, чтобы он всегда соответствовал оптимальному режиму сжигания топлива; температура в рабочем пространстве камерной термической печи должна изменяться во времени по определенному закону, обеспечивающему требуемое изменение свойств отжигаемого металла. Задача управления такими объектами состоит в том, чтобы путем воздействия на регулирующие органы **и з м е н я т ь** управляемые переменные в соответствии с заданными условиями работы установки.

§ 1.2. Автоматическое регулирование и управление как одна из форм автоматизации

Автоматическое управление производственным процессом и его контроль без непосредственного участия человека называется *автоматизацией процесса*.

Различные производственные процессы могут иметь различные степени автоматизации. Так, при **ч а с т и ч н о й** автоматизации

автоматизированы отдельные участки производственного процесса. При комплексной автоматизации автоматизированы все основные участки производственного процесса. В случае полной автоматизации должны быть автоматизированы все основные и вспомогательные участки производственного процесса. Наивысшей степенью автоматизации является, например, завод-автомат с процессом производства без участия человека. В этом случае обслуживающий персонал выполняет лишь функции пуска, останова, ремонта и периодического наблюдения за автоматической аппаратурой.

Основными формами автоматизации являются: технологическая сигнализация, дистанционное управление, автоматические защита, блокировка и контроль, а также автоматическое регулирование и управление.

Автоматическое регулирование и управление является наиболее сложной и совершенной формой автоматизации.

Существует чрезвычайно большое разнообразие автоматических устройств, применяемых в различных областях техники. Примерами таких автоматических устройств являются: 1) автомат включения и выключения освещения; 2) автомат размена монет; 3) автомат продажи жидкостей, газет, билетов и т. д.; 4) станок-автомат, автоматические линии в цехах и на заводах; 5) система телеуправления; 6) автоматические регуляторы, поддерживающие постоянное значение температуры, давления, напряжения, скорости вращения и т. д.; 7) автопилот и авторулевой, 8) следящая система воспроизведения подаваемой на вход какой-либо величины; 9) система сопровождения за движущимися объектами; 10) система самонаведения на цель и т. д.

Все эти автоматические устройства можно разделить на два основных класса:

автоматы, выполняющие определенного рода одноразовые или многократные (циклические) операции; здесь заданная цель выполняется по жесткой программе без всякой свободы выбора, без наличия информационных процессов (п.п. 1, 2 и 3);

автоматические регуляторы и системы, которые плавным образом изменяют или поддерживают неизменными какие-либо физические величины в том или ином технологическом устройстве или технологическом процессе; здесь заданная цель выполняется на основании информационных процессов, происходящих в автоматической системе (п.п. 4—10 и др.).

В дальнейшем будет рассматриваться теория только автоматических устройств осуществляющих автоматическое регулирование и управление.

§ 1.3. Основные этапы развития автоматических систем и их теории [Л. 10, 35]

Начальным этапом развития автоматических систем является создание простейших автоматов. Первые сведения об автоматах появились в начале нашей эры в работах Герона Александрийского, который

создал пневмоавтомат для открывания дверей храма, автомат для продажи священной воды и др. Идеи Герона не нашли промышленного применения.

В средние века развивалась «андроидная» автоматика, когда искусные механики создавали автоматы, подражающие отдельным действиям человека.

На рубеже XVIII—XIX вв., в эпоху промышленного переворота в Европе, начинается новый этап развития автоматике, связанный с ее внедрением в промышленность. К первым промышленным автоматическим устройствам относятся регулятор уровня воды парового котла И.И. Ползунова (1765 г.), регулятор скорости паровой машины Уатта (1784 г.), система программного управления от перфоленки ткацким станком Жаккара (1804—1808 гг.) и т. д. Новый этап развития автоматике сыграл огромную роль в технике. В этот период начинает развиваться и теория автоматических систем. Формируется ряд важных принципов автоматике: принцип регулирования по отклонению Ползунова—Уатта, принцип регулирования по нагрузке (по возмущению) Понселе.

Первые автоматические системы являлись простейшими и детерминированными системами с неизменной структурой и настройкой регуляторов. Требования практики к повышению качества работы автоматических систем и сложность выполняемых задач обусловили появление оптимальных и самонастраивающихся (адаптивных) систем, которые в процессе работы автоматически изменяют параметры или структуру.

Развитие и совершенствование автоматических систем потребовало теоретических исследований их режимов работы. При этом можно отметить три основных периода развития теории: 1 — детерминированных систем (конец XIX в. и начало XX в.); 2 — статистической динамики (50-е годы XX в.); 3 — адаптивных систем (60-е годы XX в.).

Впервые глубокое теоретическое исследование систем автоматического регулирования с учетом нелинейных факторов было выполнено английским физиком Максвеллом, который, используя метод малых колебаний, получил условия устойчивости из анализа линеаризованных уравнений и поставил перед математиками проблему определения устойчивости линейных систем произвольной размерности. Эта задача впервые была решена Раусом (1877 г.), а затем повторена в иной форме Гурвицем (1895 г.), создавшими алгебраические критерии устойчивости. Серьезные исследования устойчивости и качества автоматических систем были выполнены И. А. Вышнеградским, Стодолой, Н. Е. Жуковским, Жюильером, Толяе и другими учеными и инженерами.

Общая математическая теория устойчивости линейных и нелинейных систем была разработана А. М. Ляпуновым (1892 г.).

В период перед второй мировой войной были разработаны частотные критерии устойчивости Найквистом (1932 г.) и А. В. Михайловым (1936—1938 гг.). Эти методы далее были развиты Лунгардом (1944 г.), Боде и Мак Коллом (1946 г.), В. В. Солодовниковым (1949 г.) и др.

Теория нелинейных автоматических систем разрабатывалась А. А. Андроновым и его учениками, Л. С. Гольдфарбом, А. И. Лурье, Е. П. Поповым, В. М. Поповым, О. Блэкьером, А. Пуанкаре, Вандер-Подем, В. Оппелтом и др.

Учет влияния случайных помех и разработка статистических методов расчета автоматических систем были выполнены А. Н. Колмогоровым, Н. Винером, В. В. Солодовниковым, В. С. Пугачевым и другими.

Теория оптимальных систем разработана А. А. Фельдбаумом, Л. С. Понтрягиным, Н. Н. Красовским, Р. Беллманом и Р. Калманом, а теория инвариантных систем — Г. В. Шипановым, Н. Н. Лузиным, В. С. Кулебакиным, Б. Н. Петровым и др.

В 50-х годах возникла принципиально новая проблема разработки систем, статические и динамические свойства которых должны быть неизменными при изменении характеристик объекта в широких пределах под влиянием внешних условий. Такие системы обладают свойством приспособления и называются *самоадаптирующимися* (адаптивными), или кибернетическими системами. Разработка таких систем проводилась как за границей Дж. Тракселом, Э. Мишкиным и др., так и в Советском Союзе А. А. Красовским, Г. С. Поспеловым, А. Г. Кухтенко, П. И. Чинаевым и др. Основоположителем теории кибернетики и принципов построения кибернетических систем является крупнейший ученый XX в. Норберт Винер, который рассмотрел обобщенную схему управления и связи в животном и машине [Л. 9].

§ 1.4. Роль русских и советских ученых в развитии теории и практики автоматических систем

Основоположителем линейной теории регулирования является профессор И. А. Вышнеградский (1831—1895 гг.), указавший, что качественный регулятор может быть создан только на основе его совместного расчета с управляемым объектом. При этом Вышнеградский применил линейные уравнения динамики системы и вывел условие устойчивости динамической системы, описываемой линейным дифференциальным уравнением третьего порядка; он ввел понятие об областях устойчивости на плоскости основных параметров системы. Построенная Вышнеградским диаграмма является началом исследования качества переходного процесса.

Основоположителем строгой теории устойчивости движения нелинейных динамических систем является А. М. Ляпунов (1857—1918 гг.), который доказал теорему о законности исследования устойчивости по первому приближению, т. е. по линеаризованным уравнениям. Ляпунов создал также прямой метод, содержащий его знаменитые общие теоремы об устойчивости и неустойчивости движения и равновесия любых динамических систем.

В период до 1917 г. теория регулирования разрабатывалась П. Л. Чебышевым, Н. Е. Жуковским и другими учеными. После 1917 г. развитие теории регулирования стало особенно интенсивным в связи

с автоматизацией производственных процессов крупных энергетических установок. Из наиболее видных ученых этого периода можно назвать И. А. Вознесенского, создавшего теорию автономного регулирования, Н. Н. Лузина и Г. В. Шипанова, создавших теорию инвариантности, А. В. Михайлова, разработавшего критерий устойчивости и структурный метод анализа автоматических систем, и А. А. Соколова, предложившего метод построения областей устойчивости.

В годы Великой Отечественной войны и в последующий период советскими учеными в развитии теории автоматического регулирования и управления были сделаны следующие разработки:

точные методы исследования нелинейных систем (вопросы фазового пространства и точечных преобразований) — А. А. Андроновым и его учениками; дальнейшее развитие теории нелинейных систем и ее инженерное приложение осуществлялось А. И. Лурье, Л. С. Гольдфарбом, Е. П. Поповым, Г. С. Поспеловым, В. И. Zubовым, Р. А. Нелепиным, Е. И. Хлыпало и др.;

частотные методы исследования автоматических систем — В. В. Солодовниковым, В. А. Бесекерским, А. А. Вороновым, Д. В. Васильевым, А. А. Вавиловым, М. В. Мееровым, А. В. Фатеевым и др.;

статистическая динамика автоматических систем — В. В. Солодовниковым, В. С. Пугачевым, И. Е. Казаковым, Б. Г. Доступовым, К. А. Пупковым, В. П. Перовым и др.;

теория импульсных систем — Я. З. Цыпкиным, Л. Т. Кузиным, Ю. Г. Корниловым, С. М. Федоровым и др.;

теория инвариантности — Н. Н. Лузиным, Г. В. Шипановым, В. С. Кулебакиным, Б. Н. Петровым, А. Г. Ивахненко, Г. М. Улановым и др.;

теория оптимального управления — Л. С. Понтрягиным и его учениками, А. А. Фельдбаумом, Н. Н. Красовским, А. М. Летовым, В. М. Пономаревым и др.;

теория самонастраивающихся (адаптивных) систем — А. А. Красовским, Г. С. Поспеловым, А. Г. Кухтенко, П. И. Чинаевым и др.

Вопросы для самопроверки

1. В каких случаях необходимо применять автоматическое управление (регулирование) и каково назначение автоматики?
2. Приведите определение объекта и регулятора. Укажите основные типы и примеры объектов.
3. Какие степени и формы автоматизации следует различать?
4. Укажите основные этапы развития автоматических систем и их теории.
5. Какова роль русских и советских ученых в развитии теории автоматического регулирования и управления.

ПРИНЦИПЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ
И УПРАВЛЕНИЯ

При разработке автоматической системы прежде всего устанавливается необходимость автоматизации данного объекта. Далее выбирается принцип регулирования. Принципы регулирования и управления сформулированы в результате обобщения опыта инженерной практики.

§ 2.1. Понятие о регулировании
и управлении

Целью автоматического регулирования и управления является либо поддержание заданного значения, либо изменение по какому-либо закону определенной физической величины, называемой *регулируемой* или *управляемой переменной (величиной)* $X_{вых}$. Значение регулируемой или управляемой переменной, к которому ее должно приводить регулирующее или управляющее устройство, называется *заданным значением* $X_{н}$.

В процессе работы системы выходная переменная объекта измеряется и сравнивается с заданным значением (используется принцип обратной связи). Если обнаруживается отклонение выходной переменной от заданного значения, то в систему вводится управляющее воздействие ΔX , изменяющее выходную переменную объекта так, чтобы она соответствовала заданной.

Режим работы автоматических систем зависит от вида возмущающих Z и задающих $X_{вх}$ воздействий. Возмущающие воздействия (например, нагрузка) вызывают отклонение выходной переменной объекта от заданного значения. Задающие воздействия определяют заданное значение выходной переменной объекта. Заданное значение выходной переменной объекта может быть либо постоянным, либо переменным во времени.

Автоматическим регулированием называется процесс поддержания заданного значения какой-либо физической величины в машинах, аппаратах или иных технических устройствах без непосредственного участия человека, с помощью специальных автоматических регуляторов. Таким образом, для систем автоматического регулирования характерным является наличие возмущающих воздействий, которые система должна нейтрализовать с наименьшей ошибкой.

Автоматическим управлением называется процесс изменения по некоторому закону какой-либо физической величины в машинах, аппаратах или иных технических устройствах, осуществляемый без непосредственного участия человека с помощью специальных автоматических устройств. Следовательно, для систем автоматического управления характерным является изменение по какому-либо закону задающего сигнала, который система должна воспроизводить с наибольшей точностью.

В качестве примера рассмотрим стабилизацию напряжения генератора постоянного тока. Пусть в цепь якоря генератора с независимым возбуждением включено сопротивление нагрузки $r_{\text{нагр}}$ (рис. 2.1, а). Если при этом сопротивление нагрузки изменяется, то при неизменных напряжении возбуждения U_B и скорости вращения якоря будет изменяться и напряжение генератора U_r .

Внешняя характеристика генератора при заданном U_B имеет вид кривой I (рис. 2.1, б). При номинальном токе нагрузки I_H напряжение на выходе генератора равно U_H (точка M на кривой I). При увеличении $r_{\text{нагр}}$ происходит уменьшение тока, например, до величины I_1 , что вызывает увеличение напряжения до величины U_1 (точ-

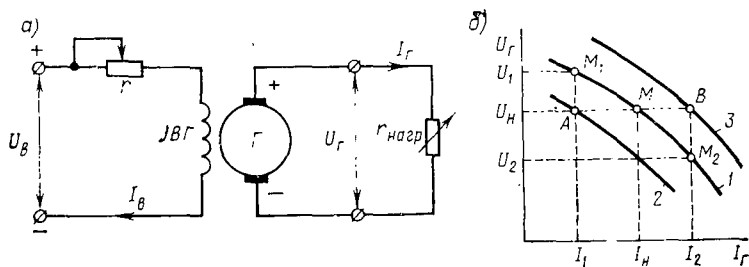


Рис. 2.1

ка M_1 на кривой I). В случае уменьшения $r_{\text{нагр}}$ происходит рост тока, например, до величины I_2 , что вызывает снижение напряжения до величины U_2 (точка M_2 на кривой I).

Кроме указанного изменения нагрузки генератора внешними воздействиями для генератора являются также изменение скорости вращения вала генератора, смещение щеток относительно полюсов машины, износ коллектора, изменение магнитных характеристик стали и т. п. Некоторые из этих воздействий (ток нагрузки, скорость вращения) могут измеряться, т. е. являются контролируемыми величинами, а остальные не поддаются контролю и относятся к числу неконтролируемых.

В некоторых случаях требования, предъявляемые к точности поддержания выходной переменной на заданном уровне, таковы, что устойчивые объекты могут использоваться без регуляторов (если отклонения от заданного режима не превышают допустимого значения). Иначе обстоит дело в неустойчивых и нейтральных объектах. Здесь ничто не препятствует накоплению отклонений режима работы объекта от заданного при сколь угодно малых значениях возмущающих воздействий. Поэтому поддержание заданного режима возможно только путем воздействия на объект извне при помощи соответствующего регулирующего органа. Если точность поддержания выходной переменной устойчивых объектов не соответствует требуемой, то в этом случае также необходимо применять регулятор.

Для электрического генератора, например, требуется обычно сохранять неизменным напряжение на клеммах генератора при наличии



74

74

стата и реостат — регулирующий органа. В рассмотренном примере регулятор обеспечивает изменение положения регулирующего органа за счет энергии измерительного элемента, получаемой от регулируемого объекта. Такой регулятор называется регулятором *прямого действия* (измерительный элемент одновременно является регулирующим устройством).

В некоторых случаях требуется затрачивать значительные усилия на изменение положения регулирующего органа, поэтому размеры чувствительного и преобразующего элемента могут оказаться значительными. Однако чтобы увеличить чувствительность и быстродействие измерительного элемента, его выполняют с ограниченной выходной мощностью. Вследствие указанных обстоятельств регулятор прямого действия не может обеспечить перемещение регулирующего органа. Для устранения этого недостатка выходной сигнал чувствительного элемента передается через усилительный элемент к силовому (исполнительному) элементу — серводвигателю. Последний обладает мощностью, необходимой для изменения положения регулирующего органа. Такие регуляторы называются регуляторами *непрямого действия*.

На рис. 2.3 приведен пример использования регулятора непрямого действия для регулирования напряжения генератора постоянного тока. Здесь применен серводвигатель — исполнительный двигатель постоянного тока, который управляется усилительным элементом в виде потенциометра и перемещает движок реостата, включенного в цепь *ОВГ*. При отклонении напряжения генератора в результате возмущающих воздействий будет перемещаться ползунок потенциометра. Это означает, что к обмотке якоря двигателя будет подводиться напряжение определенной величины и полярности, и двигатель будет перемещать ползунок реостата, включенного в цепь *ОВГ*. До тех пор, пока на выходе генератора не восстановится заданная величина напряжения, движок реостата будет перемещаться. Как только напряжение генератора станет равным заданной величине, траверса займет среднее положение, и двигатель остановится. Система придет к новому установившемуся режиму с прежним значением напряжения генератора, но при другом значении тока нагрузки и другом положении регулирующего органа.

Система регулирования может быть построена на ином принципе (рис. 2.4). Для поддержания заданного напряжения на выходе гене-

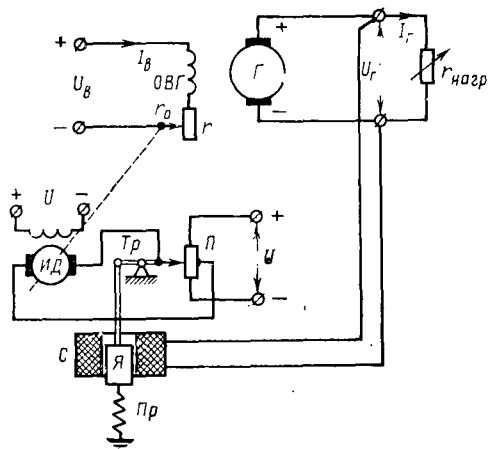


Рис. 2.3

ратора может быть использована серийная обмотка CO . Последняя включается в цепь тока нагрузки (рис. 2.4, а) и создает намагничивающую силу (н. с.), направленную согласно с н. с. независимой обмотки $ОВГ$. Число витков серийной обмотки можно выбрать таким, чтобы обеспечивалось постоянство напряжения на выходе генератора в диапазоне изменения тока нагрузки от нуля до номинального значения (рис. 2.4, б). Практически внешняя характеристика в этом случае будет иметь нелинейный вид, обусловленный нелинейностью характеристики намагничивания генератора.

Рассмотренные примеры автоматической стабилизации напряжения генератора характеризуются тем, что с целью стабилизации заданного значения напряжения

(регулируемая переменная автоматической системы) на регулируемый объект (генератор) подается определенное управляющее воздействие.

Совокупность предписаний, по которой формируется управляющее воздействие на объект, назы-

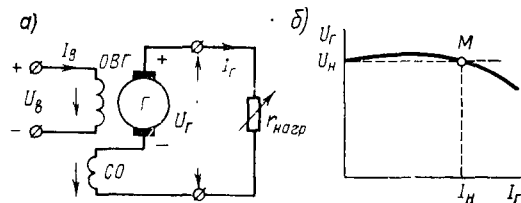


Рис. 2.4

вается *законом регулирования или управления* (алгоритмом управления). Математически закон управления определяется уравнением регулятора. Различают линейные и нелинейные законы управления.

Л и н е й н ы е законы управления характеризуются линейным уравнением регулятора; при линейном законе регулятор вырабатывает сигнал, пропорциональный входной переменной, а в некоторых случаях — сигнал, пропорциональный производной и интегралу от входной переменной. Следовательно, в частных случаях линейный закон управления может быть либо пропорциональным (П-регулятор), либо интегрирующим (И-регулятор). Кроме того, линейный закон может быть пропорционально-дифференцирующим (ПД-регулятор) или пропорционально-интегрирующе-дифференцирующим (ПИД-регулятор); дифференцирующий закон управления обычно применяется в сочетании с пропорциональным или интегрирующим законами.

Н е л и н е й н ы е законы управления в ряде случаев создаются специально (оптимальные, самонастраивающиеся и другие системы), чтобы получить заданное качество автоматической системы. Они могут быть обусловлены нелинейностью характеристик регулятора либо наличием логического элемента, изменяющего структуру регулятора. Нелинейные законы управления придают особые свойства автоматическим системам.

§ 2.2. Принципы регулирования и управления

Схемы, изображенные на рис. 2.2 и 2.3, имеют следующие основные свойства. Изменение регулируемой переменной (напряжения генератора) вызывает перемещение якоря электромагнита, что приводит к изменению сопротивления цепи $ОВГ$. На вход регулятора (н

электромагнит) подается действительное значение выходной переменной, а также заданное (предписанное) значение регулируемой переменной, устанавливаемое с помощью уравнивающей пружины. Такая связь выхода системы с входом регулятора называется *обратной связью*. Если сигнал обратной связи, подаваемый на вход системы, пропорционален только значению выходной переменной объекта в любой момент времени, то обратная связь называется *жесткой*. Если же сигнал обратной связи, подаваемый на вход системы, появляется не только при изменении выходной переменной объекта, но и ее производных, то обратная связь называется *гибкой*.

В рассмотренных примерах обратная связь является жесткой и позволяет сравнить заданное и действительное значения регулируемой переменной и выявить имеющиеся отклонения (расхождение, сигнал ошибки). Полученное отклонение поступает на вход регулятора, обеспечивающего поддержание выходной переменной на заданном уровне. Такой способ называется *регулированием по принципу отклонения* регулируемой переменной от заданного значения (принцип Ползунова). Он был применен Ползуновым для поддержания заданного уровня воды в котле. Большая часть автоматических систем работает по этому принципу. Указанное регулирование можно осуществить в том случае, если главная обратная связь является отрицательной, т. е. действия датчика и выходной переменной на входе регулятора противоположны. Регулирование, осуществляемое по принципу отклонения, произойдет всегда независимо от причины отклонения выходной переменной.

Все высококачественные современные системы автоматического управления работают по принципу обратной связи, которая является основным принципом построения автоматических систем. При этом все элементы системы образуют замкнутую цепь — управляющий контур, а управляющее воздействие передается вдоль контура в одном определенном направлении.

Приведенные выше примеры использования обратной связи представляют лишь частные случаи. По определению Н. Винера [Л.9] принцип обратной связи имеет также физиологическое применение: «...обратная связь не только участвует в физиологических явлениях, но и является совершенно необходимой для продолжения жизни».

В примере системы, представленной на рис. 2.4, а, используется другой способ: применено устройство, действующее непосредственно в функции возмущающего воздействия и компенсирующее его влияние. Таким устройством является сериесная обмотка возбуждения генератора, создающая н. с., которая компенсирует влияние реакции и падение напряжения в якоре от тока нагрузки. В связи с тем что основным возмущающим воздействием в данном случае является нагрузка генератора, регулирование в функции величины этого возмущающего воздействия позволяет получить неизменное значение напряжения генератора в определенном диапазоне изменения нагрузки (см. рис. 2.4, б). Такой способ называется *принципом регулирования по возмущению*. Однако при таком регулировании не учитывается и не компенсируется отклонение выходной переменной, вызываемое дру-

гими факторами. Устройство, осуществляющее управляющее воздействие на регулятор в функции возмущающего воздействия, можно назвать компенсирующей связью. При наличии нескольких возмущающих воздействий регулятор должен иметь компенсирующие связи по каждому из этих возмущений, чтобы обеспечить поддержание выходной переменной на заданном уровне. Естественно, что при этом усложняется конструкция регулятора и потребуется большое количество разнообразных элементов.

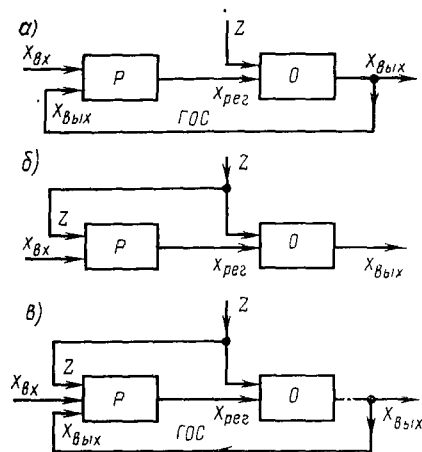


Рис. 2.5

Аналогичные принципы используются при разработке систем автоматического управления.

Для создания высококачественных автоматических систем обычно применяется комбинированный принцип регулирования, в котором использованы принципы регулирования по отклонению и по возмущению. Это позволяет повысить точность регулирования (см. гл. 11).

Системы, работающие по различным принципам, имеют существенные различия. Так, в системе, где осуществлено управление по принципу отклонения, управляющее

воздействие проходит по замкнутому контуру. При этом воздействия передаются последовательно от одного элемента к другому, меняя свою физическую природу и размерность. Распространение воздействий происходит в одном направлении, называемом направлением распространения воздействий.

Элементами направленного действия называются такие, выходная величина которых зависит от значения сигнала на входе, а входная величина не зависит непосредственно от значения выходной величины. Если применить условное изображение системы, то при управлении по принципу отклонения управляемой переменной обратная связь, называемая *главной ГОС*, образует замкнутый контур (рис. 2.5, а). Главная обратная связь обычно является отрицательной, в связи с чем на управляемый объект O подается воздействие, пропорциональное разности между выходной переменной и заданным ее значением так, чтобы эта разность уменьшалась.

В случае использования принципа компенсации возмущений на вход регулятора P подается сигнал, пропорциональный возмущающему воздействию. В этом случае (рис. 2.5, б) нет зависимости между управляющим воздействием и результатом этого действия на объект.

На рис. 2.5, в показан принцип комбинированного регулирования, в котором используется регулирование по отклонению и по возмущению. Этот принцип позволяет обеспечить наиболее высокую точность регулирования и управления.

Схема системы автоматического регулирования и управления может быть составлена по нескольким признакам. Одним из таких признаков является функция, выполняемая данным элементом в системе. Подобная схема называется *функциональной*.

Одной из важнейших функций является сравнение заданного и полученного значений выходной переменной. Эта функция выполняется «элементом сравнения». Однако элемент сравнения заданного

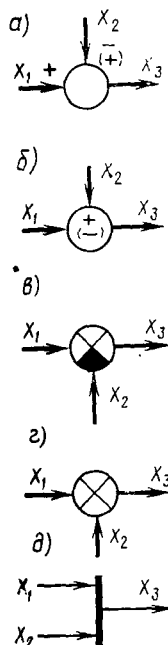


Рис. 2.6

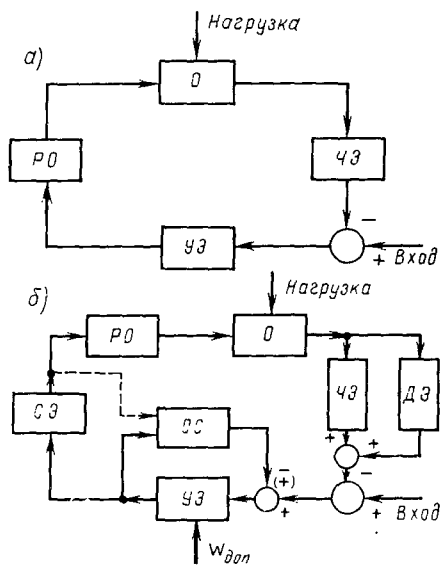


Рис. 2.7

и действительного значений выходной переменной иногда не имеет собственного конструктивного исполнения. Принято несколько вариантов условного изображения элемента сравнения на схемах. На рис. 2.6, а и б знак «+» соответствует положительной обратной связи (суммирование входных величин X_1 и X_2), знак «-» — отрицательной обратной связи (вычитание входных величин). В некоторых случаях для отрицательной обратной связи применяется изображение, приведенное на рис. 2.6, в. При положительной обратной связи применяется изображение, показанное на рис. 2.6, г. Существуют и другие способы изображения элемента сравнения (например, рис. 2.6, д). В дальнейшем будем использовать изображение суммирующего узла так, как это показано на рис. 2.6, а.

На рис. 2.7 представлены функциональные схемы систем прямого и непрямого регулирования. Элементы системы изображены в виде

прямоугольников, в которые вписаны первые буквы названия элемента (*O* — объект управления, *ЧЭ* — чувствительный элемент, *УЭ* — усилительный элемент, *СЭ* — силовой элемент, *РО* — регулирующий орган, *ОС* — обратная связь, *ДЭ* — дифференцирующий элемент и др.).

Параметры, характеризующие состояние объекта управления и существенные для процесса управления, называются *выходными переменными*, или *выходными сигналами* системы. Точки системы, в которых выходные сигналы могут наблюдаться в виде определенных физических величин, называются *выходами* системы.

Любой объект управления и элемент системы могут испытывать (воспринимать) внешние воздействия. Точки системы, в которых приложены внешние воздействия, называются *входами*, а сами внешние воздействия могут быть разделены на задающие и возмущающие воздействия.

Сигналы, связанные с источниками информации о задачах и результатах управления, называются *полезными входными сигналами*. Существуют также сигналы, не связанные с источниками информации о задачах и результатах управления; эти сигналы являются *помехами*.

Понятие входов и выходов условно и относится всегда только к определенной системе. Системы с одним входом и одним выходом обычно называются *одномерными*; системы с несколькими входами и выходами называются *многомерными*.

Одномерные системы, имеющие только одну главную обратную связь, называются *одноконтурными*. Одномерные системы, имеющие кроме главной обратной связи одну или несколько местных обратных связей (охватывающих отдельные элементы) или их группы, называются *многоконтурными*. Многомерные системы всегда являются многоконтурными.

§ 2.4. Основные элементы автоматических систем

Рассматривая функциональную схему, элементы которой характеризуются выполняемыми ими функциями, можно объединить все встречающиеся на практике элементы в несколько групп по функциональному признаку.

З а д а ю щ и е э л е м е н т ы позволяют устанавливать предписанное (заданное) значение выходной переменной объекта. Такими элементами в системах регулирования могут быть пружина, эталонное сопротивление, источник эталонного напряжения, опорный полупроводниковый диод, груз, уровень и т. д. В системах управления (в частности, в следящих системах) задающими элементами могут быть двигатель, рука человека и др.

Ч у в с т в и т е л ь н ы е э л е м е н т ы регулятора предназначены для измерения выходной переменной или ее отклонения от заданного значения. Конструктивное отличие этих элементов от точных измерительных приборов заключается в том, что уменьшен диапазон измерения и увеличена мощность (особенно у регуляторов прямого действия).

Усилительные элементы служат для усиления сигнала, выработанного чувствительным элементом.

Исполнительные элементы предназначены для создания управляющего воздействия на объект. Если они создают механическое перемещение регулирующего органа, то называются *сервомоторами*, или *серводвигателями*.

Преобразовательные элементы применяются в тех случаях, когда на выходе элемента надо получить величину, отличающуюся от входной либо количественно, либо качественно (по физической природе). К таким преобразованиям прибегают в тех случаях, когда выработанная в предшествующем элементе величина по каким-либо причинам для дальнейшего использования неудобна.

Корректирующие и стабилизирующие устройства служат для изменения динамических качеств системы и элементов. Такими элементами обычно являются дифференцирующие и другие элементы и устройства обратных связей.

Принцип работы и характеристики всех указанных элементов предполагаются известными из курсов электротехники, элементов автоматики и др.

Основными элементами систем регулирования и управления являются управляемые объекты. Ими могут быть различные технические устройства и установки (двигатели, источники энергии, движущиеся в пространстве объекты, нагревательные печи и др.).

§ 2.5. Принципы классификации автоматических систем

Возможны различные принципы классификации автоматических систем. Так, можно классифицировать системы по закону изменения выходной переменной:

- стабилизирующая автоматическая система, когда предписанное значение выходной переменной является неизменным;

- программная автоматическая система, когда выходная переменная изменяется по определенной, заранее заданной программе;

- следящая автоматическая система, когда предписанное значение выходной переменной зависит от значения неизвестной заранее переменной на входе автоматической системы.

По новой терминологии [Л. 29] все три основных класса автоматических систем объединяются общим названием — системы автоматического управления (САУ). Система автоматического регулирования (стабилизирующая система) является частным случаем САУ.

Возможны и другие виды классификации систем в зависимости от: характера регулируемой физической величины (напряжение, уровень и т. д.);

- вида используемой для управления энергии (электромеханические, электронные, пневматические, гидравлические и др.);

- характера действующих в системе сигналов (непрерывные, дискретные);

- вида уравнений систем (линейные и нелинейные);

стабильности параметров системы во времени (с постоянными и с переменными параметрами); системы с постоянными параметрами иногда называются *детерминированными*, или *стационарными* (во времени), а системы с переменными параметрами — *нестационарными* (во времени);

количества регулируемых и управляемых переменных (одномерные и многомерные); многомерные системы подразделяются на системы несвязанного и связанного регулирования (многосвязные системы);

свойства приспосабливаться к изменению внешних условий работы и улучшать свою работу по мере накопления опыта (обыкновенные и самонастраивающиеся); самонастраивающиеся системы применяются в тех случаях, когда свойства и условия работы объекта недостаточно известны или существенно изменяются.

Примерами систем стабилизации выходной переменной (система автоматического регулирования) являются системы стабилизации напряжения, представленные на рис. 2.2 и 2.3. Другие автоматические системы (нелинейные, импульсные, оптимальные, самонастраивающиеся и др.) и их классификация будут рассмотрены далее.

§ 2.6. Задачи теории автоматического управления

Разработка и проектирование автоматических систем состоит из следующих этапов: изучение управляемого объекта; определение его характеристик, параметров, условий работы и воздействий, которые он испытывает; формулирование требований, предъявляемых к системе; выбор функциональной схемы; разработка принципиальной схемы автоматической системы; выбор и расчет ее элементов и параметров на основе требований, предъявляемых к статическим свойствам системы; составление структурной схемы, характеризующей динамику системы; исследование устойчивости системы; выбор параметров корректирующих устройств на основе требований, предъявляемых к динамическим свойствам системы (качество процесса управления); исследование системы в лабораторных условиях или на моделирующих установках и внесение соответствующих коррективов в схему; проектирование, изготовление и монтаж системы в целом; наладка системы в реальных условиях; опытная эксплуатация автоматической системы; обобщение результатов опытной эксплуатации и составление рекомендаций по совершенствованию системы.

Вопрос проектирования и исследования автоматической системы должен решаться в результате совместного рассмотрения статических и динамических режимов. Так как в автоматические системы входят объекты и элементы, относящиеся к любой области техники, то изучение общих методов статики и динамики автоматических систем не может являться предметом только механики, или теплотехники, или электротехники, или радиотехники. Вместе с тем известно, что многие существенные вопросы статики и динамики автоматических систем в любой области техники решаются одними и теми же математическими и экспериментальными методами. Поэтому возникла спе-

циальная наука — теория автоматического управления, изучающая общие для всех замкнутых автоматических систем (вне зависимости от их физической сущности) принципы построения, методы исследования статических и динамических свойств системы в целом, методы выбора параметров элементов на основе предъявляемых к ней требований качества.

Одной из важных областей теории является анализ и оценка решений алгебраических, дифференциальных, разностных и других уравнений автоматических систем иногда с привлечением методов теории вероятности, информации, вариационного исчисления и др.

В практические задачи теории автоматического управления входит разработка методов:

синтеза систем, позволяющих так выбрать схему взаимодействия элементов, а также их параметры и характеристики, чтобы система в целом удовлетворяла заданным требованиям, предъявляемым к ее поведению в статике и динамике;

анализа систем, позволяющих определить, удовлетворяют ли системы предъявляемым к ним требованиям, и показывающих пути улучшения их динамических свойств;

экспериментального исследования автоматических систем.

Развитие теории автоматического управления осложняется тем, что по существу она должна опираться почти на всю современную технику и в то же время использовать весьма сложный математический аппарат. Часто современный уровень развития математики оказывается недостаточным для решения некоторых задач теории управления. Здесь мощным средством являются экспериментальное исследование и моделирование, облегчающие расчеты и способствующие созданию приближенных инженерных методов решения задач.

Вопросы для самопроверки

1. Что представляет собой автоматическое регулирование и управление и чем оно отличается от ручного регулирования?
2. Назовите принципы управления, применяемые в автоматических системах. Приведите определение закона регулирования (алгоритма управления).
3. В чем различие между прямым и косвенным регулированием? Приведите примеры.
4. Что называется регулируемой или управляемой переменной, возмущающим и задающим воздействием?
5. Перечислите основные функциональные элементы и нарисуйте функциональные схемы при прямом и косвенном регулировании.
6. Приведите классификацию автоматических систем и назовите основные признаки классификации.
7. Какие задачи стоят перед теорией автоматического управления?
8. Укажите основные этапы разработки автоматических систем.

СТАТИКА АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

При расчете статики рассматривается режим работы системы, при котором никакие сигналы в системе не изменяются во времени.

Важными вопросами статики являются обеспечение заданной статической точности, а также изучение статических характеристик элементов и систем. Зависимость выходной переменной от входной в статическом режиме называется *статической характеристикой* системы. По виду этих характеристик различают статическое и астатическое регулирование и управление.

§ 3.1. Статическое регулирование и управление

Рассмотрим систему регулирования напряжения генератора (см. рис. 2.2). Известно, что в диапазоне изменения тока нагрузки от нуля до максимального значения напряжение на выходе генератора при отсутствии регулятора (или при разомкнутой системе) изменится на величину (рис. 3.1, линия 1)

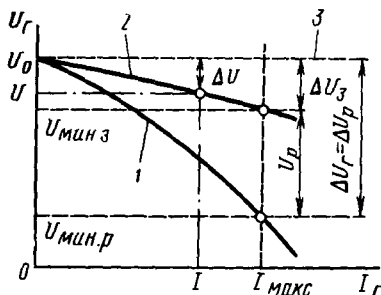


Рис. 3.1

$$\Delta U_r = U_0 - U_{\min.p} = \Delta U_p, \quad (3.1)$$

где U_0 — напряжение при холостом ходе; $U_{\min.p}$ — напряжение при максимальной нагрузке.

Если при разомкнутой системе изменить вручную напряжение, подводимое к катушке соленоида (вход системы), на величину ΔU_c , то напряжение генератора (выход системы) изменится на ΔU_r . Отношение полученных приращений переменных называется *коэффициентом усиления разомкнутой системы*

$$K = \Delta U_r / \Delta U_c. \quad (3.2)$$

При включенном регуляторе (система регулирования замкнута) величина напряжения на выходе генератора не может быть строго постоянной и при изменении тока нагрузки (от нуля до максимального значения) напряжение генератора отклоняется от заданного на некоторую величину (см. рис. 3.1, линия 2)

$$\Delta U_3 = U_0 - U_{\min.з}. \quad (3.3)$$

Отклонение напряжения генератора от заданного значения при возмущении называется *ошибкой регулирования*.

Если U_0 соответствует U_n , то абсолютная статическая ошибка при замкнутой системе для некоторого возмущения будет

$$\Delta U = U_0 - U = U_n - U. \quad (3.4)$$

Относительная статическая ошибка

$$\delta = \Delta U / U_n. \quad (3.5)$$

Отношение отклонения регулируемой переменной при максимальной нагрузке к заданному значению называется *степенью* (коэффициентом) *неравномерности*, или *статизмом*. Для разомкнутой системы, например,

$$S_p = \frac{\Delta U_p}{U_0} = \frac{U_0 - U_{\text{мин.р}}}{U_0} = 1 - \frac{U_{\text{мин.р}}}{U_0}. \quad (3.6)$$

Иногда в качестве заданного принимают среднее значение между максимальным и минимальным.

Статизм можно определить как наибольшую относительную ошибку. Для замкнутой системы статизм

$$S_z = \frac{\Delta U_z}{U_0} = \frac{U_0 - U_{\text{мин.з}}}{U_0} = 1 - \frac{U_{\text{мин.з}}}{U_0}. \quad (3.7)$$

Как видно из рис. 3.1, для разомкнутой системы статизм будет больше, чем для замкнутой. Если $S_z \neq 0$, то регулирование или управление называется статическим; при этом система называется *статической*. Если $S_z = 0$, то регулирование или управление называется астатическим; при этом система называется *астатической*.

При максимальной нагрузке без регулятора возникает отклонение напряжения ΔU_p . Если включить регулятор, то напряжение на выходе будет меньше заданной величины на погрешность регулирования ΔU_z (см. рис. 3.1). Обозначив U_p разность между установившимися значениями напряжения генератора при одной и той же максимальной нагрузке без регулятора и с регулятором, запишем

$$\Delta U_z = \Delta U_p - U_p. \quad (3.8)$$

В данном случае для разомкнутой системы коэффициент усиления

$$K = U_p / \Delta U_{\text{вх}}. \quad (3.9)$$

Учитывая, что $\Delta U_{\text{вх}} = \Delta U_z$, и принимая во внимание (3.8), получим

$$\Delta U_{\text{вх}} = \Delta U_p - U_p. \quad (3.10)$$

Разделив все члены (3.10) на $\Delta U_{\text{вх}}$, с учетом (3.9) найдем

$$1 = \Delta U_p / \Delta U_{\text{вх}} \cdot K. \quad (3.11)$$

Величина $\Delta U_{\text{вх}}$ равна отклонению управляемой переменной ΔU_z , поэтому из (3.11) получим *погрешность управления*:

$$\delta = \frac{1}{U_n} \cdot \frac{\Delta U_p}{1 \cdot K}, \quad (3.12)$$

где $\delta = \Delta U_{\text{вх}} / U_n$,

или, в процентах,

$$\delta \% = \Delta U_p \% / (1 + K). \quad (3.13)$$

Итак, статическая погрешность δ прямо пропорциональна отклонению выходной переменной объекта при работе без регулятора и обратно пропорциональна коэффициенту усиления разомкнутой системы. Для уменьшения статической погрешности следует увеличить коэффициент усиления системы.

Если задана величина погрешности δ и известно относительное отклонение выходной переменной $\Delta X_{\text{вых}}$ объекта при работе без регулятора, то из (3.13) можно вычислить значение коэффициента усиления разомкнутой системы

$$K = (\Delta X_{\text{вых}} / \delta) - 1. \quad (3.14)$$

В формуле (3.14) принимается наибольшая из всех значений величина $\Delta X_{\text{вых}}$ для различных режимов работы объекта.

Пусть, например, $\Delta X_{\text{вых}} = 20\%$ и требуется обеспечить $\delta = 1\%$, тогда $K = 19$. Если требуется обеспечить $\delta = 0,5\%$, то $K = 39$. Для получения $\delta \rightarrow 0$ необходимо, чтобы $K \rightarrow \infty$, что в статических системах практически не может быть осуществлено по условиям устойчивости (см. гл. 8).

Аналогично можно рассмотреть статическое управление при изменении задающего сигнала.

Примечание. При равновесном режиме движущие силы в регуляторе уравниваются силами сопротивлений. Если внешние возмущения выводят систему из равновесия, то подвижные части регулятора могут начать движение только после того, как будет преодолено трение покоя и «выбраны» зазоры. Для электромеханического регулятора (см. рис. 2.2) это означает, что при отклонении напряжения генератора от заданного значения в диапазоне, определяемом зазором и силами трения, якорь соленоида будет находиться в состоянии покоя. Отсюда следует, что для каждого положения подвижной части регулятора возможно некоторое изменение управляемой переменной, на которое регулятор не реагирует. Свойство регулятора не реагировать на изменение управляемой переменной в вышеуказанных пределах называется *нечувствительностью регулятора*.

§ 3.2. Астатическое регулирование и управление

В системах, которые обеспечивают в установившемся режиме равенство управляемой переменной заданному значению (статизм равен нулю), осуществляется астатическое регулирование или управление.

Рассмотрим, например, систему регулирования с исполнительным двигателем (см. рис. 2.3). Ранее было отмечено, что при отклонении выходной переменной от заданного значения к якорю исполнительного двигателя будет подано напряжение определенной полярности и произойдет соответствующее перемещение регулирующего органа. Исполнительный двигатель остановится тогда, когда напряжение, подводимое к его якорю, будет равно нулю. Это возможно в том случае, если якорь соленоида займет свое заданное положение, определяемое предписанным значением выходной переменной.

Таким образом, статическая ошибка в установившемся режиме будет равна нулю, а статическая характеристика является прямой линией, параллельной оси абсцисс (см. рис. 3.1, линия 3).

Поведение астатического регулятора (см. рис. 2.3) можно охарактеризовать, рассмотрев его работу при разомкнутой главной обратной связи. Если подать на вход астатической системы постоянный сигнал, то на ее выходе можно получить непрерывное изменение выходной переменной с постоянной скоростью, так как к якорю исполнительного двигателя будет подведено постоянное напряжение. Двигатель будет вращаться с постоянной скоростью и перемещать регулирующий орган (движок реостата) также с постоянной скоростью. Напряжение на выходе также будет изменяться с постоянной скоростью (без учета насыщения). Отношение скорости изменения выходной переменной к сигналу на входе называется *коэффициентом усиления астатической системы* ($1/\text{сек}$)

$$K_a = U'_{\text{вых}} / \Delta U_{\text{вх}}, \quad (3.15)$$

где $U'_{\text{вых}} = dU_{\text{вых}}/dt$ — скорость изменения выходной переменной.

Для статического режима работы астатических систем не существует определенной зависимости между значением выходной переменной и положением регулирующего органа.

Аналогично может быть рассмотрен статический режим для астатического управления при изменении задающего сигнала.

§ 3.3. Статические характеристики элементов

Статический режим любого элемента, имеющего одну входную переменную, может быть описан некоторым уравнением:

$$X_{\text{вых}} = f(X_{\text{вх}}), \quad (3.16)$$

где $X_{\text{вых}}$ — выходная переменная; $X_{\text{вх}}$ — входная переменная.

Зависимость (3.16), называемая *уравнением статики элемента*, может быть различной, в связи с чем различными будут и статические характеристики элементов.

Различают линейные и нелинейные статические характеристики элементов. Для линейных статических характеристик может быть записано уравнение

$$X_{\text{вых}} = k \cdot X_{\text{вх}}. \quad (3.17)$$

Отношение выходной и входной переменных, имеющих одинаковую физическую природу, называется *коэффициентом усиления элемента*

$$k = X_{\text{вых}} / X_{\text{вх}} = \text{tg } \alpha. \quad (3.18)$$

При различной физической природе входной и выходной переменных их отношение называется *коэффициентом передачи*, который для линейных характеристик является постоянным (рис. 3.2).

Если статическая характеристика элемента нелинейна, то

$$X_{\text{вых}} = f(X_{\text{вх}}) \text{ или } X_{\text{вых}}/X_{\text{вх}} = k(X_{\text{вх}}).$$

Для нелинейного элемента коэффициент усиления (передачи) является переменной величиной, зависящей от $X_{вх}$ или других величин.

На рис. 3.3 приведены примеры двух различных нелинейных характеристик. В ряде случаев производят линейризацию* нелинейной статической характеристики на отдельных ее участках. Линейриза-

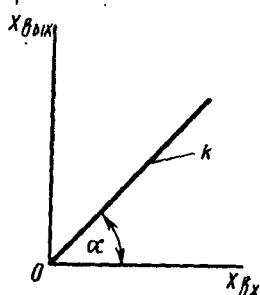


Рис. 3.2

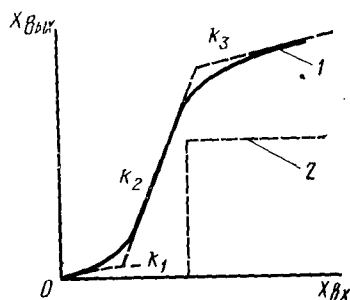


Рис. 3.3

ция нелинейной характеристики возможна только в том случае, если она непрерывна (кривая 1) и имеет непрерывное изменение производной во всем диапазоне кривой. Это позволяет принять постоянные значения k_i на отдельных участках. Для характеристики 2 указанная линейризация невозможна; в этом случае можно применить другой вид линейризации — гармоническую линейризацию (см. гл. 13).

Если имеется две и более входных переменных, то статическая характеристика элемента может определяться нелинейной зависимостью

$$X_{вых} = f(X_{вх1}, X_{вх2}, \dots). \quad (3.19)$$

Зависимость (3.19) может быть линейной относительно одних входных переменных и нелинейной относительно других. Например, электро-

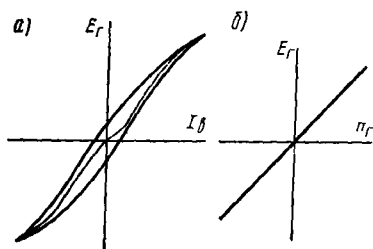


Рис. 3.4

движущая сила (э. д. с.) электрического генератора E_r зависит от тока возбуждения I_b и от скорости вращения якоря n_r . Эта зависимость э. д. с. от первой входной переменной $E_r = f(I_b)$ является нелинейной (рис. 3.4, а), а от второй входной переменной $E_r = kn_r$ — линейной (рис. 3.4, б). В случае изменения обеих входных переменных зависимость $E_r = f(I_b, n_r)$ является нелинейной, так как определяется произведением магнитного потока $\Phi_r = f(I_b)$ и скорости вращения $E_r = C_e n_r \Phi_r$ (где C_e — постоянный коэффициент).

* Замена нелинейной статической характеристики отрезками прямых линий.

Статические характеристики обычно рассчитываются относительно постоянных внешних воздействий для статических систем. При этом обычно определяются эквивалентные характеристики для отдельных участков схемы в зависимости от способа соединения элементов.

Элементы систем могут быть соединены параллельно или последовательно. Возможно наличие элементов с обратными связями. Соединение элементов называется *параллельным*, если на их входы поступает одна и та же входная переменная, а выходные переменные всех элементов складываются. Соединение элементов называется *последовательным*, если выходная переменная каждого предыдущего элемента является входной переменной для каждого последующего элемента.

Результирующая статическая характеристика рассчитывается аналитически или графически. Графические методы позволяют учитывать нелинейности характеристик элементов (см. гл. 13), когда аналитический расчет затруднен или невозможен.

В тех случаях, когда все элементы системы линейны, можно применить аналитический метод расчета статических характеристик. При этом могут быть получены аналитические выражения (общие для ряда систем), которые позволяют сделать ряд важных выводов.

Если, например, имеется два линейных элемента без обратных связей, то их уравнения статики можно представить в виде:

$$X_1 = k_1 X_{вх1}; \quad (3.20)$$

$$X_2 = X_{вых} = k_2 X_{вх2}, \quad (3.21)$$

где k_1 и k_2 — коэффициенты усиления элементов; X_1 и X_2 — выходные переменные первого и второго элементов; $X_{вх1}$ и $X_{вх2}$ — входные переменные первого и второго элементов.

В случае последовательного соединения элементов $X_{вх2} = X_1$, поэтому, исключая из (3.20) и (3.21) переменную X_1 , получим аналитическое выражение для расчета статической характеристики

$$X_{вых} = k_1 k_2 X_{вх} = K X_{вх}, \quad (3.22)$$

где K — общий коэффициент усиления.

Если имеется последовательное соединение n элементов, то

$$K = k_1 k_2 k_3 \dots k_n = \prod_{i=1}^n k_i. \quad (3.23)$$

При параллельном соединении элементов в уравнениях (3.20) и (3.21) $X_{вх1} = X_{вх2} = X_{вх}$, поэтому после суммирования получим

$$X_{вых} = X_1 + X_2 = (k_1 + k_2) X_{вх} = K X_{вх},$$

где $K = k_1 + k_2$.

В общем случае при параллельном соединении n элементов

$$K = k_1 + k_2 + \dots + k_n = \sum_{i=1}^n k_i. \quad (3.24)$$

Для замкнутого участка системы зависимость между входной и выходной переменными будет определяться с учетом обратной связи. Для примера рассмотрим последовательное соединение двух линейных элементов, охваченных общей жесткой обратной связью.

Запишем аналитические выражения статики элементов для этого случая (рис. 3.5):

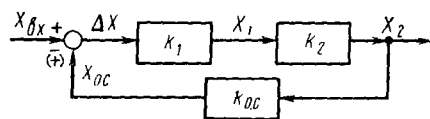


Рис. 3.5

$$\left. \begin{aligned} \Delta X &= X_{вх} (\pm) X_{о.с}; \\ X_1 &= k_1 \cdot \Delta X; \\ X_2 &= k_2 X_1 = X_{вых}; \\ X_{о.с} &= k_{о.с} \cdot X_{вых}, \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

где $k_{о.с}$ — коэффициент обратной связи; $X_{о.с}$ — выходная переменная элемента обратной связи.

Исключив из этих уравнений все промежуточные переменные, найдем аналитические выражения для расчета статической характеристики замкнутого участка системы относительно выходной переменной и ошибки:

$$X_{вых} = \frac{K}{1 (\pm) k_{о.с} K} X_{вх}; \quad (3.26)$$

$$\Delta X = X_{вх} - X_{о.с} = \frac{1}{1 (\pm) k_{о.с} K} X_{вх}, \quad (3.27)$$

где $K = k_1 k_2$ — коэффициент усиления разомкнутого участка системы; знак « $+$ » соответствует отрицательной, а « $-$ » — положительной обратной связи.

Аналогичные выражения можно получить для любой замкнутой автоматической системы относительно задающего воздействия (см. рис. 3.5). В этом случае на основании (3.26) и (3.27) можно ввести понятие о коэффициентах усиления замкнутой системы:

для сигнала $X_{вх}$

$$X_{вых} = K_3 X_{вх}; \quad (3.28)$$

для сигнала ошибки

$$\Delta X = K_{\Delta X} X_{вх}. \quad (3.29)$$

На основании выражений (3.26) ÷ (3.29) можно записать

$$K_3 = K / (1 \pm k_{о.с} K); \quad (3.30)$$

$$K_{\Delta X} = 1 / (1 \pm k_{о.с} K). \quad (3.31)$$

Выражения (3.28) и (3.30) позволяют определить аналитическую зависимость между входной и выходной переменными замкнутой автоматической системы при управляющем воздействии.

Для непрерывных нелинейных характеристик элементов значения k_i будут переменными (см. рис. 3.3), поэтому указанный аналитический расчет надо выполнять при разных k_i на отдельных участках характеристик.

Если рассматривается статика автоматических систем в случае возмущающих воздействий в виде изменения нагрузки ΔZ объекта*, имеющего коэффициент усиления k_0 , то можно записать (рис. 3.6):

$$\left. \begin{aligned} \Delta X_{\text{вых}} &= k_0 (\Delta Z - \Delta X_{\text{рег}}); \\ \Delta X_{\text{рег}} &= k_{\text{о.с.}} k_{\text{рег}} \Delta X_{\text{вых}}, \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

где $\Delta X_{\text{рег}}$ — отклонение выходной переменной регулятора; $k_{\text{рег}}$ — коэффициент усиления регулятора; $\Delta X_{\text{вых}}$ — изменение выходной переменной объекта при изменении нагрузки.

Из (3.32) получим

$$\Delta X_{\text{вых}} = \frac{k_0}{1 + k_0 k_{\text{рег}} k_{\text{о.с.}}} \Delta Z = \frac{k_0}{1 + K k_{\text{о.с.}}} \Delta Z, \quad (3.33)$$

где $K = k_0 k_{\text{рег}}$ — коэффициент усиления разомкнутой системы.

Так как в (3.32) величина $\Delta X_{\text{вых}}$ определяет ошибку замкнутой системы $\delta\%$ при изменении нагрузки, а произведение $k_0 \Delta Z$ характеризует отклонение выходной переменной при изменении нагрузки в случае разомкнутой системы ΔX_p , то ошибка статической системы относительно возмущения Z (при $k_{\text{о.с.}} = 1$)

$$\delta\% = \Delta X_p \% \cdot (1 + K)^{-1}. \quad (3.34)$$

Выражение (3.34) аналогично выражению (3.13). Суммарная ошибка в случае управляющего $X_{\text{вх}}$ и возмущающего Z воздействий на основании (3.29), (3.31) и (3.33) для линейной системы

$$\Delta X_{\Sigma} = \frac{X_{\text{вх}}}{1 + k_{\text{о.с.}} K} + \frac{k_0}{1 + k_{\text{о.с.}} K} \Delta Z, \quad (3.35)$$

или, в относительных единицах с учетом обозначений,

$$\delta_{\Sigma} = \delta_X + \delta_Z, \quad (3.36)$$

где δ_X — ошибка системы относительно задающего воздействия; δ_Z — ошибка системы относительно возмущающего воздействия.

Оценка ошибок установившихся режимов работы автоматических систем при произвольных внешних воздействиях производится специальными методами анализа качества автоматических систем (см. гл. 10) и методами статистической динамики (см. гл. 19).

Вопросы для самопроверки

1. Что характеризует статика и какие уравнения элементов используются при расчете статических характеристик?
2. Дайте определение статического и аstaticкого регулирования и управления.

* Это характерно для систем автоматического регулирования, обеспечивающих стабилизацию заданного значения выходной переменной.

3. Что представляют собой статизм (неравномерность) регулирования и степень статизма?

4. Как рассчитать статические характеристики системы автоматического управления или регулирования?

5. Как зависит величина статической ошибки от коэффициента усиления разомкнутой системы?

6. Как определить коэффициент усиления замкнутой системы относительно задающего сигнала и сигнала ошибки?

Глава 4

УРАВНЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЭТИХ УРАВНЕНИЙ

Динамический режим работы системы наступает по различным причинам; основными из них являются задающие и возмущающие воздействия.

Исследование динамики автоматических систем может быть проведено по уравнениям динамических режимов. Переходные процессы в большинстве элементов системы характеризуются инерционностью (наличие массы, индуктивности, емкости) и аналитически могут быть описаны дифференциальными уравнениями, которые определяют изменение управляемой переменной во времени при заданном характере задающих и возмущающих воздействий.

§ 4.1. Составление уравнений динамики систем

Функциональные элементы системы могут быть линейными и нелинейными в зависимости от характеристик каждого элемента. Физические величины, от которых зависят коэффициенты дифференциальных уравнений элементов или системы, называются *параметрами*. Параметрами являются, например, масса, емкость, индуктивность, момент инерции и др. В общем случае параметры не являются постоянными величинами и могут зависеть от ряда факторов, поэтому реальные элементы обычно нелинейны. Кроме того, параметры могут быть сосредоточенными или распределенными, что также отражается на составлении и решении уравнений динамики.

Переходный процесс системы может быть определен при помощи дифференциальных уравнений отдельных элементов (или уравнения всей системы). Уравнения, отражающие характер протекания переходного процесса, называются *уравнениями процессов управления*.

Если все уравнения элементов привести к одному уравнению, то будет получено уравнение динамики системы, которое в общем случае является нелинейным и имеет следующий вид:

$$F_1(x_{\text{вых}}, x'_{\text{вых}}, x''_{\text{вых}}, \dots, x^{n_{\text{вых}}}_{\text{вых}}) = F_2(z, z', z'', \dots, x_{\text{вх}}, x'_{\text{вх}}, x''_{\text{вх}}, \dots). \quad (4.1)$$

Для линейных систем справедлив принцип суперпозиции (наложения). Применяя принцип наложения, можно записать

$$F_1(x_{\text{вых}}, x'_{\text{вых}}, x''_{\text{вых}}, \dots) = F_{21}(z, z', z'', \dots) + F_{22}(x_{\text{вх}}, x'_{\text{вх}}, x''_{\text{вх}}, \dots), \quad (4.2)$$

где $x_{\text{вых}}, x'_{\text{вых}}, x''_{\text{вых}}, \dots, x^n_{\text{вых}}$ — управляемая переменная и ее производные (обобщенные выходные координаты); $x_{\text{вх}}, x'_{\text{вх}}, x''_{\text{вх}}, \dots$ — входная переменная (задающее воздействие) и ее производные (обобщенные входные координаты); $z, z', z'', \dots$ — возмущающее воздействие и его производные (обобщенные координаты возмущающего воздействия).

§ 4.2. Линеаризация уравнений и приведение их к форме в отклонениях

Если при составлении уравнений системы (4.1) принимаются во внимание все факторы, влияющие на динамику процесса регулирования, то уравнения получаются сложными, в большинстве случаев нелинейными. Поэтому для аналитического решения задач в общем виде иногда приходится заменять нелинейные уравнения приближенными линейными. Такая операция называется *линеаризацией*.

Основой линеаризации уравнений является выдвинутое И. А. Вышнеградским предположение, что в течение всего процесса регулирования имеют место лишь достаточно малые отклонения всех изменяющихся переменных от их установившихся значений*. Вводя в нелинейные уравнения процесса управления не абсолютные значения переменных, а их отклонения, удастся перейти к линейным уравнениям в приращениях.

Линеаризация уравнений и запись их в приращениях позволяют получить н у л е в ы е начальные условия.

Чтобы получить уравнения в отклонениях, следует прежде всего найти зависимость между обобщенными координатами для состояния равновесия системы. Затем следует считать равновесие нарушенным и записать дифференциальное уравнение переходного режима. После составления дифференциального уравнения текущие координаты заменяют суммой установившихся значений и приращений переменных:

$$x = X_0 + \Delta x, \quad (4.3)$$

где x — переменная величина; X_0 — ее первоначальное значение; Δx — приращение.

Далее из уравнения движения вычитают уравнение статики и получают уравнение переходного режима в приращениях.

Пример 4.1. Рассмотрим скачкообразное изменение постоянного напряжения U на зажимах электрической цепи, содержащей r и L .

На основании II закона Кирхгофа уравнение цепи, определяющее изменение тока во времени, в этом случае будет иметь вид:

$$U = ri + L di/dt, \quad (4.4)$$

где L — индуктивность цепи.

* Метод малых отклонений.

Уравнение статики этой цепи по закону Ома запишется как

$$U_0 = rI_0, \quad (4.5)$$

где U_0 , I_0 — первоначальные значения напряжения и тока.

Если напряжение в момент $t = 0$ изменилось скачком на величину ΔU , то при выбранном способе отсчета координат можно записать уравнение переходного процесса:

$$U_0 + \Delta U = r(I_0 + \Delta i) + Ld(I_0 + \Delta i)/dt. \quad (4.6)$$

Вычитая уравнение статики и учитывая, что производная от I_0 равна нулю, получим

$$\Delta U = r \Delta i + Ld\Delta i/dt. \quad (4.7)$$

Решая это дифференциальное уравнение с учетом начальных условий ($\Delta i = 0$ при $t = 0$), найдем

$$\Delta i = \Delta i_{уст} (1 - e^{-t/\tau}), \quad (4.8)$$

где $\tau = L/r$ — постоянная времени цепи; $\Delta i_{уст}$ — установившееся отклонение тока.

В общем случае для приведения уравнений к форме в конечных приращениях (отклонениях) используется формула разложения аналитической функции в ряд Тейлора и принимается, что движение происходит в пределах малых отклонений от установившегося состояния, а производные имеют единственное и конечное значение, отличное от нуля; в противном случае уравнение нелинеаризуемо. Представление аналитической функции в виде ряда, содержащего сумму приращений, основано на использовании теоремы Лагранжа о конечном приращении и теоремы Тейлора, являющейся обобщением теоремы Лагранжа.

Для непрерывной функции $f(X) = Z$, имеющей n непрерывных производных в замкнутом интервале $a \leq x \leq a + \Delta x$, формула Тейлора (степенной ряд) имеет вид

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x)|_{x=a} = & f(a) + \frac{\Delta x}{1!} f'(a) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(a) + \dots \\ & + \frac{\Delta x^n}{n!} f^n(a + \theta \Delta x). \end{aligned} \quad (4.9)$$

В частном случае, когда $a = 0$, получаем ряд Маклорена.

Если функция зависит от двух переменных — X , Y , т. е. $Z = f(X, Y)$, то при заданных приращениях переменных Δx и Δy и исходном начальном значении функции $Z_0 = f(a, b)$ можно записать следующий степенной ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x; y + \Delta y)|_{\substack{x=a \\ y=b}} = & f(a, b) + \frac{\Delta x}{1!} \cdot \frac{\partial f(a, b)}{\partial x} + \frac{\Delta y}{1!} \times \\ & \times \frac{\partial f(a, b)}{\partial y} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x^2} + \frac{2\Delta x \Delta y}{2!} \cdot \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial y^2} \cdot \frac{(\Delta y)^2}{2!} + \dots + R_n, \end{aligned} \quad (4.10)$$

где R_n — остаточный член при значениях высших частных производных, выраженных через некоторые числа θ_1 и θ_2 .

Используя формулы (4.9) и (4.10) для представления аналитических функций автоматических систем в виде ряда Тейлора, обычно пренебрегают членами второго порядка и более. Далее вычитают значение функции для установившегося состояния.

В случае зависимости функции от одной переменной величины вместо (4.9) получим

$$f_1(\Delta x) = \Delta x f'(X_0), \quad (4.11)$$

где $f'(X_0) = \operatorname{tg} \alpha$ — производная функции данной обобщенной координаты по входной переменной, определяемая как тангенс угла наклона статической характеристики элемента в заданной точке A , определяемой величиной X_0 (рис. 4.1, а).

Для случая зависимости функции от двух переменных x, y

$$f_2(\Delta x, \Delta y) = \Delta x \frac{\partial f(X_0, Y_0)}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f(X_0, Y_0)}{\partial y}, \quad (4.12)$$

где $\frac{\partial f(X_0, Y_0)}{\partial x} = \operatorname{tg} \beta$, $\frac{\partial f(X_0, Y_0)}{\partial y} = \operatorname{tg} \gamma$ — значения частных производных функций данной обобщенной координаты при установившемся значении переменных X_0 и Y_0 , определяемых как тангенсы углов наклона касательных к соответствующим кривым, устанавливающим зависимость функции от переменных x и y (рис. 4.1, б и в).

Формулы (4.11) и (4.12) представляют собой уравнения в приращениях; они могут применяться к линейным и к нелинейным аналитическим функциям.

Линейзация нелинейных функций методом малых отклонений графически означает замену кривой отрезком касательной к этой кривой в данной точке A (штриховая на рис. 4.1).

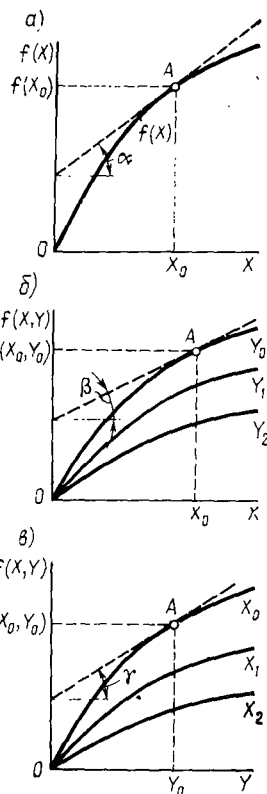


Рис. 4.1

§ 4.3. Безразмерная форма уравнений

Переменные величины и коэффициенты, входящие в уравнение движения, имеют определенную размерность. Это вызывает некоторые неудобства при анализе системы и особенно при совместном рассмотрении и сравнении нескольких систем. Более целесообразной в некоторых случаях оказывается безразмерная форма уравнения системы.

При приведении уравнения к безразмерной форме каждую переменную величину выражают в относительных единицах, а затем все

коэффициенты правой и левой частей уравнения делят на постоянную величину, имеющую размерность членов уравнения. После приведения переменных величин к относительным единицам (путем умножения и деления переменных на выбранное базовое значение) уравнение приобретает одну определенную размерность. Следовательно, деление на коэффициент, имеющий размерность уравнения, позволяет получить безразмерное уравнение.

Обычно определяемое безразмерное уравнение приводят к нормализованной форме, разделив все коэффициенты на коэффициент при входной или выходной переменной. В связи с этим существуют две формы безразмерных нормализованных уравнений:

когда коэффициент при выходной переменной равен единице:

$$T \frac{dx_{\text{вых}}}{dt} + x_{\text{вых}} = k x_{\text{вх}}, \quad (4.13)$$

когда коэффициент при входной переменной равен единице:

$$\bar{T} \frac{dx_{\text{вых}}}{dt} + \frac{1}{k} x_{\text{вых}} = x_{\text{вх}}, \quad (4.14)$$

где $\bar{T} = T/k$.

Переменная времени в этих уравнениях после замены $t = T\tau$ может быть также безразмерной.

На основании изложенного составляются уравнения динамики автоматических систем. Каждый функциональный элемент рассматривается отдельно; общей является взаимосвязь элементов, установленная функциональной схемой, поэтому для соседних элементов надо принимать одни и те же обозначения координат (выходная координата предыдущего элемента является входной для последующего).

Чтобы составлять уравнения элементов, надо знать принцип действия, характеристики элемента и его конструкцию.

§ 4.4. Уравнения автоматической системы стабилизации скорости двигателя

В качестве примера составления уравнений динамики автоматической системы рассмотрим систему стабилизации скорости вращения электродвигателя постоянного тока (рис. 4.2). Якорь электродвигателя Δ получает питание от генератора (система $\Gamma - \Delta$); возбуждение генератора осуществляется от ЭМУ поперечного поля, имеющего две обмотки управления: OY_1 и OY_2 . Первая является задающей и имеет неизменное напряжение питания U_0 ; вторая является управляющей и получает питание U_y с выхода электронного усилителя ЭУ, на вход которого поступает разность напряжений

сравнения U_n и тахогенератора $U_{\Gamma\Gamma}$. Возмущающим воздействием является изменение момента сопротивления M_c на валу двигателя. Если скорость вращения равна заданной, то $U_n = -U_{\Gamma\Gamma}$ и на входе ЭУ напряжение отсутствует. В случае отклонения скорости вращения от предписанной на вход ЭУ поступает сигнал, который в конечном итоге так воздействует на якорь двигателя, что устраняется возникшее отклонение

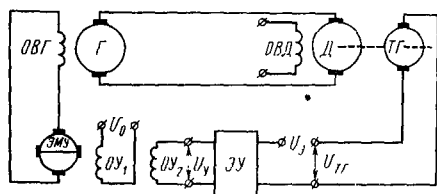


Рис. 4.2

Блок-схема системы управления показана на рис. 4.3. На ней условно изображены все элементы системы и указаны их входные и выходные переменные. При этом можно положить неизменными э. д. с. источника E_0 анодной цепи ЭУ, скорости вращения ЭМУ n_B и генератора n_r , ток возбуждения двигателя $I_{в.д.}$

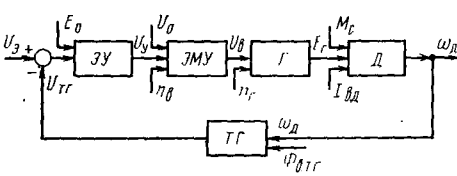


Рис. 4.3

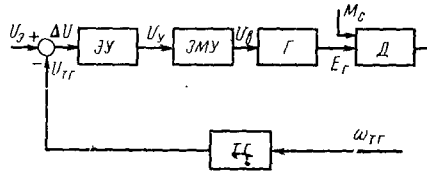


Рис. 4.4

напряжения задающей обмотки U_0 , поток возбуждения тахогенератора $\Phi_{в.гр}$, напряжение источника сравнения U_0 . Разомкнув систему между двигателем и тахогенератором, можно изобразить упрощенную условную схему рассматриваемой разомкнутой системы управления (рис. 4.4). Возмущающим воздействием является изменяющийся во времени момент сопротивления M_c на валу двигателя; управляемой переменной — угловая скорость вращения ω_d двигателя, управляемым объектом — двигатель.

Для каждого элемента этой схемы с учетом принятых допущений составляются уравнения динамики; в некоторых случаях они записываются только в форме конечных приращений, что и сделано в рассматриваемом примере.

Электродвигатель (управляемый объект). Уравнение равновесия моментов

$$M_d - M_c = J d\omega_d / dt. \quad (4.15)$$

Полагая, что момент нагрузки M_c не зависит от ω_d , а M_d зависит от I_a , запишем в конечных приращениях:

$$C_m \Phi_d \Delta I_a - \Delta M_c = J d\Delta\omega_d / dt, \quad (4.16)$$

где Φ_d — магнитный поток возбуждения двигателя; C_m — конструктивный коэффициент; J — момент инерции вала двигателя.

Для якорной цепи двигателя можно записать

$$E_r = r_a I_a + L_a \frac{dI_a}{dt} + C_e \Phi_d \omega_d, \quad (4.17)$$

или, в конечных приращениях,

$$\Delta E_r = r_a \Delta I_a + L_a \frac{d\Delta I_a}{dt} + C_e \Phi_d \Delta \omega_d, \quad (4.18)$$

где $C_e = C_e' \frac{60}{2\pi}$ — конструктивный коэффициент относительно угловой скорости; $C_e' = \frac{p}{a} \cdot \frac{N}{60}$ — конструктивный коэффициент машины; r_a , L_a — сопротивление и индуктивность всей якорной цепи.

Генератор. Для цепи обмотки возбуждения насыщенного генератора при определенных допущениях можно записать

$$U_b = r_b I_b + L_b dI_b / dt,$$

или, в конечных приращениях,

$$\Delta U_b = r_b \Delta I_b + L_b d\Delta I_b / dt, \quad (4.19)$$

где r_b и L_b — сопротивление и индуктивность цепи обмотки возбуждения; U_b и I_b — напряжение и ток обмотки возбуждения.

Уравнение э. д. с. якоря генератора

$$E_{\Gamma} = C_{e\Gamma} \Phi_{\Gamma} n_{\Gamma} = k_{\Gamma} I_{\Gamma},$$

или, в конечных приращениях,

$$\Delta E_{\Gamma} = k_{\Gamma} \Delta I_{\Gamma}, \quad (4.20)$$

где E_{Γ} , $C_{e\Gamma}$, Φ_{Γ} , n_{Γ} — э. д. с., конструктивный коэффициент генератора; магнитный поток возбуждения и скорость вращения; k_{Γ} — коэффициент передачи генератора.

Электромашиный усилитель поперечного поля. При точной компенсации и некоторых допущениях запишем следующие уравнения:
для задающей обмотки управления OY_1

$$U_0 = r_1 I_1 + 2p_Y \sigma \omega_1 d\Phi_Y/dt,$$

или, в конечных приращениях (в общем случае при $U_0 \neq \text{const}$),

$$\Delta U_0 = r_1 \Delta I_1 + 2p_Y \sigma \omega_1 d\Delta\Phi_Y/dt, \quad (4.21)$$

где r_1 и ω_1 — сопротивление и число витков на полюс обмотки управления; I_1 — ток в цепи задающей обмотки; $2p_Y$ — число полюсов обмотки управления; σ — коэффициент рассеивания магнитного потока; Φ_Y — полезный магнитный поток полюсов первой ступени ЭМУ;
для обмотки управления OY_2

$$U_Y = r_Y I_Y + 2p_Y \sigma \omega_Y d\Phi_Y/dt,$$

или, в конечных приращениях,

$$\Delta U_Y = r_Y \Delta I_Y + 2p_Y \sigma \omega_Y d\Delta\Phi_Y/dt, \quad (4.22)$$

где r_Y , ω_Y — сопротивление и число витков на полюс обмотки управления; I_Y — ток в цепи управляющей обмотки.

Уравнение намагничивающих сил по полюсам обмоток управления

$$a_B \Phi_Y = 2\omega_1 I_1 + 2\omega_Y I_Y,$$

или, в конечных приращениях,

$$\Delta a_B \Delta \Phi_Y = 2\omega_1 \Delta I_1 + 2\omega_Y \Delta I_Y, \quad (4.23)$$

где a_B — коэффициент пропорциональности между магнитным потоком и намагничивающей силой первой ступени ЭМУ.

Для э. д. с. поперечной цепи ЭМУ

$$E_{\kappa,3} = C_{eB} n_B \Phi_Y,$$

или, в конечных приращениях,

$$\Delta E_{\kappa,3} = C_{eB} n_B \Delta \Phi_Y, \quad (4.24)$$

где n_B , C_{eB} — скорость вращения и конструктивный коэффициент усилителя; $E_{\kappa,3}$ — э. д. с. на выходе первой ступени.

Уравнение равновесия напряжений короткозамкнутой цепи имеет вид

$$E_{\kappa,3} = r_{\kappa,3} I_{\kappa,3} + L_{\kappa,3} \frac{dI_{\kappa,3}}{dt},$$

или, в конечных приращениях,

$$\Delta E_{\kappa,3} = r_{\kappa,3} \Delta I_{\kappa,3} + L_{\kappa,3} \frac{d\Delta I_{\kappa,3}}{dt}, \quad (4.25)$$

где $r_{\kappa,3}$, $L_{\kappa,3}$ — сопротивление и индуктивность цепи короткозамкнутой щетки; $I_{\kappa,3}$ — ток в цепи короткозамкнутой щетки.

Уравнение э. д. с. выхода ЭМУ

$$U_{в} = k_{к.з} I_{к.з},$$

или, в конечных приращениях,

$$\Delta U_{в} = k_{к.з} \Delta I_{к.з}, \quad (4.26)$$

где $k_{к.з}$ — коэффициент передачи выходной ступени ЭМУ.

Электронный усилитель. Уравнение электронного усилителя

$$U_{у} = k_{э.у} (U_{э} - U_{тг}),$$

или, в конечных приращениях,

$$\Delta U_{у} = k_{э.у} (\Delta U_{э} - \Delta U_{тг}) = k_{э.у} \Delta U, \quad (4.27)$$

где $k_{э.у}$ — коэффициент усиления электронного усилителя.

Тахогенератор. Уравнение э. д. с. якоря тахогенератора

$$U_{тг} = k_{тг} \omega_{тг},$$

или, в конечных приращениях,

$$\Delta U_{тг} = k_{тг} \Delta \omega_{тг}, \quad (4.28)$$

где $k_{тг}$ — коэффициент передачи тахогенератора.

Уравнения (4.15)–(4.28) определяют динамический режим работы системы после появления внешнего воздействия при определенных допущениях. Переходный процесс, характеризующийся изменением скорости двигателя во времени, будет определяться комплексом указанных уравнений.

§ 4.5. О методах решения уравнений динамики

Известно, что динамика любой системы определяется дифференциальными уравнениями входящих в нее элементов. Дифференциальное уравнение n -го порядка, являющееся линейным после линеаризации и приведения к безразмерной форме, можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} a_0 \frac{d^n x_{вых}}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x_{вых}}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx_{вых}}{dt} + a_n x_{вых} = \\ = b_0 \frac{d^m x_{вх}}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x_{вх}}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{dx_{вх}}{dt} + b_m x_{вх} + f(t), \end{aligned} \quad (4.29)$$

где $x_{вых}$ и $x_{вх}$ — относительные величины отклонений выходной и входной переменных; $f(t)$ — возмущающее воздействие.

Определить переходный процесс системы можно различными методами: аналитическим, графическим, с помощью вычислительной техники и др. Если уравнение динамики системы нельзя линеаризовать (в случае существенной нелинейности), то оно решается специальными методами нелинейной теории (см. гл. 13).

Классический метод решения уравнений динамики заключается в получении аналитического выражения общего интеграла для линейного дифференциального уравнения вида (4.29). Общий интеграл (решение) уравнения (4.29) определяется суммой:

$$x_{вых} = x_{вын} + x_{св}, \quad (4.30)$$

где $x_{\text{вых}}$ — общий интеграл, характеризующий изменение выходной переменной во времени; $x_{\text{вын}}$ — частное решение уравнения, определяющее вынужденное установившееся движение; $x_{\text{св}}$ — решение однородного дифференциального уравнения, характеризующее свободное движение.

Составляющие интеграла от свободного и вынужденного движения находятся отдельно. Полагая правую часть в (4.29) равной нулю, получим однородное дифференциальное уравнение

$$a_0 \frac{d^n x_{\text{св}}}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x_{\text{св}}}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx_{\text{св}}}{dt} + a_n x_{\text{св}} = 0. \quad (4.31)$$

Интеграл однородного дифференциального линейного уравнения с постоянными коэффициентами, характеризующий свободное движение (для случая различных вещественных корней), определяется суммой:

$$x_{\text{св}} = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t} + \dots + C_n e^{\alpha_n t} = \sum_{i=1}^n C_i e^{\alpha_i t}, \quad (4.32)$$

где C_i — произвольные постоянные числа; α_i — корни характеристического уравнения.

При этом полагают, что интеграл однородного уравнения равен сумме линейно-независимых частных решений, число которых соответствует порядку уравнения. Корни α_i находятся из характеристического уравнения, составленного по (4.31):

$$a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_{n-1} \alpha + a_n = 0. \quad (4.33)$$

На практике встречаются кратные вещественные и комплексные корни; в этом случае интеграл однородного уравнения будет иметь гармонические и другие составляющие.

Таким образом, по дифференциальному уравнению составляется характеристическое уравнение и определяются его корни одним из алгебраических методов. При этом следует помнить, что для характеристического уравнения высокой степени корни находятся приближенными способами (метод итераций, методы Ньютона, Лобачевского, способ квадратурного и др.). После определения корней с учетом начальных условий вычисляются постоянные числа, входящие в интеграл свободного движения. Состояние системы до приложения возмущений характеризует начальные условия.

Получив закон изменения регулируемой переменной во времени, можно оценить ошибку регулирования системы в динамике. Известно, что ошибка регулирования равна разности между заданным и действительным значениями управляемой переменной

$$\Delta x_{\text{вых}} = X_{\text{н}} - x_{\text{вых}}, \quad (4.34)$$

где $\Delta x_{\text{вых}}$ — ошибка регулирования; $X_{\text{н}}$ — заданное значение управляемой переменной, например номинальное; $x_{\text{вых}}$ — действительное значение управляемой переменной.

Во время переходного процесса системы координата выхода является переменной и определяется вынужденной и свободной составляющими (4.30). Подставив (4.30) в (4.34), получим

$$\Delta x_{\text{вых}} = X_{\text{н}} - x_{\text{вын}} - x_{\text{св}}.$$

Разность между заданным значением и вынужденной составляющей является установившейся ошибкой системы управления:

$$\Delta x_{\text{уст}} = X_{\text{н}} - x_{\text{вын}}.$$

Величина свободной составляющей процесса называется *переходной*, или *динамической, ошибкой управления*:

$$\Delta x_{\text{п}} = -x_{\text{св}}.$$

Следовательно,

$$\Delta x_{\text{вых}} = \Delta x_{\text{уст}} + \Delta x_{\text{п}}.$$

Решение дифференциальных уравнений высокого порядка классическим методом вызывает значительные трудности из-за необходимости определения корней характеристического уравнения и постоянных интегрирования, поэтому часто интеграл дифференциального уравнения находят с помощью операторного метода Лапласа.

§ 4.6. Формулы прямого и обратного преобразований Фурье и Лапласа

Всякая функция, удовлетворяющая условиям Дирихле и являющаяся периодической с периодом T , для которого $f(t \pm T) = f(t)$ в интервале от $-\infty$ до $+\infty$, может быть разложена в ряд Фурье:

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t), \quad (4.35)$$

где k — целое положительное число; $\omega_k = (2\pi/T)k$ — частота k -й гармоники; A_0 , A_k , B_k — коэффициенты, определяемые по формулам:

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) dt; \quad (4.36)$$

$$A_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \cos \omega_k t dt; \quad (4.37)$$

$$B_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \sin \omega_k t dt. \quad (4.38)$$

Ряд (4.35) записан в тригонометрической форме. В теории автоматического управления применяют формулы прямого и обратного преобразований Фурье, используемые для непериодических функций:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt; \quad \text{— прямое} \quad (4.39)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega; \quad \text{— обратное} \quad (4.40)$$

где $F(j\omega)$ — изображение в форме Фурье; $f(t)$ — оригинал функции.

Если в (4.39) ввести под интеграл показательную функцию $e^{-\sigma t}$, то можно получить новую функцию комплексного переменного $p = \sigma + j\omega$. При этом интеграл будет называться *прямым преобразованием Лапласа*:

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-pt} dt. \quad (4.41)$$

Аналогично вместо (4.40) можно получить интеграл *обратного преобразования Лапласа*:

$$f(t) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} F(p) e^{pt} dp. \quad (4.42)$$

Преобразование Лапласа обладает рядом свойств, использование которых облегчает решение практических задач. Эти свойства и теоремы преобразования Лапласа рассматриваются в учебных пособиях по операционному исчислению. Важное значение имеют также теоремы о начальном и конечном значениях функции, а также формулы разложения Хевисайда.

§ 4.7. Понятие о составлении операторных уравнений автоматических систем

При составлении операторных уравнений по дифференциальным уравнениям элементов системы необходимо знать начальные условия. Если задано дифференциальное уравнение первого порядка

$$T \frac{dx_{\text{вых}}(t)}{dt} + x_{\text{вых}}(t) = kx_{\text{вх}}(t), \quad (4.43)$$

то операторное уравнение будет иметь вид:

$$TpX_{\text{вых}}(p) + X_{\text{вых}}(p) = kX_{\text{вх}}(p) + Tx_{\text{вых}}(0). \quad (4.44)$$

Если начальные условия нулевые (что обычно имеет место при использовании уравнений в конечных приращениях), то операторное уравнение будет состоять из относительно производных и инте-

гралов функций путем замены знака производной и интеграла оператором:

$$\frac{d}{dt} = p; \quad \frac{d^2}{dt^2} = p^2; \dots; \quad \frac{d^n}{dt^n} = p^n; \quad \int_0^t dt = \frac{1}{p}. \quad (4.45)$$

Для автоматической системы, состоящей из ряда элементов, можно записать систему дифференциальных уравнений и, применяя к ним преобразование Лапласа, получить систему операторных уравнений элементов. Разрешая эти уравнения относительно выбранной переменной, записывают операторное уравнение автоматической системы:

$$\begin{aligned} & (a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) X_{\text{вых}}(p) = \\ & = (b_0 p^m + \dots + b_{m-1} p + b_m) X_{\text{вх}}(p) + (c_0 p^r + \dots + c_{r-1} p + c_r) Z(p). \end{aligned} \quad (4.46)$$

Из этого уравнения при заданных входном воздействии $x_{\text{вх}}(t)$ и возмущении $z(t)$ получают операторное изображение для выходной переменной

$$X_{\text{вых}}(p) = \frac{B(p) X_{\text{вх}}(p) + C(p) Z(p)}{A(p)}, \quad (4.47)$$

где $B(p)$, $C(p)$, $A(p)$ — операторные полиномы от комплексной переменной p ; степень полинома $A(p)$ обычно выше степеней полиномов $B(p)$ и $C(p)$.

Оригинал функции времени $x_{\text{вых}}(t)$ [см. (4.47)] находят, используя обратное преобразование Лапласа отдельно для каждого воздействия (принцип наложения). Для облегчения решения этой задачи, как и при определении изображений для типовых функций, применяют таблицы изображений. Но чаще бывает, что правая часть (4.47) является правильной дробью, состоящей из многочленов. При этом либо разлагают эту дробь на простейшие (применяя обычные методы разложения многочленов), для каждой составляющей определяют составляющую оригинала, а потом их складывают, либо применяют формулы разложения Хевисайда.

Вопросы для самопроверки

1. Какие основные вопросы рассматриваются при исследовании динамики систем?
2. Какие уравнения элементов используются при определении динамики систем?
3. Что такое параметры и обобщенные координаты (переменные) автоматической системы?
4. Запишите в общем виде уравнение динамики системы.
5. Что характеризуют статическая и переходная ошибки системы?
6. Как производится линеаризация уравнений динамики?
7. Каким образом можно получить нулевые начальные условия для уравнений динамики линейных систем?
8. Напишите формулы рядов Тейлора относительно приращений аналитической функции для случаев ее зависимости от одной и двух переменных.

9. Каким образом составляется безразмерное уравнение и как различить формы нормализации?

10. Поясните порядок решения дифференциальных уравнений динамики систем классическим и операторным методами.

11. Какова взаимосвязь между корнями и постоянными времени экспоненциальных составляющих?

12. В чем состоит особенность применения операторного метода при решении уравнений динамики систем?

Глава 5

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ АНАЛИЗА ДИНАМИКИ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В настоящей главе вводятся понятия о передаточной и частотной функциях и о частотных характеристиках, необходимых для расчета динамики автоматических систем частотным методом. Основой частотного метода являются преобразования Лапласа и Фурье. Частотный метод используется для расчета как линейных, так и некоторых нелинейных систем.

§ 5.1. Понятие о передаточной и частотной функциях линейных систем

Применяя прямое преобразование Лапласа к функциям вещественного переменного, можно получить операторное уравнение (для нулевых начальных условий):

$$A(p) X_{\text{вых}}(p) = B(p) X_{\text{вх}}(p) + C(p) Z(p). \quad (5.1)$$

Используя уравнение (5.1), введем понятие о передаточной функции. Если применить при этом принцип суперпозиции для линейной системы, то из (5.1) получим передаточные функции для задающего и возмущающего воздействий:

$$K(p) = X_{\text{вых}}(p)/X_{\text{вх}}(p) = B(p)/A(p); \quad (5.2)$$

$$K_z(p) = X_{\text{вых}}(p)/Z(p) = C(p)/A(p). \quad (5.3)$$

Передаточная функция определяется как отношение изображения выходной переменной к изображению входной переменной при нулевых начальных условиях. Различают передаточные функции звена (элемента), разомкнутой и замкнутой систем. В общем случае передаточная функция равна отношению операторного полинома, стоящего при входной переменной, к операторному полиному, стоящему при выходной переменной операторного уравнения.

Это определение показывает, что передаточная функция зависит не от вида задающего или возмущающего воздействия, а от параметров функциональных элементов, составляющих автоматическую систему. Передаточная функция иногда называется *динамическим коэффициентом усиления*.

Частотные методы основаны на рассмотрении частотных характеристик отдельных элементов (регулятора, объекта, усилителя и т. д.) и всей системы. Размыкая главную обратную связь линейной системы автоматического управления (рис. 5.1) и подавая на вход системы воздействие синусоидальной формы, получим в установившемся режиме на выходе системы гармоническую функцию той же частоты, но другой амплитуды и фазы.

Анализируя гармонические сигналы на входе и выходе разомкнутой системы, можно установить ее свойства, которые характеризуются частотной функцией

$$K(j\omega) = B(j\omega)/A(j\omega) = X_{\text{вых}}(j\omega)/X_{\text{вх}}(j\omega). \quad (5.4)$$

Функция $K(j\omega)$ называется *комплексной частотной функцией*, или просто *частотной функцией*, разомкнутой системы. Она зависит от параметров элементов, составляющих автоматическую систему, и от частоты. Частотная функция получается путем замены в выражении передаточной функции (5.2) комплексной переменной p на $j\omega$. Указанная замена равносильна

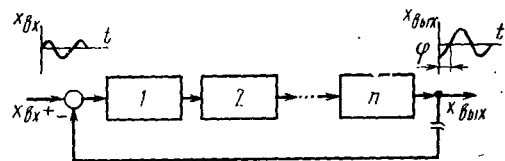


Рис. 5.1

переходу к преобразованию Фурье для дифференциальных уравнений при нулевых начальных условиях. Частотная функция представляет собой комплексный коэффициент усиления для установившегося вынужденного периодического движения и определяется выражением (5.4).

Освобождаясь от мнимого числа в знаменателе (5.4), получим

$$K(j\omega) = \frac{B(j\omega) \bar{A}(j\omega)}{A(j\omega) \bar{A}(j\omega)} = P_p(\omega) + jQ_p(\omega), \quad (5.5)$$

где $\bar{A}(j\omega)$ — сопряженная комплексная величина знаменателя; $P_p(\omega)$ и $Q_p(\omega)$ — вещественная и мнимая части частотной функции разомкнутой системы.

Представляя комплексную величину в показательной форме, вместо (5.5) можно записать

$$K(j\omega) = A_p(\omega) e^{j\varphi_p(\omega)}, \quad (5.6)$$

где

$$A_p(\omega) = |K(j\omega)| = \sqrt{P_p^2(\omega) + Q_p^2(\omega)}; \quad (5.7)$$

$$\varphi_p(\omega) = \arctg [Q_p(\omega)/P_p(\omega)]. \quad (5.8)$$

В (5.7) и (5.8) $A_p(\omega)$ и $\varphi_p(\omega)$ — соответственно модуль и аргумент комплексной величины, указывающие величину и направление вектора $K(j\omega)$ на комплексной плоскости (рис. 5.2, а).

Модуль частотной функции представляет собой отношение амплитуд на выходе и входе, поэтому его можно охарактеризовать как

коэффициент усиления по амплитуде при данной частоте. Каждой частоте будет соответствовать определенное значение модуля и аргумента, т. е. амплитуды и фазы. При этом амплитуда и фаза выходной переменной целиком определяются частотной функцией. Она характеризует способность элементов или системы передавать гармонические колебания с входа на выход (указывает на увеличение или уменьшение амплитуды на выходе при наличии или отсутствии сдвига по фазе по отношению к амплитуде и фазе входного сигнала).

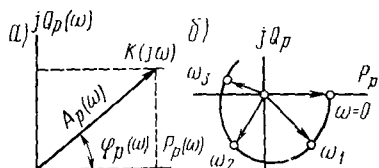


Рис. 5.2

Аналогично частотной функции разомкнутой системы можно рассмотреть частотные функции замкнутой системы:

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = A_p(\omega) e^{j\varphi_a(\omega)} \quad (5.9)$$

Частотные функции широко используются в автоматике для определения переходных процессов и устойчивости системы. Если используется отношение входной переменной к выходной, то получается обратная частотная функция. Ее аналитическое выражение в ряде случаев оказывается проще и удобнее для всех последующих преобразований, так как во всяком реальном звене степень полинома числителя $B(p)$ меньше степени полинома знаменателя $A(p)$. Обратная частотная функция

$$K^{-1}(j\omega) = A(j\omega)/B(j\omega) = 1/K(j\omega). \quad (5.10)$$

§ 5.2. Амплитудно-фазовые характеристики

Значения частотных функций $K(j\omega)$ и $W(j\omega)$ при определенных частотах можно представить в виде векторов на комплексной плоскости (см. рис. 5.2, а) соответственно выражениям (5.5), (5.6) и (5.9).

Геометрическое место концов векторов частотной функции при различных частотах определяет частотную характеристику (рис. 5.2, б), которая представляет собой амплитудно-фазовую частотную характеристику (АФХ) автоматической системы. Ее рассчитывают по формулам частотных функций (5.5)–(5.9). АФХ разомкнутой системы обычно используется для исследования устойчивости линейных (гл. 8) и нелинейных систем, а также для определения параметров автоколебаний нелинейных систем (гл. 13).

Зависимость амплитуды от частоты называется *амплитудной частотной характеристикой*

$$A_p(\omega) = \sqrt{P_p^2(\omega) + Q_p^2(\omega)}, \quad (5.11)$$

где $P_p(\omega) = A_p(\omega) \cos \varphi_p(\omega)$ — вещественная, или активная, частотная характеристика разомкнутой системы; $Q_p(\omega) = A_p(\omega) \times \sin \varphi_p(\omega)$ — мнимая, или реактивная, частотная характеристика разомкнутой системы.

Аналогичные характеристики могут быть получены и для замкнутой системы:

$$A_z(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}, \quad (5.12)$$

где $P(\omega) = A_z(\omega) \cos \varphi_z(\omega)$; $Q(\omega) = A_z(\omega) \sin \varphi_z(\omega)$.

Вещественная и мнимая частотные характеристики могут быть построены самостоятельно и имеют важное значение в теории автоматического управления.

Зависимость фазы от частоты называется *фазовой частотной характеристикой* разомкнутой системы

$$\varphi_p(\omega) = \arctg [Q_p(\omega)/P_p(\omega)]; \quad (5.13a)$$

замкнутой системы

$$\varphi_z(\omega) = \arctg [Q(\omega)/P(\omega)]. \quad (5.13б)$$

Между всеми указанными частотными характеристиками существует непосредственная связь, вытекающая из тригонометрических соотношений, характеризующих вектор частотной функции (см. рис. 5.2, а). Каждая из этих частотных характеристик соответствующим образом определяет свойства системы или элементов.

Примерный (наиболее общий) вид частотных характеристик автоматической системы показан на рис. 5.3, где сплошные линии соответствуют замкнутой, а штриховые — разомкнутой системе. На рис. 5.3, а показаны амплитудные; на рис. 5.3, б — фазовые частотные характеристики; на рис. 5.3, в и г — соответственно вещественные и мнимые частотные характеристики. В связи с тем что выходная переменная обычно отстает от входной, угол является отрицательным. Частотные характеристики, полученные в результате использования преобразования Лапласа для дифференциальных уравнений, имеют тесную связь с переходным процессом, т. е. с оригиналом функции. В теории автоматического управления обычно рассматривается случай нулевых начальных условий. Определенная связь между частотными и переходными функциями широко используется при исследовании качества процесса управления автоматических систем (см. гл. 10, 12).

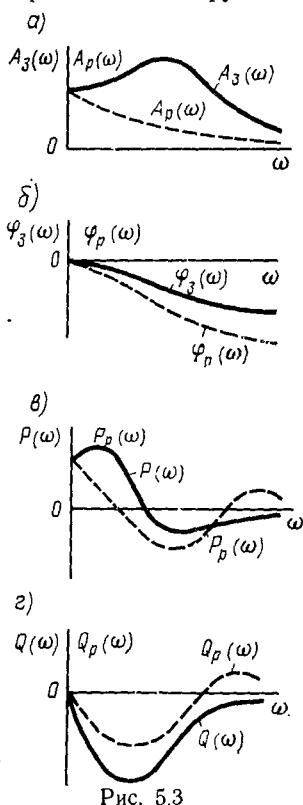


Рис. 5.3

Частотные характеристики могут быть построены и для отрицательных частот, что имеет чисто математический, а не физический смысл. Как это следует из (5.5), например, вещественная часть частотной функции $K(j\omega)$ является четной функцией частоты, поэтому при отрицательных частотах она будет иметь ту же величину, что и при положительных частотах. Мнимая часть частотной функции является нечетной функцией частоты, поэтому при отрицательных частотах она будет иметь другой знак:

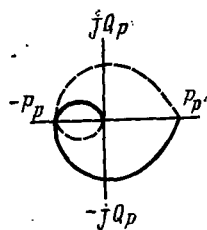


Рис. 5.4

$$\left. \begin{aligned} P_p(+\omega) &= P_p(-\omega); \\ Q_p(+\omega) &= -Q_p(-\omega). \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

На основании (5.14) можно заключить, что амплитудно-фазовые характеристики при положительных и отрицательных частотах симметричны относительно вещественной оси (рис. 5.4), поэтому АФХ обычно строятся только для положительных частот.

Следует отметить, что в практике исследования, например нелинейных автоматических систем, применяются отрицательные АФХ, построенные для положительных частот (все их векторы повернуты на 180°).

Частотные характеристики, построенные по (5.10), называются обратными; обратные АФХ также строятся только для положительных частот. В случае использования отрицательных обратных АФХ все векторы обратной характеристики надо повернуть на 180° .

§ 5.3. Логарифмические частотные характеристики

Построение частотных характеристик звеньев, и в особенности системы (как показано ниже), значительно упрощается, если прологарифмировать выражение для частотной функции, представленной в показательной форме (5.6):

$$\ln K(j\omega) = \ln A(\omega) + j\varphi(\omega), \quad (5.15)$$

или

$$\lg K(j\omega) = \lg A(\omega) + j\varphi(\omega)/2,3. \quad (5.16)$$

Выражение (5.16) определяет логарифмическую амплитудно-фазовую частотную характеристику, у которой вещественная часть равна логарифму модуля частотной функции, а мнимая часть — аргументу частотной функции. Эта характеристика может быть представлена двумя самостоятельными характеристиками — логарифмической амплитудной и фазовой частотными характеристиками.

Логарифмическая амплитудная характеристика (ЛАХ). Эта характеристика определяет изменение логарифма модуля частотной функции при изменении частоты. На графике обычно используют

арифмическую сетку; логарифм модуля откладывают по оси ординат, а логарифм частоты — по оси абсцисс (рис. 5.5):

$$G(\omega) = 20 \lg |K(j\omega)| = 20 \lg A(\omega) = f(\lg \omega). \quad (5.17)$$

Так как (5.17) определяет логарифм отношения амплитуды на выходе к амплитуде на входе и характеризует степень усиления системой данного сигнала, то эту величину измеряют в единицах, принятых усиительных устройств. Однако логарифмическая единица *бел* кажется слишком крупной, поэтому величина $G(\omega)$ выражается

децибелах. Бел представляет собой логарифмическую единицу, соответствующую десятикратному увеличению мощности. Децибел равен одной десятой части бела. Если бы $A(\omega)$ было отношением мощностей, то логарифм амплитуды должен был стоять множитель 10. Так как $A(\omega)$ представляет собой отношение напряжений, то увеличение этого отношения в десять раз будет соответствовать увеличению мощности в сто раз, что соответствует умножению на двадцать децибелам. Это и определяет величину множителя в (5.17), равного 20.

Один децибел соответствует изменению амплитуды в $10^{0.05}$ раз.

Для оценки диапазона частот при построении логарифмических характеристик используют единицы, применяемые в акустике — *октаву* и *декаду* (см. рис. 5.5).

Если величины двух частот ω_n и ω_i отличаются друг от друга в два раза, то говорят, что они отличаются на одну октаву:

$$\omega_n / \omega_i = 2,$$

и

$$\log_2 (\omega_n / \omega_i) = \log_2 2 = 1 \text{ окт.}$$

Если величины двух частот отличаются друг от друга в 10 раз, говорят, что они отличаются на декаду:

$$\omega_n / \omega_i = 10,$$

и

$$\lg (\omega_n / \omega_i) = \lg 10 = 1 \text{ дек.}$$

Для определения частоты в декадах следует найти десятичный логарифм от данной частоты.

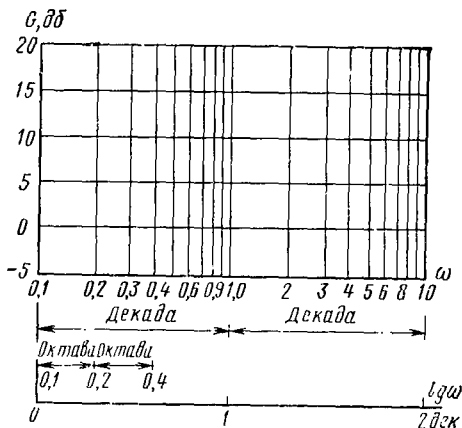


Рис. 5.5

Иногда используется координатная логарифмическая сетка, по оси абсцисс которой откладывается в логарифмическом масштабе частота (см. рис. 5.5), а по оси ординат — логарифм модуля частотной функции, т. е. логарифм отношения амплитуд выхода и входа.

Логарифмическая фазовая характеристика (ЛФХ). Эта характеристика определяет изменение фазы в градусах при изменении частоты. Величина фазы в градусах откладывается по оси ординат соответственно выражению (5.13), а по оси абсцисс откладывается частота в логарифмическом масштабе.

Для ряда реальных автоматических систем существует однозначная зависимость между ЛАХ и ЛФХ. Следовательно, по известной ЛАХ можно построить ЛФХ. Такие системы называются *минимально-фазовыми*, поскольку ЛФХ, соответствующая заданной ЛАХ, имеет наименьшее значение фазы.

Логарифмические фазовые и амплитудные частотные характеристики обычно совмещают на одном графике с общей осью абсцисс.

Удобство логарифмических характеристик заключается в том, что ЛАХ можно аппроксимировать отрезками прямых (асимптотами), имеющими различные наклоны. Наклоны этих отрезков обычно выражаются в децибелах на декаду или в децибелах на октаву. Кроме того, для построения ЛАХ используются простые выражения, так как в результате логарифмирования модуля частотной функции (5.17) произведения и частные от деления заменяются суммами и разностями и т. д.

При расчете автоматических систем в ряде случаев используется также логарифмическая АФХ, с помощью которой по специальным номограммам можно определить вещественную частотную характеристику замкнутой системы $P(\omega)$. Логарифмические частотные характеристики используются при расчете как линейных, так и нелинейных автоматических систем.

Вопросы для самопроверки

1. Приведите определение передаточной функции.
2. Каким образом можно получить передаточную и частотную функции?
3. Укажите основные формы записи частотных функций разомкнутой и замкнутой систем.
4. Что характеризуют частотные функции разомкнутой и замкнутой системы?
5. Как построить амплитудно-фазовую характеристику?
6. Как построить амплитудную, фазовую, минимую и вещественную частотные характеристики разомкнутой и замкнутой систем?
7. Какие частотные характеристики обычно рассматриваются при исследовании систем?
8. С какой целью введено понятие логарифмических частотных характеристик?
9. Какие единицы измерения применяют для логарифмических амплитудных и фазовых характеристик?
10. Какие преимущества имеет логарифмический способ построения частотных характеристик?

ТИПОВЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ЗВЕНЬЯ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Современные автоматические системы состояются из разнообразных по конструктивному исполнению и по виду используемой энергии элементов, выполняющих определенные функции, которые при анализе динамики системы представляются типовыми звеньями.

§ 6.1. Классификация звеньев

Классификация звеньев возможна по различным признакам. Все элементы автоматических систем в зависимости от их характеристик в установившихся и переходных режимах можно разделить на определенные группы простейших звеньев. В данной главе рассмотрено разделение простейших звеньев на типовые звенья по их свойствам в установившихся и в переходных режимах.

Рассматривая характер зависимости между установившимися значениями входной и выходной переменных, все элементы можно разделить на три основных группы простейших звеньев (рис. 6.1)—усилительные, интегрирующие и дифференцирующие.

Для усилительных звеньев существует зависимость между входной и выходной переменными

$$X_{\text{вых}} = f_{\text{ст}}(X_{\text{вх}}).$$

Для интегрирующих звеньев существует зависимость между выходной переменной и интегралом входной переменной по времени

$$X_{\text{вых}} = k_{\text{а}} \int X_{\text{вх}} dt.$$

Для дифференцирующих звеньев существует зависимость между выходной переменной и производной изменения входной переменной

$$X_{\text{вых}} = k_{\text{д}} dx_{\text{вх}}/dt.$$

Рассматривая переходные характеристики $x_{\text{вых}}(t)$ простейших звеньев, можно объединить простейшие звенья, подобные по динамическим свойствам, в группы, называемые *типовыми звеньями*. На практике встречается небольшое количество типовых элементарных звеньев.

Объединение элементов, различных по своим физическим свойствам, в одну группу типовых звеньев возможно в связи с тем, что динамика различных по физической природе элементов математически может быть описана одинаковыми дифференциальными уравнениями. При этом принято, что порядок дифференциальных уравнений

типовых элементарных звеньев не превышает второй степени. По динамическим свойствам простейшие звенья могут быть подразделены на идеальные (безынерционные), инерционные и звенья с запаздыванием. Кроме того, указанные звенья могут быть подразделены на устойчивые и неустойчивые, на минимально-фазовые и неминимально-фазовые (см. рис. 6.1).

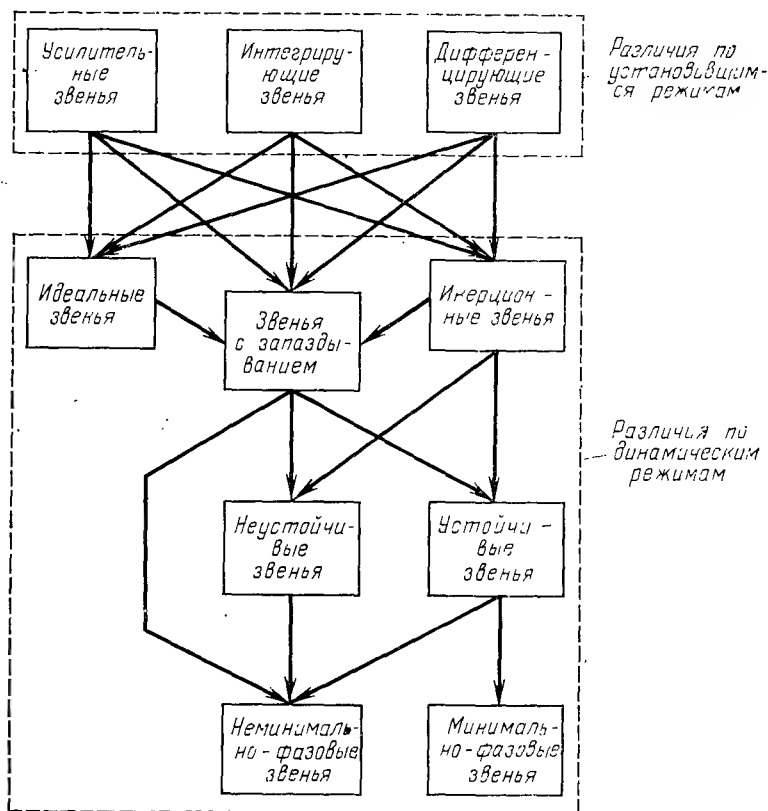


Рис. 6.1

Понятие о неустойчивых звеньях введено в связи с тем, что свободное движение некоторых звеньев является незатухающим [$\lim_{t \rightarrow \infty} x_{св}(t) \rightarrow \infty$]. Такие звенья являются неустойчивыми. Неустойчивые звенья и звенья с запаздыванием являются неминимально-фазовыми звеньями, поскольку у них фаза больше (не минимальна) по величине по сравнению с фазой подобных им устойчивых звеньев и звеньев без запаздывания. Для минимально-фазовых звеньев существует однозначная зависимость между амплитудной и фазовой частотными характеристиками.

Кроме указанной классификации возможно разделение простейших звеньев на линейные и нелинейные и др.*.

В данной главе рассмотрены следующие типовые линейные звенья**: идеальные (безынерционные); инерционные первого и второго порядка; интегрирующие (астатические); консервативные; дифференцирующие; звенья с запаздыванием; неминимально-фазовые.

Для анализа характеристик типовых звеньев используются уравнения динамики, которые обычно записываются в стандартном виде: слева выходная переменная $x_{\text{вых}}$ и ее производные с соответствующими коэффициентами, справа — входная переменная $x_{\text{вх}}$ и ее производные с соответствующими коэффициентами.

В зависимости от вида внешнего воздействия на входе звена различают переходные характеристики звена (при скачкообразном воздействии), импульсные переходные характеристики (при импульсном воздействии) и частотные характеристики звена (при гармонических воздействиях различных частот).

Анализ типовых звеньев производится по переходным (временным) характеристикам при единичном входном воздействии (переходный процесс) и по частотным характеристикам при гармоническом входном воздействии единичной амплитуды. Характеристики типовых звеньев приведены в табл. 6.1.

§ 6.2. Идеальное (безынерционное) звено

Уравнение динамики идеального звена имеет вид

$$x_{\text{вых}}(t) = kx_{\text{вх}}(t), \quad (6.1)$$

где k — коэффициент усиления (или передачи), который является постоянным для линейного звена и переменным для нелинейного звена.

Переходная характеристика таких звеньев аналогична по форме входному сигналу (см. табл. 6.1, п. I, графу 2).

Операторное уравнение безынерционного звена запишется как

$$X_{\text{вых}}(p) = kX_{\text{вх}}(p). \quad (6.2)$$

Передаточная функция идеального звена

$$K(p) = X_{\text{вых}}(p)/X_{\text{вх}}(p) = k. \quad (6.3)$$

Частотная функция получается заменой p в выражении (6.3) на $j\omega$:

$$K(j\omega) = k. \quad (6.4)$$

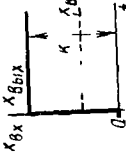
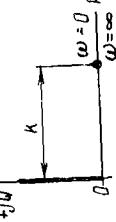
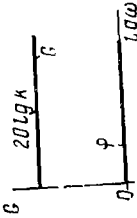
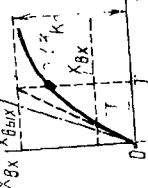
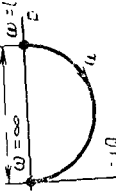
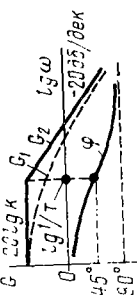
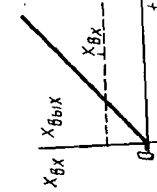
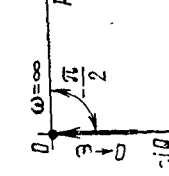
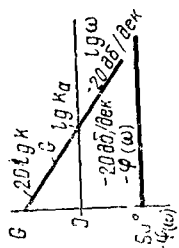
ЛАХ звена определяется выражением

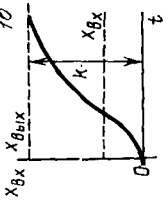
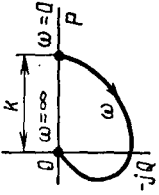
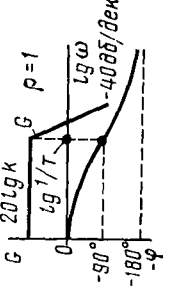
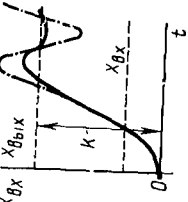
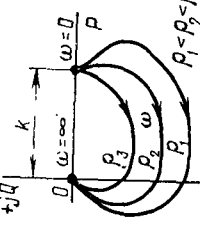
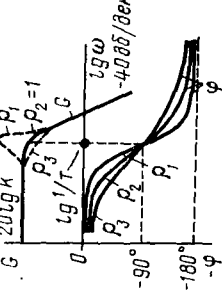
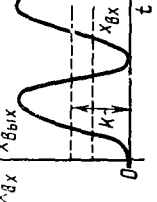
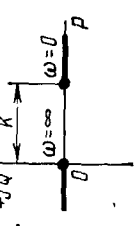
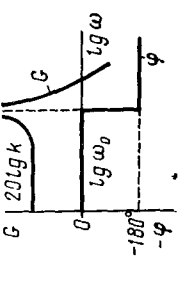
$$G = 20 \lg k.$$

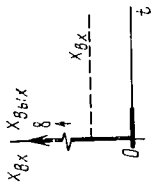
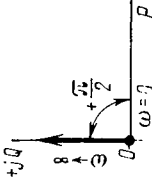
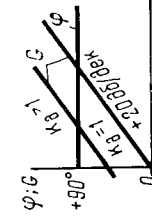
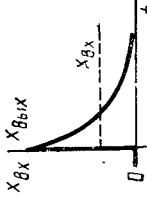
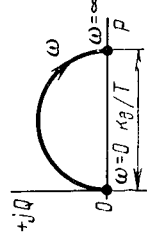
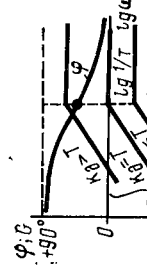
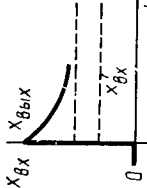
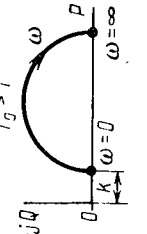
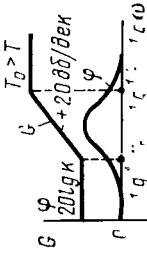
* Существует также классификация элементарных звеньев в зависимости от выполняемых операций — формирующие (пропорциональные, модуляционные, импульсные и т. п.); арифметические (суммирующие, множительные и т. п.); логические (И, ИЛИ, НЕ и т. п.).

** Характеристики линейных звеньев приведены в гл. 13.

Характеристики типовых звеньев

Пункт	Название звена	Переходные характеристики при $X_{вх}(t) = 1(t)$	Амплитудно-фазовые частотные характеристики	Логарифмические частотные характеристики
	1	2	3	4
I	Идеальное (безынерционное)			
II	Апериодическое (инерционное) первого порядка			
III	Интегрирующее			

Пункт	Название звена	Переходные характеристики при $x_{вх}(t) = 1(t)$	Амплитудно-фазовые частотные характеристики	Логарифмические частотные характеристики
	1	2	3	4
IV	Апериодическое (инерционное) второго порядка			
V	Колебательное			
VI	Консервативное			

Пункт	Название звена	Переходные характеристики при $x_{вх}(t) = 1(t)$	Амплитудно-фазовые частотные характеристики	Логарифмические частотные характеристики
	I	2	3	4
VII	Идеальное дифференцирующее			
VIII	Реальное дифференцирующее без статизма			
IX	Реальное дифференцирующее со статизмом			

Пункт	Название звена	Переходные характеристики при $x_{BX}(t) = 1(t)$	Амплитудно-фазовые частотные характеристики	Логарифмические частотные характеристики
	1	2	3	4
X	Несминимально-фазовое звено			
XI	Звено с запаздыванием			

Частотные характеристики звена показаны в табл. 6.1, п. I, графы 3 и 4. Фаза данного звена минимальна и равна нулю; звено является минимально-фазовым.

Примерами конструктивного выполнения идеального звена могут быть: жесткий механический рычаг, механический редуктор, потенциометр, электронная усилительная лампа, полупроводниковый триод и др., если уравнения их динамики можно представить уравнением вида (6.1).

§ 6.3. Инерционное (апериодическое) звено первого порядка

Уравнение динамики инерционного звена первого порядка имеет вид

$$T \frac{dx_{\text{вых}}}{dt} + x_{\text{вых}} = kx_{\text{вх}}, \quad (6.5)$$

где T — постоянная времени, обусловленная наличием массы, момента инерции, индуктивности, емкости и т. д.; k — коэффициент усиления (или передачи).

Применяя к (6.5) преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях, получим операторное уравнение

$$(Tp + 1) X_{\text{вых}}(p) = kX_{\text{вх}}(p). \quad (6.6)$$

Переходная функция звена

$$x_{\text{вых}}(t) = k(1 - e^{-t/T}). \quad (6.7)$$

Переходная характеристика инерционного звена первого порядка, построенная по (6.7) при единичном входном воздействии, представляет собой экспоненциальную кривую (см. табл. 6.1, п. II, графу 2).

Передаточная функция инерционного звена первого порядка на основании (6.6) запишется как

$$K(p) = k/(1 + Tp). \quad (6.8)$$

Частотная функция звена первого порядка получается путем замены p на $j\omega$ в выражении (6.8):

$$K(j\omega) = k/(1 + j\omega T), \quad (6.9)$$

или

$$K(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}, \quad (6.10)$$

где

$$P(\omega) = k/(1 + \omega^2 T^2); \quad (6.11)$$

$$Q(\omega) = -\omega T k/(1 + \omega^2 T^2); \quad (6.12)$$

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}; \quad (6.13)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg [Q(\omega)/P(\omega)] = \arctg (-\omega T). \quad (6.14)$$

АФХ звена строится по (6.10) и показана в табл. 6.1, п. II, графе 3.

Чтобы построить логарифмическую амплитудную частотную характеристику, необходимо определить логарифмическую функцию амплитуды в децибелах из (6.13):

$$G = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg \left| \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \right|, \quad (6.15)$$

или

$$G = 20 \lg k - 20 \lg (1 + \omega^2 T^2)^{1/2}. \quad (6.16)$$

Точное построение G заключается в последовательном определении значений $G(\omega)$ при различных частотах ω . Построение ЛАХ обычно упрощают, заменяя точную G_1 асимптотами. Первая асимптота характеризует G'_2 при малых частотах, когда величиной $\omega^2 T^2$ можно пренебречь, т. е. принимают

$$G'_2 \approx 20 \lg k - 20 \lg 1 \approx 20 \lg k. \quad (6.17)$$

Эта асимптота не зависит от частоты. Вторая асимптота характеризует G''_2 при больших частотах, когда $\omega^2 T^2 \gg 1$, т. е. принимают

$$G''_2 \approx 20 \lg k - 20 \lg \omega T. \quad (6.18)$$

Эта асимптота зависит от частоты. Если принять приращение частоты на одну декаду ($\omega_2 = 10 \omega_1$), то амплитуда в децибелах изменится на величину

$$\Delta G'_2 = -20 \lg 10 \omega_1 T + 20 \lg \omega_1 T = -20 \lg 10 = -20 \text{ дБ/дек.}$$

Следовательно, для второй асимптоты известен наклон, характеризующий убывание амплитуды на 20 дБ при возрастании частоты на 1 дек. Точка сопряжения обеих асимптот будет удовлетворять равенствам (6.17) и (6.18), т. е.

$$20 \lg k = 20 \lg \omega_c T,$$

откуда

$$\omega_c = 1/T.$$

Величина ω_c определяется постоянной времени инерционного звена первого порядка и называется *сопрягающей частотой*.

На основании изложенного можно сформулировать следующий порядок построения ЛАХ инерционного звена первого порядка, имеющего коэффициент усиления k (см. табл. 6.1, п. II, графу 4): 1) определяется логарифм амплитуды частотной функции звена в децибелах; 2) рассчитывается сопрягающая частота; 3) проводится горизонтальная прямая до точки сопрягающей частоты; 4) проводится прямая с наклоном — 20 дБ/дек (или — 6 дБ/окт) после точки сопрягающей частоты от конца горизонтального участка ЛАХ.

Максимальное отклонение асимптотической ЛАХ G_2 от действительной G_1 равно 3 дБ при частоте сопряжения ω_c и незначительно при других частотах.

Логарифмическая фазо-частотная характеристика инерционного звена первого порядка

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \omega T = -\operatorname{arctg} (\omega/\omega_c).$$

Для сопрягающей частоты фаза

$$\varphi(\omega_c) = -\operatorname{arctg} (\omega_c/\omega_c) = -\operatorname{arctg} 1 = -45^\circ.$$

Логарифмическую фазо-частотную характеристику целесообразно строить по шаблонам или по точкам относительно ординаты сопрягающей частоты (для одной ветви):

при $\lg \omega_c$	$\varphi = -45^\circ$;
при $\lg \omega_c - 0,25 \text{ дек}$	$\varphi = -29^\circ$;
при $\lg \omega_c - 0,6 \text{ дек}$	$\varphi = -14^\circ$;
при $\lg \omega_c - 1 \text{ дек}$	$\varphi = -6^\circ$;
при $\lg \omega_c - 2 \text{ дек}$	$\varphi = -0,5^\circ$.

Поскольку кривая логарифмической фазо-частотной характеристики симметрична относительно ординаты, проходящей через точку сопрягающей частоты, то вторую ветвь можно провести из условия симметрии (см. табл. 6.1, п. II, графу 4). Звено является минимально-фазовым; значение фазы является минимальным для данного типа звеньев.

Примерами инерционного звена первого порядка являются: пассивные четырехполюсники, состоящие из сопротивления и индуктивности или из сопротивления и емкости; термopapa, а также (при определенных допущениях) магнитный усилитель; генераторы постоянного и переменного тока; электрические двигатели (если вход — ток якоря, а выход — угловая скорость) и т. д., если уравнения их динамики можно представить в виде (6.5).

§ 6.4. Интегрирующее звено

Уравнение динамики интегрирующего звена имеет вид

$$dx_{\text{вых}}/dt = k_a x_{\text{вх}}(t), \quad (6.19)$$

или

$$x_{\text{вых}}(t) = k_a \int_0^t x_{\text{вх}}(t) dt,$$

где k_a — коэффициент пропорциональности.

Применяя к (6.19) преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях, получим операторное уравнение для интегрирующего звена

$$X_{\text{вых}}(p) = (k_a/p) X_{\text{вх}}(p). \quad (6.20)$$

Переходная характеристика интегрирующего звена при единичном входном воздействии представляет собой прямую линию, исходящую из начала координат (см. табл. 6.1, п. III, графу 2).

Передаточная функция интегрирующего звена на основании (6.20) имеет вид:

$$K(p) = k_a/p. \quad (6.21)$$

Частотная функция интегрирующего звена получается заменой p на $j\omega$ в выражении (6.21):

$$K(j\omega) = k_a/j\omega = -jk_a/\omega, \quad (6.22)$$

или

$$K(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}, \quad (6.23)$$

где

$$\left. \begin{aligned} P(\omega) &= 0; \\ Q(\omega) &= -k_a/\omega; \end{aligned} \right\} \quad (6.24)$$

$$\left. \begin{aligned} A(\omega) &= Q(\omega) = k_a/\omega; \\ \varphi(\omega) &= \arctg(-\infty) = -90^\circ = \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (6.25)$$

АФХ интегрирующего звена совпадает с мнимой отрицательной полуосью (см. табл. 6.1, п. III, графу 3).

Логарифмическая амплитудная характеристика на основании (6.25) определяется выражением

$$G = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k_a - 20 \lg \omega.$$

Это выражение подобно выражению (6.18), поэтому ЛАХ интегрирующего звена является прямой линией, проходящей с наклоном -20 дБ/дек через точку на оси абсцисс, соответствующую частоте $\omega = k_a$ (см. табл. 6.1, п. III, графу 4).

Логарифмическая фазо-частотная характеристика интегрирующего звена

$$\varphi(\omega) = \arctg(-\infty) = -90^\circ = \text{const.}$$

Эта характеристика показывает, что фаза не зависит от частоты (является постоянной) и минимальна для данного типа звеньев (см. табл. 6.1, п. III, графу 4). Звено является минимально-фазовым.

Примерами интегрирующего звена являются: электрический двигатель при пренебрежении электромеханической постоянной времени (если вход — напряжение питания, а выход — угол поворота ротора или якоря), поршневой гидравлический сервомотор при пренебрежении массой и силами трения (если вход — скорость подачи жидкости в цилиндр или открытие окон золотника, а выход — перемещение поршня) и т. д., если уравнения их динамики имеют вид уравнения (6.19).

§ 6.5. Инерционные звенья второго порядка

Уравнение динамики инерционного звена второго порядка имеет вид

$$T^2 \frac{d^2 x_{\text{вых}}}{dt^2} + 2\rho T \frac{dx_{\text{вых}}}{dt} + x_{\text{вых}} = k \cdot x_{\text{вх}}, \quad (6.26)$$

где T — постоянная времени; ρ — коэффициент демпфирования; k — коэффициент усиления (или передачи).

Применяя к (6.26) преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях, получим операторное уравнение

$$(T^2 p^2 + 2\rho T p + 1) X_{\text{вых}}(p) = k \cdot X_{\text{вх}}(p). \quad (6.27)$$

В зависимости от вида корней характеристического уравнения инерционное звено второго порядка может иметь различные переходные характеристики. Это позволяет установить две разновидности звена — аperiodическое и колебательное (см. табл. 6.1, пп. IV и V).

Апериодическое звено второго порядка. При единичном входном воздействии для случая вещественных различных корней p_1 и p_2 по уравнению (6.27) получим переходную функцию ($\rho \geq 1$):

$$x_{\text{вых}}(t) = k \left[1 - \frac{k}{2\rho_1^2 T^2 + \rho_1 2\rho T} e^{p_1 t} + \frac{k}{2\rho_2^2 T^2 + \rho_2 2\rho T} e^{p_2 t} \right].$$

Переходная характеристика для этого звена показана в табл. 6.1, п. IV, графе 2.

В случае вещественных корней апериодическое звено второго порядка эквивалентно последовательному соединению двух инерционных звеньев первого порядка, поэтому передаточная функция может быть записана в виде

$$K(p) = \frac{k_1 \cdot k_2}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}.$$

По выражению $K(p)$ после замены p на $j\omega$ получим частотную функцию $K(j\omega)$ апериодического звена второго порядка, которая определяет частотные характеристики звена (см. табл. 6.1, п. IV, графы 3 и 4).

Колебательное звено. Если корни уравнения (6.27) будут комплексными, то инерционное звено второго порядка станет колебательным ($\rho < 1$).

Переходная функция колебательного звена

$$x_{\text{вых}}(t) = k [1 - e^{-\sigma t} a_0 \sin(\omega_1 t + \varphi)], \quad (6.28)$$

где $a_0 = \frac{\sqrt{\sigma^2 + \omega_1^2}}{\omega_1^2}$; $\varphi = \arctg \frac{\omega_1}{\sigma}$.

По уравнению (6.27) определяется передаточная функция инерционного звена второго порядка:

$$K(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\rho T p + 1}; \quad (6.29)$$

или

$$K(p) = \frac{\omega_0^2 k}{p^2 + 2\omega_0 \rho p + \omega_0^2}, \quad (6.30)$$

где $\omega_0 = 1/T$.

На основании $K(p)$ получим выражение для частотной функции $K(j\omega)$, по которой при различных коэффициентах демпфирования можно построить серию частотных характеристик (с м. табл. 6.1, пV, графу 3).

Логарифмические характеристики звена определяются по выражениям для $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$. Для построения ЛАХ надо записать логарифмическую функцию амплитуды в децибелах:

$$G = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{[1 - (\omega/\omega_0)^2]^2 + (\omega/\omega_0)^2 4\rho^2}. \quad (6.31)$$

Точное построение по (6.31) заключается в последовательном определении значений G при различных частотах. Вид характеристики, построенной по (6.31), будет различным при разных ρ (см. табл. 6.1, пV, графу 4).

Аналогично тому как это было выполнено для инерционного звена первого порядка, ЛАХ данного звена можно приближенно заменить асимптотической ЛАХ в виде двух асимптот. Первая асимптота характеризует ЛАХ при малых частотах, когда вместо (6.31) можно приближенно принять

$$G' \approx 20 \lg k - 20 \lg 1. \quad (6.32)$$

Эта асимптота не зависит от частоты.

Вторая асимптота характеризует ЛАХ при больших частотах, когда вместо (6.31) можно приближенно принять

$$G'' \approx 20 \lg k - 20 \lg (\omega/\omega_0)^2. \quad (6.33)$$

Эта асимптота зависит от частоты. Чтобы установить характер этой зависимости, определим приращение амплитуды в децибелах при увеличении частоты на одну декаду ($\omega_2 = 10\omega_1$). Для ω_1

$$G_1'' = 20 \lg k - 20 \lg (\omega_1/\omega_0)^2.$$

Для ω_2

$$G_2'' = 20 \lg k - 20 \lg (\omega_2/\omega_0)^2 = 20 \lg k - 20 \lg (10^2) - 20 \lg (\omega_1/\omega_0)^2.$$

Следовательно, приращение амплитуды на декаду составит

$$\Delta G'' = G_2'' - G_1'' = -20 \lg (10^2) = -2 \cdot 20 \lg 10 = -40 \text{ дб/дек.} \quad (6.34)$$

На основании (6.34) устанавливается правило нанесения второй асимптоты, характеризующей убывание амплитуды на 40 дб при возрастании частоты на одну декаду. Аналогично можно определить убы-

вание амплитуды, если частота увеличивается на одну октаву, в результате чего будет получен наклон асимптоты 12 дБ/окт. Приближенная ЛАХ, представленная в виде асимптот, получается после сопряжения обеих асимптот путем использования (6.32) и (6.33):

$$20 \lg 1 = 20 \lg (\omega_c / \omega_0)^2.$$

При этом сопрягающая частота ω_c определяется значением постоянной времени T :

$$\omega_c = \omega_0 = 1/T. \quad (6.35)$$

Приближенная замена действительной ЛАХ простейшего инерционного звена второго порядка двумя асимптотами допустима без введения поправки при $0,4 < \rho < 0,6$. При других значениях ρ рекомендуется корректировать асимптотическую ЛАХ.

На основании указанного можно сформулировать следующий порядок построения ЛАХ инерционного звена второго порядка, имеющего коэффициент усиления k :

определить логарифм амплитуды частотной функции звена в децибелах;

определить сопрягающую частоту в декадах по (6.35);

провести горизонтальную прямую до точки сопрягающей частоты;

от этой точки провести прямую с наклоном -40 дБ/дек (12 дБ/окт);

в случае необходимости учесть поправку в диапазоне сопрягающей частоты.

Логарифмическая фазо-частотная характеристика инерционного звена второго порядка

$$\varphi(\omega) = -\arctg \left[\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \frac{2\rho}{1 - (\omega/\omega_0)^2} \right].$$

Эта функция показывает, что фаза зависит от частоты и изменяется по закону тангенсной тригонометрической функции. При сопрягающей частоте фаза равна -90° . Фазо-частотные характеристики имеют различный наклон вблизи координаты -90° при различном значении ρ (см. табл. 6.1, п. V, графу 4). Звено является минимально-фазовым; значение фазы является наименьшим для данного числа звеньев.

Примерами выполнения инерционных звеньев второго порядка могут быть: центробежный маятник; контур, содержащий r , L и C ; ЭМУ поперечного поля; электродвигатель постоянного тока (если входом является напряжение якорной цепи, а выходом — скорость вращения при учете постоянной времени цепи якоря и электромеханической постоянной времени) и т. д., если уравнения их динамики можно представить в виде уравнения (6.26).

§ 6.6. Консервативное звено

Уравнение динамики консервативного звена имеет вид

$$T^2 \frac{d^2 x_{\text{вых}}}{dt^2} + x_{\text{вых}} = k x_{\text{вх}}, \quad (6.36)$$

где T — постоянная времени; k — коэффициент усиления (или передачи).

Переходный процесс такого звена показан в табл. 6.1, п. VI, графе 2. Консервативное звено — частный случай звена второго порядка, когда отсутствует демпфирование ($\rho = 0$). Применяя к (6.36) преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях, получим операторное уравнение

$$(T^2 p^2 + 1) X_{\text{вых}}(p) = k X_{\text{вх}}(p).$$

Передаточная функция консервативного звена

$$K(p) = k / (1 + T^2 p^2). \quad (6.37)$$

На основании (6.37) получим частотную функцию

$$K(j\omega) = \frac{k}{1 - T^2 \omega^2} + j0 = A(\omega) e^{j0}, \quad (6.38)$$

где

$$A(\omega) = P(\omega) = \frac{k}{1 - T^2 \omega^2} = \frac{k}{1 - (\omega/\omega_0)^2}. \quad (6.39)$$

Амплитудная характеристика имеет разрыв при $\omega = \omega_0$.

Фазо-частотная характеристика определяет скачкообразное изменение фазы при $\omega = \omega_0$ от нуля до -180° . Звено является минимально-фазовым.

Амплитудно-фазовая характеристика может быть представлена в виде двух отрезков прямых линий на вещественной оси. Одна линия уходит при $0 \leq \omega \leq \omega_0$ вправо от точки, находящейся на расстоянии k от начала координат, до бесконечности; вторая линия при $\omega_0 \leq \omega \leq \infty$ представляет собой отрицательную вещественную ось. Частотные характеристики звена показаны в табл. 6.1, п. VI, графах 3 и 4.

Примером консервативного звена может служить идеальный пассивный четырехполюсник, состоящий из L и C (при отсутствии омического сопротивления цепи), и другие элементы, если уравнения их динамики имеют вид уравнения (6.36).

§ 6.7. Дифференцирующие звенья

Дифференцирующие звенья реагируют на скорость изменения входного воздействия и могут быть описаны дифференциальными уравнениями, содержащими в правой части производную от входной переменной. Левая часть уравнения может иметь любой собственный оператор

подобно рассмотренным выше звеньям. Приведем наиболее общие случаи уравнений дифференцирующих звеньев:

$$x_{\text{вмх}} = k_0 \frac{dx_{\text{вх}}}{dt}; \quad (6.40)$$

$$T \frac{dx_{\text{вмх}}}{dt} + x_{\text{вмх}} = k_0 \frac{dx_{\text{вх}}}{dt}; \quad (6.41)$$

$$T \frac{dx_{\text{вмх}}}{dt} + x_{\text{вмх}} = k_0 \frac{dx_{\text{вх}}}{dt} + kx_{\text{вх}}, \quad (6.42)$$

где $k_0 = kT_0$ — эквивалентный коэффициент усиления.

Уравнение (6.40) соответствует *идеальному* (безынерционному) дифференцирующему звену, (6.41) — *реальному* (инерционному) дифференцирующему звену без статизма; (6.42) — *реальному* (инерционному) дифференцирующему звену со статизмом (или пропорционально-дифференцирующему звену), если $T_0 > T$. Возможен также случай инерционного дифференцирующего звена второго порядка с наличием второй производной в операторе воздействий (т. е. звено реагирует на ускорение изменения входного сигнала).

Операторная форма записи уравнений дифференцирующих звеньев, полученная для нулевых начальных условий, имеет вид:

$$X_{\text{вмх}}(p) = k_0 p X_{\text{вх}}(p); \quad (6.43)$$

$$(Tp + 1) X_{\text{вмх}}(p) = k_0 p X_{\text{вх}}(p); \quad (6.44)$$

$$(Tp + 1) X_{\text{вмх}}(p) = k(T_0 p + 1) X_{\text{вх}}(p). \quad (6.45)$$

Переходные функции дифференцирующих звеньев для различных случаев дифференциальных уравнений различны (см. табл. 6.1, пп. VII, VIII и IX, графу 2).

Для идеального дифференцирующего звена (ДЗ)

$$x_{\text{вмх}}(t) = k_0 \frac{d[1(t)]}{dt} = \infty. \quad (6.46)$$

Для реального дифференцирующего звена без статизма (РДЗ)

$$X_{\text{вмх}}(p) = \frac{k_0 p}{p(1 + Tp)} = \frac{k_0}{1 + Tp}. \quad (6.47)$$

После использования обратного преобразования Лапласа

$$x_{\text{вмх}}(t) = \frac{k_0}{T} e^{-t/T}. \quad (6.48)$$

Для реального дифференцирующего звена со статизмом (РДЗС)

$$X_{\text{вмх}}(p) = \frac{k(1 + T_0 p)}{p(1 + Tp)}. \quad (6.49)$$

После использования обратного преобразования Лапласа

$$x_{\text{вмх}}(t) = k(1 - e^{-t/T}) + k \frac{T_0}{T} e^{-t/T}. \quad (6.50)$$

В частном случае, для $T_0 = T$ получим $x_{\text{вых}}(t) = k$, т. е. безынерционное звено.

По операторным уравнениям (6.43)—(6.45) можно записать соответственно выражения передаточных функций дифференцирующих звеньев ДЗ, РДЗ и РДЗС:

$$K(p) = k_0 p = k T_0 p; \quad (6.51)$$

$$K(p) = \frac{k_0 p}{1 + T p} = \frac{k T_0 p}{1 + T p}; \quad (6.52)$$

$$K(p) = \frac{k(1 + T_0 p)}{1 + T p}, \text{ при } T_0 > T. \quad (6.53)$$

На основании (6.51)—(6.53) после замены p на $j\omega$ получены частотные функции дифференцирующих звеньев:

$$K(j\omega) = k j \omega T_0;$$

$$K(j\omega) = k j \omega T_0 / (1 + j \omega T);$$

$$K(j\omega) = k(1 + j \omega T_0) / (1 + j \omega T).$$

АФХ дифференцирующих звеньев показаны в табл. 6.1, пл. VII, VIII и IX, графе 3.

Для построения ЛАХ дифференцирующих звеньев ДЗ, РДЗ и РДЗС необходимо использовать соответственно следующие выражения:

$$G = 20 \lg k_0 \omega; \quad (6.54)$$

$$G = 20 \lg k_0 \omega - 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2}; \quad (6.55)$$

$$G = 20 \lg k + 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T_0^2} - 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2}. \quad (6.56)$$

На основании (6.54) можно установить, что ЛАХ идеального дифференцирующего звена представляет собой прямую линию, проходящую через точку на оси абсцисс при $\omega = k_0$ с наклоном $+20 \text{ дБ/дек}$; если $k_0 = 1$, то прямая проходит через начало координат.

По выражению (6.55) устанавливаем, что ЛАХ реального дифференцирующего звена представляет собой две асимптоты, сопрягающиеся при частоте $\omega_c = 1/T$; до этой частоты ЛАХ имеет вид прямой линии с наклоном $+20 \text{ дБ/дек}$; после ω_c ЛАХ проходит параллельно оси абсцисс.

Используя (6.56), можно заключить, что ЛАХ реального дифференцирующего звена со статизмом определяется суммой составляющих ЛАХ и имеет вид ломаной линии, состоящей из асимптот, сопрягающихся при $\omega_0 = 1/T_0$ и ω_c . Для этого звена вид ЛАХ изменяется в зависимости от соотношения T_0 и T .

Фазо-частотные характеристики для ДЗ, РДЗ и РДЗС строятся соответственно по выражениям:

$$\varphi(\omega) = \arctg(\infty) = 90^\circ = \text{const}; \quad (6.57)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg(1/\omega T); \quad (6.58)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \omega T_0 - \arctg \omega T. \quad (6.59)$$

Фазо-частотная характеристика для ДЗ имеет вид прямой линии, параллельной оси абсцисс (см. табл. 6.1, п. VII, графу 4). Для РДЗ она определяется тангенсной функцией частоты (6.58) и при $\omega = 0$ имеет фазовый угол 90° , а при $\omega = \infty$ — 0° (см. табл. 6.1, п. VIII, графу 4). Фазовая характеристика для РДЗС определяется тангенсной функцией частоты (6.59): при $T_0 > T$ угол будет положительным (см. табл. 6.1, п. IX, графу 4), а при $T_0 < T$ — отрицательным; при $T_0 = T$ сдвиг по фазе отсутствует.

Значения фазы (6.57), (6.58) и (6.59) являются наименьшими для данных типов звеньев; указанные дифференцирующие звенья — минимально-фазовые.

Примерами конструктивного выполнения дифференцирующих звеньев могут служить электрические цепи, содержащие L или C , демпфер с пружиной, тахогенератор и другие устройства, если уравнения их динамики можно представить в виде уравнений (6.40), (6.41) и (6.42).

§ 6.8. Неминимально-фазовые звенья

В общем случае звено является неминимально-фазовым, если сдвиг по фазе превышает минимальное значение, возможное для данного типа звена. Неминимально-фазовыми звеньями при определенных условиях могут быть все указанные выше типовые звенья, если их передаточные функции имеют положительные нули или полюса. Наиболее распространенными в практике автоматических систем являются следующие неминимально-фазовые звенья:

устойчивые инерционные звенья, функции $K(p)$ которых имеют положительный нуль;

звенья с запаздыванием (с запаздывающим аргументом);

неустойчивые звенья, функции $K(p)$ которых имеют положительный полюс.

Одной амплитудно-частотной характеристике неминимально-фазовых звеньев может соответствовать несколько различных фазо-частотных характеристик.

Устойчивое инерционное звено неминимально-фазового типа. Уравнение динамики устойчивого неминимально-фазового звена имеет вид

$$T \frac{dx_{\text{вх}}}{dt} + x_{\text{вх}} = k \left(x_{\text{вх}} - T_0 \frac{dx_{\text{вх}}}{dt} \right). \quad (6.60)$$

Сравнивая (6.60) с (6.46), можно отметить, что неминимально-фазовые звенья и реальные дифференцирующие звенья со статизмом имеют различие только в знаке сигнала по производной от входной переменной.

Операторное уравнение неминимально-фазовых звеньев запишется как

$$(Tp + 1) X_{\text{вх}}(p) = k(1 - T_0 p) X_{\text{вх}}(p). \quad (6.61)$$

Передаточная функция звена

$$K(p) = k(1 - T_0 p)/(1 + Tp) \quad (6.62)$$

существенно отличается от передаточных функций рассмотренных выше типовых звеньев тем, что неминимально-фазовые звенья имеют положительный нуль $p_N = 1/T_0$.

Частотные функции неминимально-фазовых звеньев имеют следующий вид:

$$K(j\omega) = \frac{k(1 - j\omega T_0)}{1 + j\omega T}; \quad (6.63)$$

$$A(\omega) = k \frac{\sqrt{1 + \omega^2 T_0^2}}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}; \quad (6.64)$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \omega T_0 - \operatorname{arctg} \omega T \quad (6.65)$$

и позволяют сделать вывод, что при $k = 1$ и $T_0 = T$ амплитуда выходного сигнала не зависит от частоты, а фаза изменяется в зависимости от частоты входного сигнала от 0 до -180° .

АФХ звена имеет вид полукружности, но в отличие от АФХ апериодического звена расположена в III и IV квадрантах (см. табл. 6.1, п. X, графу 3). ЛАХ и ЛФХ звена показаны в табл. 6.1, п. X, графе 4. Значение фазы данного звена превышает значение фазы, соответствующее инерционным звеньям первого порядка.

Переходная функция устойчивого неминимально-фазового звена

$$x_{\text{вых}}(t) = k(1 - e^{-t/T}) - k \frac{T_0}{T} e^{-t/T}. \quad (6.66)$$

Соответственно (6.66) выходной сигнал звена в зависимости от времени меняет знак (см. табл. 6.1, п. X, графу 2).

Примерами неминимально-фазовых звеньев являются электрические мостовые схемы, составленные из сопротивлений и емкостей, и другие элементы, если уравнения их динамики имеют вид уравнения (6.60).

Звенья с запаздыванием. На практике встречаются устройства, динамика которых определяется уравнением с запаздывающим аргументом. Наиболее распространенным в практике автоматических систем является транспортное запаздывание, обусловленное пространственными перемещениями элементов, передающих информацию (например, транспортерная лента, полоса прокатываемого металла и др.).

Обычно рассматривается звено с запаздыванием простейшего вида, при $k = 1$

$$x_{\text{вых}}(t) = 1 \cdot x_{\text{вх}}(t - \tau). \quad (6.67)$$

Звено, характеризуемое уравнением (6.67), иногда называется *идеальным звеном с запаздыванием*. Операторное уравнение звена с запаздыванием имеет вид

$$X_{\text{вых}}(p) = e^{-p\tau} X_{\text{вх}}(p). \quad (6.68)$$

В более общем случае, когда звено не является идеальным, следует записать

$$A(p) X_{\text{вых}}(p) = B(p) e^{-p\tau} X_{\text{вх}}(p). \quad (6.69)$$

Переходная функция идеального звена с запаздыванием определяется непосредственно выражением (6.67) и показана в табл. 6.1, п. XI, графе 2. Для общего случая по (6.69) на основании свойств преобразования Лапласа можно установить, что переходная функция звена с запаздыванием равна переходной функции этого же звена, определенной без учета запаздывания ($\tau = 0$), с последующим учетом запаздывания и подстановкой вместо t значения $(t - \tau)$.

Передаточная функция идеального звена с запаздыванием

$$K(p) = e^{-p\tau}. \quad (6.70)$$

Частотные функции звена можно представить как

$$K(j\omega) = e^{-j\omega\tau}; \quad (6.71)$$

$$A(\omega) = 1; \quad (6.72)$$

$$\varphi(\omega) = -\omega\tau. \quad (6.73)$$

В соответствии с (6.71) АФХ идеального звена с запаздыванием является окружностью единичного радиуса (см. табл. 6.1, п. XI, графу 3). ЛАХ такого звена на основании (6.72) совпадает с осью абсцисс, а фаза соответственно (6.73) нарастает неограниченно с увеличением частоты (см. табл. 6.1, п. XI, графу 4).

Звено с запаздыванием является неминимально-фазовым; для такого звена сдвиг по фазе превышает сдвиг по фазе (нуль градусов), соответствующий идеальным (безынерционным) звеньям. При различных временах запаздывания одной и той же ЛАХ будет соответствовать серия различных ЛФХ.

Примерами конструктивного выполнения звеньев с запаздыванием являются длинные тру-

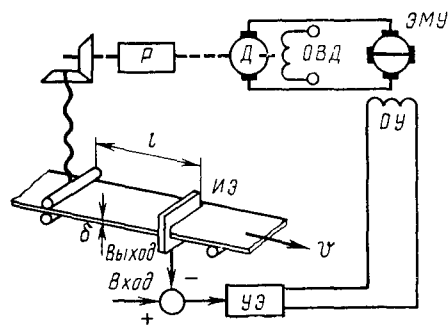


Рис. 6.2

бопроводы и линии электропередач, транспортные ленты и другие элементы, если уравнения их динамики имеют вид уравнения (6.67).

На рис. 6.2 показана для примера система автоматического регулирования толщины проката, содержащая звено с запаздыванием. Измерительным элементом ИЭ служит индуктивный толщиномер; при отклонении толщины полосы от заданного калибра на выходе толщиномера возникает напряжение, которое подается на вход усилителя УЭ. Выход этого усилителя подается на обмотку управления ОУ электромашиного усилителя ЭМУ. Выходное напряжение ЭМУ подводится к обмотке якоря приводного двигателя Д, действующего через редуктор Р на нажимной винт. Таким образом, замкнутая система управления автоматически изменяет раствор валков для обеспечения заданной толщины полосы δ .

Особенности системы состоят в том, что толщина полосы измеряется не в том месте, где находятся валки, а на некотором расстоянии l от них. Поэтому сигнал об изменении калибра появляется через некоторое время τ , зависящее от скорости проката v и расстояния l :

$$\tau = l/v. \quad (6.74)$$

Величина τ зависит от уровня производства, определяющего скорость v , от квалификации проектировщиков, конструкции и принципа действия измерительного элемента, что определяет величину l .

Звено с запаздыванием в некоторых случаях вводится при расчете системы условно. Для ряда промышленных объектов уравнение динамики не известно, поэтому кривую переходного процесса реального объекта при единичном входном воздействии аппроксимируют экспонентой и эквивалентным запаздыванием τ (рис. 6.3). Время τ определяется отрезком, который отсекается на оси абсцисс вспомогательной линией AB , характеризующей постоянную времени T_0 .

При этом реальный объект аппроксимируется последовательным соединением звена с запаздыванием τ и инерционного звена с коэффициентом усиления k_0 и постоянной времени T_0 :

$$K_0(p) = k_0 e^{-\tau p} / (1 + T_0 p). \quad (6.75)$$

В том случае, когда кривая имеет колебательный характер, вместо (6.75) будет получено более сложное выражение.

Неустойчивые звенья. Если характеристическое уравнение звена имеет корни с положительной вещественной частью, то такое звено является неустойчивым. Уравнения динамики неустойчивых звеньев имеют вид:

для инерционного звена первого порядка

$$T_1 \frac{dx_{\text{вых}}}{dt} - x_{\text{вых}} = kx_{\text{вх}}; \quad (6.76)$$

для инерционного звена второго порядка

$$\left. \begin{aligned} T_1^2 \frac{d^2 x_{\text{вых}}}{dt^2} - T_2 \frac{dx_{\text{вых}}}{dt} - x_{\text{вых}} &= kx_{\text{вх}}; \\ T_1^2 \frac{d^2 x_{\text{вых}}}{dt^2} + T_2 \frac{dx_{\text{вых}}}{dt} - x_{\text{вых}} &= kx_{\text{вх}}; \\ T_1^2 \frac{d^2 x_{\text{вых}}}{dt^2} - T_2 \frac{dx_{\text{вых}}}{dt} - x_{\text{вых}} &= kx_{\text{вх}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.77)$$

Переходные характеристики неустойчивых звеньев существенно отличаются от характеристик других звеньев тем, что согласно (6.76) выходная переменная звена неограниченно возрастает, а согласно

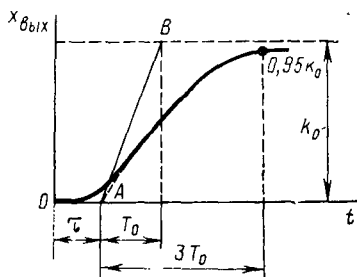


Рис. 6.3

(6.77) амплитуда колебаний неограниченно увеличивается (см. штрихпунктирные кривые в табл. 6.1, шл. II и V, графе 2).

Используя операторные уравнения, можно записать выражения для передаточных функций неустойчивых звеньев:

для звена первого порядка

$$K(p) = k(T_1 p - 1)^{-1},$$

для звена второго порядка

$$K(p) = k(T_1^2 p^2 - T_2 p - 1)^{-1};$$

$$K(p) = k(T_1^2 p^2 - T_2 p - 1)^{-1};$$

$$K(p) = k(T_1^2 p^2 - T_2 p - 1)^{-1}.$$

Если построить частотные характеристики неустойчивых звеньев, то можно убедиться, что сдвиг по фазе превышает максимальное значение, соответствующее аналогичным устойчивым звеньям. Например, для неустойчивого звена первого порядка ЛАХ подобна ЛАХ устойчивого инерционного звена первого порядка, а фаза превышает сдвиг по фазе, соответствующий минимально-фазовому звену.

Примерами конструктивного выполнения неустойчивых звеньев могут служить электромашинные усилители, имеющие обмотку самовозбуждения, сопротивление цепи которой меньше критического значения, и некоторые другие устройства, если уравнения их динамики имеют вид уравнений (6.76) и (6.77).

Вопросы для самопроверки

1. По каким признакам производится классификация звеньев?
2. Какие простейшие звенья можно выделить, рассматривая установившиеся режимы работы?
3. Назовите типовые звенья, различающиеся по динамическим свойствам.
4. В чем заключается основное различие между устойчивыми и неустойчивыми звеньями?
5. Поясните различие между минимально-фазовыми и неминимально-фазовыми звеньями.
6. Запишите дифференциальные уравнения и передаточные функции типовых звеньев.
7. Нарисуйте переходные и частотные характеристики типовых звеньев и сравните их для устойчивых и неустойчивых, а также для минимально-фазовых и неминимально-фазовых звеньев.

ОСНОВНЫЕ ВОПРОСЫ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

К основным вопросам линейной теории относятся методы составления и преобразования структурных схем линейных автоматических систем, исследование их устойчивости и качества процесса регулирования и управления, а также синтез корректирующих устройств и расчет переходных процессов.

Глава 7

СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ, ПЕРЕДАТОЧНЫЕ И ЧАСТОТНЫЕ ФУНКЦИИ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Условная схема, представленная в виде динамических типовых звеньев, определенным образом соединенных между собой, называется *структурной схемой системы*. Структурная схема используется для расчета динамики системы.

§ 7.1. Обозначения, применяемые в структурных схемах

Типовое динамическое звено обозначается на структурной схеме условно в виде прямоугольника с указанием передаточной функции внутри него. Для звена с запаздыванием иногда внутри прямоугольника указывается время запаздывания τ и наносится штриховка.

Необходимость разветвления и суммирования сигналов при осуществлении обратных связей также требует определенного отображения на структурной схеме. При разветвлении сигнала предполагается, что к каждому звену поступает один и тот же сигнал. Так как сигнал не обладает массой или энергией, то в месте разветвления он не делится; в этом месте на структурной схеме ставится точка. Суммирование сигналов обозначается кружком с указанием знака сигнала. В некоторых случаях знак сигнала не указывается, а кружок разделяется на секторы (см. рис. 2.6).

Структурная схема рассматривается как схема прохождения и преобразования сигналов в системе управления. Отдельные звенья структурной схемы не обязательно должны соответствовать определенным конструктивным элементам системы; они изображают части системы, характеризующиеся определенными переходными или передаточными функциями. Точки разветвления и узлы суммирования сигналов обычно разделяют отдельные звенья; один конструктивный элемент может быть представлен несколькими типовыми звеньями, а иногда несколько элементов объединяются в одно типовое звено. Все это облегчает расчет и конструирование систем.

Структурную схему составляют на основании функциональной схемы, причем вначале определяют связи, по которым сигналы могут распространяться только в одном (прямом) направлении. Звенья при этом соединяют определенным образом, указывая стрелками направление распространения сигналов. Затем находят связи обратного прохождения сигналов и также наносят их на структурную схему. После этого в схему вводят возмущающие воздействия.

§ 7.2. Правила преобразований структурной схемы при различном соединении звеньев

Структурная схема, содержащая несколько звеньев, в дальнейшем может быть преобразована с целью получения эквивалентных передаточных функций разомкнутой и замкнутой систем; при этом используют указанные ниже правила.

Последовательное соединение звеньев. Это такое соединение, когда выходная переменная каждого предыдущего звена является входным воздействием для последующего звена (и только для него одного).

Рассмотрим последовательное соединение двух простых звеньев, имеющих передаточные функции:

$$K_1(p) = X_{\text{вх}1}(p)/X_{\text{вх}1}(p); \quad (7.1a)$$

$$K_2(p) = X_{\text{вых}2}(p)/X_{\text{вх}2}(p), \quad (7.16)$$

где

$$X_{\text{вх}2}(p) = X_{\text{вых}1}(p). \quad (7.2)$$

Для эквивалентного звена запишем

$$K_{\text{экв}}(p) = X_{\text{вых}2}(p)/X_{\text{вх}1}(p). \quad (7.3)$$

Если учесть (7.1) и (7.2), то получим

$$K_{\text{экв}}(p) = \frac{X_{\text{вых}1}(p)}{X_{\text{вх}1}(p)} \cdot \frac{X_{\text{вых}2}(p)}{X_{\text{вх}2}(p)} = K_1(p) \cdot K_2(p). \quad (7.4)$$

Таким образом, передаточная функция последовательно соединенных звеньев равна произведению их передаточных функций. Это справедливо при любом количестве последовательно соединенных звеньев. Для цепи, состоящей из n звеньев, при последовательном

соединении (рис. 7.1, а) эквивалентная передаточная функция [см. (7.4)]

$$K_{\text{экв}}(p) = K_1(p) \cdot K_2(p) \dots K_n(p) = \prod_{i=1}^n K_i(p). \quad (7.5a)$$

Следовательно, можно записать

$$X_{\text{вых}}(p) = K_{\text{экв}}(p) X_{\text{вх}}(p).$$

Выражение (7.5а) справедливо и для обратных передаточных функций последовательно соединенных звеньев:

$$K_{\text{экв}}^{-1}(p) = K_1^{-1}(p) \cdot K_2^{-1}(p) \dots K_n^{-1}(p). \quad (7.5б)$$

Из (7.5а) следует, что собственный оператор эквивалентного звена равен произведению собственных операторов, а оператор воздействия — произведению операторов воздействий последовательно соединенных звеньев.

Параллельное соединение звеньев. Это такое соединение, когда на вход всех звеньев подается один и тот же сигнал, а выходная переменная равна сумме выходных переменных звеньев (рис. 7.1, б).

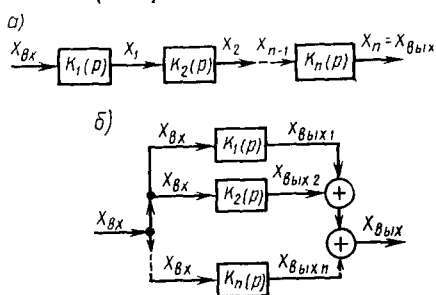


Рис. 7.1

Рассмотрим параллельное согласное соединение двух простых звеньев, имеющих передаточные функции $K_1(p)$ и $K_2(p)$:

$$\left. \begin{aligned} X_{\text{вых1}}(p) &= K_1(p) X_{\text{вх}}(p); \\ X_{\text{вых2}}(p) &= K_2(p) X_{\text{вх}}(p). \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

Для эквивалентного звена запишем

$$K_{\text{экв}}(p) = \frac{X_{\text{вых}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)} = \frac{X_{\text{вых1}}(p) + X_{\text{вых2}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)}.$$

С учетом (7.6) последнее выражение запишется в виде

$$K_{\text{экв}}(p) = K_1(p) + K_2(p).$$

Таким образом, при параллельном соединении n звеньев (см. рис. 7.1, б) эквивалентная передаточная функция

$$K(p) = K_1(p) + K_2(p) + \dots + K_n(p) = \sum_{i=1}^n K_i(p). \quad (7.7)$$

Если два звена соединены так, что их выходные сигналы вычитаются, то эквивалентная функция

$$K_{\text{экв}}(p) = K_1(p) - K_2(p). \quad (7.8)$$

При параллельном соединении устойчивых звеньев результирующее звено будет также устойчивым. Однако в зависимости от того, складываются или вычитаются выходные сигналы звеньев, при парал-

тельном соединении минимально-фазовых звеньев можно получить неминимально-фазовое результирующее звено. Например, при параллельном соединении безынерционного и инерционного звеньев, сигналы которых вычитаются, имеем

$$K(p) = \frac{k_1}{1 + pT_1} - k_2 = \frac{(k_1 - k_2) - pT_1 k_2}{1 + pT_1},$$

что при $k_1 > k_2$ соответствует неминимально-фазовому звену.

Аналогичный результат можно получить и в других случаях.

Указанные правила для параллельного соединения не относятся к обратным передаточным функциям. Для них необходимо, используя (7.7), определить эквивалентную передаточную функцию, а затем взять функцию, обратную ей.

Звенья с обратными связями. В некоторых случаях на вход звена кроме входного воздействия подается часть выходного сигнала $x_{o.c.}$. В зависимости от знака сигнала обратной связи различают положительные и отрицательные обратные связи. Устройство, осуществляющее передачу выходной переменной на вход звена, может быть представлено (в зависимости от его свойств и характеристик) каким-либо типовым динамическим звеном с передаточной функцией $K_{o.c.}(p)$. В общем случае сигнал $x_{o.c.}$ является выходом некоторого устройства обратной связи; входом для этого устройства будет выходная переменная основного звена, поэтому можно записать

$$X_{вых}(p) = K(p) [X_{вх}(p) \pm X_{o.c.}(p)]; \quad (7.9)$$

$$X_{o.c.}(p) = K_{o.c.}(p) X_{вых}(p), \quad (7.10)$$

где $K(p)$ — передаточная функция звена для прямой цепи прохождения сигнала.

В уравнении (7.9) знак «+» соответствует положительной, а знак «—» — отрицательной обратной связи. По уравнениям (7.9) и (7.10) можно получить эквивалентную передаточную функцию звена с обратной связью в общем случае. Уравнение (7.9) с учетом (7.10) запишется как

$$X_{вых}(p) = K(p) [X_{вх}(p) \pm K_{o.c.}(p) X_{вых}(p)],$$

откуда

$$K_{эkv}(p) = \frac{K(p)}{1 \mp K_{o.c.}(p) \cdot K(p)} = \frac{X_{вых}(p)}{X_{вх}(p)}. \quad (7.11)$$

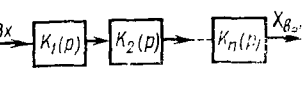
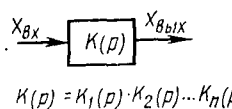
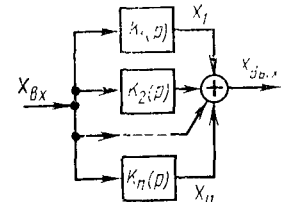
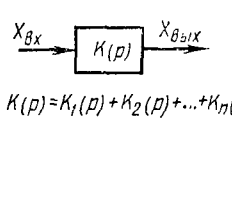
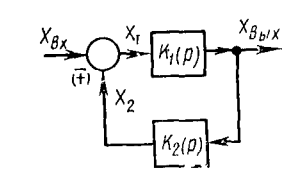
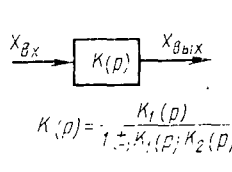
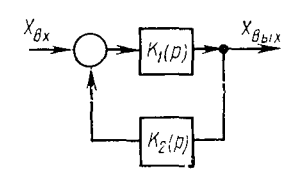
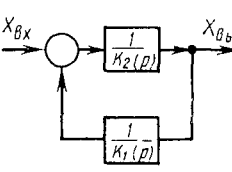
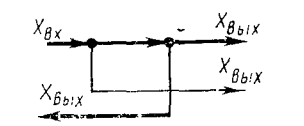
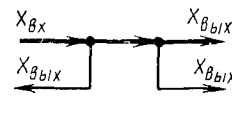
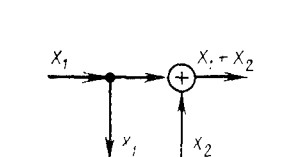
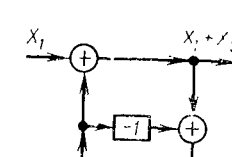
Знак «—» в (7.11) соответствует положительной, знак «+» — отрицательной обратной связи.

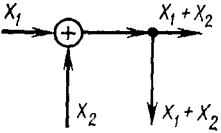
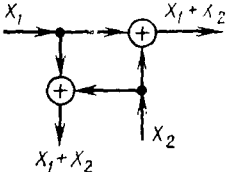
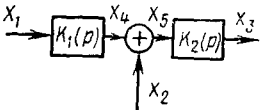
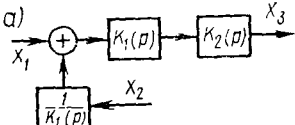
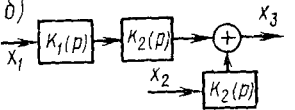
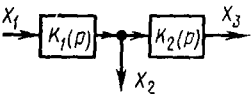
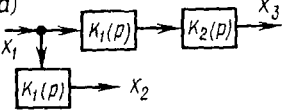
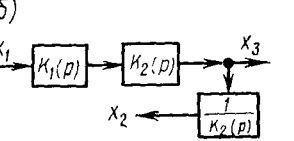
В зависимости от того, каким звеном представлена обратная связь, она может быть жесткой, гибкой или смешанной. Влияние различных обратных связей на характеристики и свойства типовых звеньев рассмотрено в гл. 9.

Кроме указанных преобразований участков структурной схемы иногда требуется переносить узлы суммирования и точки разветвления сигналов и заменять сложные участки более простыми. Для выполнения этих преобразований можно использовать правила, указанные в табл. 7.1.

Таблица 7.1

Правила структурных преобразований

Исходная структурная схема	Преобразованная структурная схема	Название структурных преобразований
	 $K(p) = K_1(p) \cdot K_2(p) \cdot \dots \cdot K_n(p)$	Преобразование последовательного соединения звеньев в одно звено
	 $K(p) = K_1(p) + K_2(p) + \dots + K_n(p)$	Преобразование согласно-параллельного соединения звеньев в одно звено
	 $K(p) = \frac{K_1(p)}{1 \pm K_1(p) \cdot K_2(p)}$	Преобразование встречно-параллельного соединения звеньев в одно звено (обратная связь)
		Перестановка звеньев при встречно-параллельном соединении (обратная связь)
		Перестановка точек разветвления
		Перестановка узла разветвления через узел суммирования

Исходная структурная схема	Преобразованная структурная схема	Название структурных преобразований
		Перестановка узла суммирования через точку разветвления
	а)  б) 	Перестановка узла суммирования через звено: а) против хода сигнала; б) по ходу сигнала
	а)  б) 	Перестановка точки разветвления через звено: а) против хода сигнала; б) по ходу сигнала

§ 7.3. Структурные схемы и передаточные функции одноконтурных и многоконтурных замкнутых систем

Если система состоит из простых звеньев, соединенных последовательно, и сигнал проходит только по одной цепи, то при замыкании этой цепи путем подачи выходной переменной на вход (главная обратная связь) будет получена **о д н о к о н т у р н а я** замкнутая система (рис. 7.2).

Рассмотрим случай, когда на систему действует только задающее воздействие $X_{вх}$ (рис. 7.2, а). При этом сигнал, подаваемый на вход первого звена,

$$\Delta X = X_{вх} - X_{вых} \quad (7.12)$$

Используя (7.5), можно получить передаточную функцию $K(p)$ разомкнутой системы и записать следующее уравнение

$$X_{\text{вых}}(p) = K(p) \Delta X = K(p) [X_{\text{вх}}(p) - X_{\text{вых}}(p)], \quad (7.13)$$

откуда

$$[1 + K(p)] X_{\text{вых}}(p) = K(p) X_{\text{вх}}(p). \quad (7.14)$$

На основании (7.14) передаточная функция замкнутой системы

$$W(p) = X_{\text{вых}}(p)/X_{\text{вх}}(p) = K(p)/[1 + K(p)]. \quad (7.15)$$

Если действует только внешнее возмущение, то передаточная функция разомкнутой системы относительно возмущения, приложенного к звену n (рис. 7.2, б), имеет вид

$$K_z(p) = B_z(p)/A_z(p). \quad (7.16)$$

При этом определится передаточная функция замкнутой системы при возмущающем воздействии:

$$W_z(p) = \frac{X_{\text{вых}}(p)}{Z(p)} = \frac{K_z(p)}{1 + K'(p) K_z(p)} = \frac{K_z(p)}{1 + K(p)}. \quad (7.17)$$

Обычно возмущающее воздействие в виде нагрузки прикладывается к управляемому объекту (см. звено n на рис. 7.2). Следовательно, передаточная функция замкнутой системы относительно возмущающего

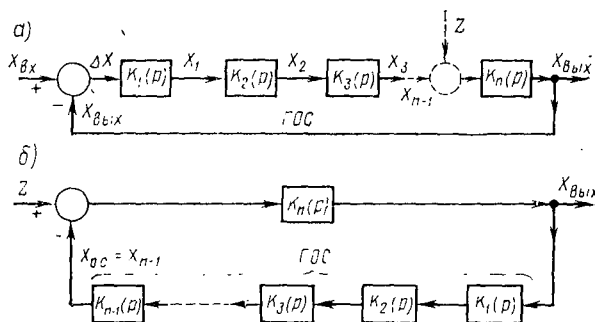


Рис. 7.2

воздействия $W_z(p)$ характеризуется передаточной функцией разомкнутой системы $K(p)$ и передаточной функцией $K_z(p)$ звена (или ряда звеньев), к которому приложено возмущающее воздействие. Передаточная функция $K_z(p)$ определяется относительно возмущения $Z(p)$ и выхода $X_{\text{вых}}(p)$.

Указанное позволяет в каждом случае получить передаточные функции системы при наличии возмущающего воздействия, приложенного к входу любого звена. Чтобы оценить влияние какого-либо воздействия на изменение любой промежуточной переменной величины замкнутой системы, надо сначала составить структурную схему относительно рассматриваемого воздействия и выходной переменной

(рис. 7.2, б). Далее находится передаточная функция $K_z(p)$ разомкнутого участка цепи между точкой приложения возмущающего воздействия и рассматриваемой выходной переменной. Все остальные звенья схемы системы выносятся в участок цепи главной обратной связи ГОС, при этом определяется их эквивалентная передаточная функция

$$K'(p) = K_{o.c}^z(p).$$

В результате получится структурная схема в виде эквивалентного звена $K_z(p)$, охваченного обратной связью с передаточной функцией $K'(p)$. По соответствующей формуле для звена с обратной связью составляется передаточная функция с учетом

$$K'(p) K_z(p) = K(p),$$

как это указано в (7.17). При заданном сигнале на входе и отклонении управляемой переменной на вход системы поступает сигнал ошибки Δx , определяемый по уравнению (7.12).

Аналогичное выражение можно получить, представив структурную схему относительно $x_{вх}$ и выхода в виде Δx . В этом случае передаточная функция цепи прямого прохождения сигнала равна единице, а все звенья системы оказываются включенными в цепь ГОС:

$$K_{o.c}^{\Delta x}(p) = K(p).$$

При этом передаточная функция замкнутой системы

$$W_{\Delta x}(p) = [1 + K(p)]^{-1}.$$

В более общем случае структурная схема сложной автоматической системы может содержать смешанное соединение звеньев и дополнительные внутренние обратные связи, представленные различными типовыми звеньями. Чтобы определить передаточные функции таких систем, следует выполнить некоторые преобразования участков структурной схемы.

Если структурная схема системы содержит несколько внутренних обратных связей, она называется *многоконтурной*; преобразование ее участков выполняется с учетом (7.5), (7.9) и (7.11). При этом сначала приводятся к эквивалентным звеньям участки с параллельным соединением простых звеньев и звеньев с обратными связями, затем, используя (7.15) или (7.17), находится передаточная функция замкнутой многоконтурной системы*.

До сих пор считалось, что каждый контур обратной связи охватывает определенную группу звеньев, составляющих неразветвленную цепь или содержащую другой контур обратной связи. Однако может оказаться, что контур обратной связи охватывает участок цепи, содержащий только начало или конец другой цепи обратной связи (рис. 7.3, а). Такая структурная схема называется схемой с *перекрещивающимися обратными связями*; она может быть преобразована

* Пример преобразования многоконтурной системы см. в конце этой главы.

ему без перекрещивающихся связей (рис. 7.3, б), для которой можно получить выражения передаточных функций:

$$K(p) = \frac{K_1(p) K_2(p) K_3(p)}{1 - K_1(p) K_2(p) K_4(p) + K_2(p) K_3(p) K_5(p)}; \quad (7.18)$$

$$W(p) = \frac{K(p)}{1 + K(p)} = \frac{K_1(p) K_2(p) K_3(p)}{1 + K_1(p) K_2(p) K_3(p) - K_1(p) K_2(p) K_4(p) + K_2(p) K_3(p) K_5(p)}. \quad (7.19)$$

Иногда при расчете автоматических систем необходимо определить передаточную функцию между двумя произвольными узлами сложной структурной схемы. В этих случаях целесообразно использовать правило Мейсона [Л. 31, 34, 47]. При этом передаточная функция между двумя заданными узлами m и n определяется выражением

$$K_{mn}(p) = \frac{\left\{ \sum_{k=1}^r K_{npk}(p) \right\} \prod_{i=1}^s [1 + K_{phk}(p)]^*}{\left\{ \prod_{i=1}^s [1 + K_{phk}(p)] \right\}^*}, \quad (7.20)$$

где $\sum_{k=1}^r K_{npk}(p)$ — сумма передаточных функций различных прямых путей от узла m к узлу n ; $K_{phk}(p)$ — передаточная функция разомкнутого контура, взятая со знаком «+» в случае отрицательной обратной связи и «-» в случае положительной обратной связи; произведение $\prod$ включает все s замкнутых контуров системы; знаком «*» обозначено исключение из скобки всех членов, держащих произведения передаточных функций одних тех же звеньев (включая звенья с передаточной функцией, равной единице).

Формула Мейсона позволяет получить выражение передаточной функции сложной системы без структурных преобразований.

Пример 7.1. Используя формулу (7.20), найдем передаточную функцию системы с перекрещивающимися обратными связями, представленной на рис. 7.3, а, в случае, когда разомкнута ГОС. Для этой схемы имеем один прямой путь ($r = 1$) с передаточной функцией $K_1(p) K_2(p) K_3(p)$ и два ($s = 2$) замкнутых контура с передаточной функцией $K_1(p) K_2(p) K_4(p)$, соответствующей положительной обратной связи, и передаточной функцией $K_2(p) K_3(p) K_5(p)$, соответствующей отрицательной обратной связи. Подставив эти значения в (7.20), получим

$$K(p) = \frac{\{K_1(p) K_2(p) K_3(p) [1 - K_1(p) K_2(p) K_4(p)] [1 + K_2(p) K_3(p) K_5(p)]\}^*}{\{[1 - K_1(p) K_2(p) K_4(p)] [1 + K_2(p) K_3(p) K_5(p)]\}^*}.$$

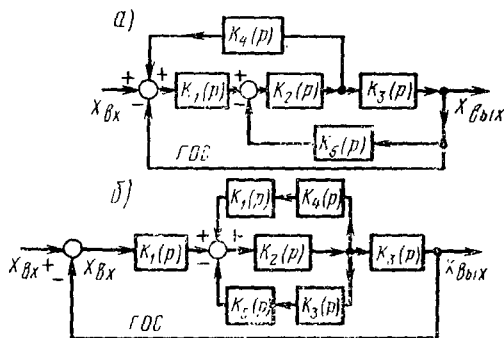


Рис. 7.3

После раскрытия скобок и исключения всех членов, содержащих произведения передаточных функций одних и тех же звеньев, найдем выражение

$$K(p) = \frac{K_1(p) K_2(p) K_3(p)}{1 - K_1(p) K_2(p) K_4(p) - K_2(p) K_3(p) K_5(p)}, \quad (7.21)$$

совпадающее с выражением (7.18), полученным в результате структурных преобразований.

Пример 7.2. Найдем передаточную функцию замкнутой системы, представленной на рис. 7.3, а, используя формулу Мейсона. Для этой схемы имеем один прямой путь ($r = 1$) с передаточной функцией $K_1(p) K_2(p) K_3(p)$ и три ($s = 3$) замкнутых контура с передаточной функцией $K_1(p) K_2(p) K_4(p)$, соответствующей положительной обратной связи, и с передаточными функциями $K_1(p) K_2(p) K_3(p)$ и $K_2(p) K_3(p) K_5(p)$, соответствующими отрицательным обратным связям. Подставив эти выражения в (7.20), получим

$$W(p) = \frac{\{K_1(p) K_2(p) K_3(p) [1 + K_1(p) K_2(p) K_3(p)] \times \\ \times [1 - K_1(p) K_2(p) K_4(p)] [1 - K_2(p) K_3(p) K_5(p)]\}^*}{[1 + K_1(p) K_2(p) K_3(p)] [1 - K_1(p) K_2(p) K_4(p)] [1 - K_2(p) K_3(p) K_5(p)]^*}.$$

После раскрытия скобок и исключения всех членов, содержащих произведения передаточных функций одних и тех же звеньев, найдем выражение

$$W(p) = \frac{K_1(p) K_2(p) K_3(p)}{1 - K_1(p) K_2(p) K_3(p) - K_1(p) K_2(p) K_4(p) - K_2(p) K_3(p) K_5(p)}, \quad (7.22)$$

совпадающее с (7.19).

§ 7.4. Получение операторного уравнения системы по структурной схеме

Выражение передаточной функции системы позволяет очень просто получить операторное уравнение, разрешенное относительно входной и выходной переменных. Для этого необходимо помнить, что передаточная функция равна отношению выходной и входной переменных, представленных в операторной форме.

На основании указанного запишем операторные уравнения разомкнутой системы, определяющие изображение выходной переменной при задающем и возмущающем воздействиях соответственно:

$$X_{\text{вых}}(p) = K(p) X_{\text{вх}}(p); \quad (7.23)$$

$$X_{\text{вых}}(p) = K_z(p) Z(p). \quad (7.24)$$

Подставив в эти выражения значения передаточных функций, получим операторное уравнение разомкнутой системы относительно выходной переменной. Для замкнутой системы на основании (7.15) найдем

$$X_{\text{вых}}(p) = W(p) X_{\text{вх}}(p) = \frac{K(p)}{1 + K(p)} X_{\text{вх}}(p). \quad (7.25)$$

Подставив выражение для $K(p)$ в (7.25), определим операторное уравнение замкнутой системы относительно выходной переменной при наличии входного воздействия. Относительно возмущающего воздействия на основании (7.17) получим

$$X_{\text{вых}}(p) = \frac{K_z(p)}{1 + K(p)} Z(p). \quad (7.26)$$

В некоторых случаях требуется определить ошибку регулирования замкнутой системы в операторной форме. Используя выражение $W_{\Delta x}(p)$, найдем

$$\Delta X(p) = -\frac{1}{1 + K(p)} X_{\text{вых}}(p). \quad (7.27)$$

Применив к уравнениям (7.23)—(7.27) обратное преобразование Лапласа при заданных внешних воздействиях, получим переходные функции и построим переходные характеристики системы.

§ 7.5. Частотные функции разомкнутых и замкнутых систем.

Методы построения частотных характеристик

Частотные функции автоматических систем можно получить заменой p на $j\omega$ в выражениях передаточных функций. Для разомкнутой системы:

$$K(j\omega) = B(j\omega)/A(j\omega), \quad (7.28)$$

для замкнутой системы:

относительно входного воздействия.

$$W(j\omega) = K(j\omega)/[1 + K(j\omega)] = B(j\omega)/[A(j\omega) + B(j\omega)]; \quad (7.29)$$

относительно возмущающего воздействия

$$W_z(j\omega) = K_z(j\omega)/[1 + K(j\omega)]; \quad (7.30)$$

относительно ошибки регулирования

$$W_{\Delta x}(j\omega) = 1/[1 + K(j\omega)]. \quad (7.31)$$

Частотные характеристики систем определяются частотными характеристиками звеньев, составляющих структурную схему автоматической системы.

Наиболее широко при анализе динамики систем применяются частотные характеристики разомкнутой системы.

Построение АФХ по частотным характеристикам звеньев. Для разомкнутой системы, состоящей из нескольких последовательно соединенных типовых звеньев, частотную функцию представим в виде произведения:

$$K(j\omega) = K_1(j\omega) K_2(j\omega) \dots K_n(j\omega) = \\ = A_1(\omega) e^{j\varphi_1(\omega)} A_2(\omega) e^{j\varphi_2(\omega)} \dots A_n(\omega) e^{j\varphi_n(\omega)}.$$

Используя правило перемножения векторов, результирующий вектор определим графически или аналитически, вычисляя результирующие амплитуды и фазы при различных частотах:

$$K(j\omega) = A_p(\omega) e^{j\varphi_p(\omega)}, \quad (7.32)$$

где

$$A_p(\omega) = A_1(\omega) A_2(\omega) \dots A_n(\omega); \quad (7.33)$$

$$\varphi_p(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \dots + \varphi_n(\omega). \quad (7.34)$$

При различных частотах вектор $K(j\omega)$ будет иметь различные значения. Концы этих векторов на комплексной плоскости определяют амплитудно-фазовую характеристику. Вектор $K(j\omega)$ можно построить графически по составляющим векторам и характеристикам звеньев.

Чтобы упростить построение частотных характеристик разомкнутых одноконтурных систем, используют логарифмические характеристики звеньев. В случае последовательного соединения инерционных звеньев первого порядка с общим коэффициентом усиления K следует по известным постоянным времени звеньев определить частоты сопряжения ω_c для асимптот $1'$, $2'$ и $3'$ (рис. 7.4) и построить результирующую ЛАХ путем суммирования безынерционной составляющей и асимптот. Результирующая фазовая характеристика (ЛФХ) определяется путем суммирования фазовых характеристик отдельных звеньев.

Важное значение в дальнейшем имеют критические точки A и B пересечения ЛАХ и ЛФХ с осью частот и горизонталью на уровне -180° .

При этом способе построения ЛАХ разомкнутой автоматической системы может быть рассчитана по (7.33) и построена путем суммирования ЛАХ типовых звеньев на основании формулы

$$G = 20 \lg A_p(\omega) = 20 \lg A_1(\omega) + 20 \lg A_2(\omega) + \dots + 20 \lg A_n(\omega). \quad (7.35)$$

Аналогично суммируются фазовые характеристики соответственно (7.34).

Кроме того, логарифмические характеристики можно построить непосредственно по передаточной функции разомкнутой системы, если нанести на график характеристики отдельных звеньев, а затем просуммировать их.

При параллельном соединении звеньев результирующая частотная функция определяется после суммирования вещественных и мнимых частей отдельных звеньев:

$$K(j\omega) = \sum_{i=1}^n K_i(j\omega) = \sum_{i=1}^n P_i(\omega) + j \sum_{i=1}^n Q_i(\omega). \quad (7.36)$$

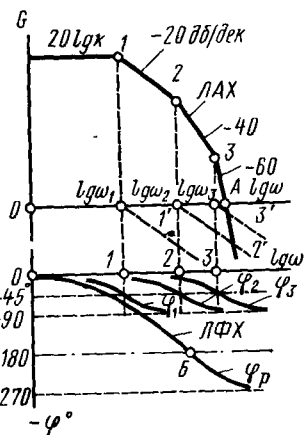


Рис. 7.4

Определение передаточной и частотной функций по кривой переходного процесса или импульсной переходной характеристике. Часто свойства одних элементов системы заданы их амплитудно-фазовыми характеристиками, а других — кривой переходного процесса. Это объясняется тем, что для некоторых элементов получение частотных характеристик сложнее, чем экспериментальное определение кривой переходного процесса. В таких случаях частотные характеристики можно построить по кривой переходного процесса [Л. 1, 38]. Рассмотрим один из способов такого построения.

Изображение производной выходной переменной в форме Лапласа

$$pX_{\text{вых}}(p) = \int_0^{\infty} x'_{\text{вых}}(t)e^{-pt} dt. \quad (7.37)$$

При единичном входном воздействии можно записать

$$X_{\text{вых}}(p) = K(p)p^{-1}. \quad (7.38)$$

С учетом (7.37) и (7.38)

$$K(p) = pX_{\text{вых}}(p) = \int_0^{\infty} x'_{\text{вых}}(t)e^{-pt} dt. \quad (7.39)$$

На основании (7.39) сделаем очень важный вывод: передаточная функция $K(p)$ разомкнутой системы может быть определена по импульсной переходной функции $x'_{\text{вых}}(t)$ разомкнутой системы. Этот вывод распространяется и на взаимосвязь между передаточной функцией $W(p)$ замкнутой системы и ее импульсной переходной функцией, т. е. импульсная переходная характеристика может быть использована для определения передаточной и частотной функций системы.

Если заменить кривую переходной характеристики отрезками прямых линий, то для каждого прямолинейного участка производная выходной переменной по времени будет постоянной величиной:

$$x'_{\text{вых}}(t) = \gamma_i = \text{const}. \quad (7.40)$$

В этом случае для некоторого участка вместо (7.39) получим

$$K(p) = \gamma_i \int_0^{\infty} e^{-pt} dt. \quad (7.41)$$

Производя суммирование по всем участкам и замену p на $j\omega$, а также учитывая формулы Эйлера, найдем

$$K(j\omega) = \sum_{i=1}^n \gamma_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\cos \omega t - j \sin \omega t) dt. \quad (7.42)$$

Выражение (7.42) позволяет рассчитать и построить АФХ элемента (или системы), если известна переходная характеристика.

Экспериментальное определение частотных характеристик. Амплитудно-фазовая характеристика звена или системы (как разомкнутой, так и замкнутой) в некоторых случаях может определяться экспериментальным способом. Подавая на вход автоматической системы гармонические сигналы постоянной амплитуды и различной частоты ω , осциллографируют установившиеся колебания выходной переменной. Определив по осциллограмме амплитуду A и фазу φ выходной переменной, находят точку АФХ. Для различных частот будут получены различные точки АФХ. Имеются специальные приборы, которые вычерчивают АФХ при экспериментальном определении.

§ 7.6. Построение логарифмических частотных характеристик многоконтурной системы с неперекрещивающимися обратными связями

В многоконтурной автоматической системе при разомкнутой ГОС имеются участки цепи, охваченные внутренней обратной связью. Передаточная функция такого участка

$$K(p) = \frac{K_a(p)}{1 + K_a(p) K_b(p)}, \quad (7.43)$$

где $K_a(p)$ — передаточная функция участка главной цепи, охваченного обратной связью; $K_b(p)$ — передаточная функция цепи обратной связи.

Выражение (7.43) можно преобразовать умножением и делением на $K_b(p)$:

$$K(p) = \frac{1}{K_b(p)} \cdot \frac{K_a(p) K_b(p)}{1 + K_a(p) K_b(p)} = \frac{1}{K_b(p)} \cdot \frac{K_c(p)}{1 + K_c(p)}, \quad (7.44)$$

где

$$K_c(p) = K_a(p) \cdot K_b(p).$$

На основании (7.43) можно записать частотную функцию

$$K(j\omega) = \frac{1}{K_b(j\omega)} \cdot \frac{K_c(j\omega)}{1 + K_c(j\omega)}. \quad (7.45)$$

Второй сомножитель соответствует выражению для замкнутого контура:

$$W_c(j\omega) = \frac{K_c(j\omega)}{1 + K_c(j\omega)}, \quad (7.46)$$

поэтому вместо (7.45) запишем

$$K(j\omega) = W_c(j\omega) / K_b(j\omega). \quad (7.47)$$

Определяя логарифмические характеристики по (7.46) и вычитая логарифмические характеристики, соответствующие члену $K_b(j\omega)$, получим логарифмические характеристики замкнутого участка цепи с обратной связью. Суммируя затем полученную характеристику с логарифмическими характеристиками других последовательно включенных звеньев или участков, определим характеристику всей системы.

Из указанного следует, что при исследовании многоконтурных систем необходимо уметь находить логарифмические частотные характеристики, соответствующие (7.46). При этом может быть применен аналитический способ расчета по выражению:

$$W_c(j\omega) = P_c(\omega) + jQ_c(\omega), \quad (7.48)$$

откуда

$$A_c(\omega) = \sqrt{P_c^2(\omega) + Q_c^2(\omega)}; \quad (7.49)$$

$$\varphi_c(\omega) = \arctg [Q_c(\omega)/P_c(\omega)]. \quad (7.50)$$

Подставляя различные значения ω , можно определять $A_c(\omega)$, $\varphi_c(\omega)$ и по ним строить логарифмические характеристики.

При графическом методе построения логарифмических характеристик, соответствующих (7.46), используются специальные номограммы (рис. 7.5). По логарифмическим характеристикам $K_c(j\omega)$ и номограмме определяются характеристики замкнутого участка [Л. 35].

Если функции $W_c(j\omega)$ и $K_c(j\omega)$ представить в виде

$$W_c(j\omega) = A_c(\omega) e^{j\varphi(\omega)}; \quad (7.51)$$

$$K_c(j\omega) = H_c(\omega) e^{j\theta(\omega)}, \quad (7.52)$$

то вместо (7.46) можно записать

$$A_c e^{j\varphi} = \frac{H_c e^{j\theta}}{1 + H_c e^{j\theta}}. \quad (7.53)$$

Полученные выражения позволяют указать правило пользования номограммой.

На рис. 7.5. указаны кривые постоянных значений φ° и G , где значения модуля G в децибелах даны без скобок, а в относительных единицах — в скобках. По известным логарифмическим характеристикам $H_c(\omega)$ и $\theta(\omega)$ для различных значений частоты ω строят характеристику $G_c(\theta)$, где $G_c = 20 \lg H_c$. Эту характеристику наносят на номограмму. Если кривая $G_c(\theta)$ пересекает одну из кривых номо-

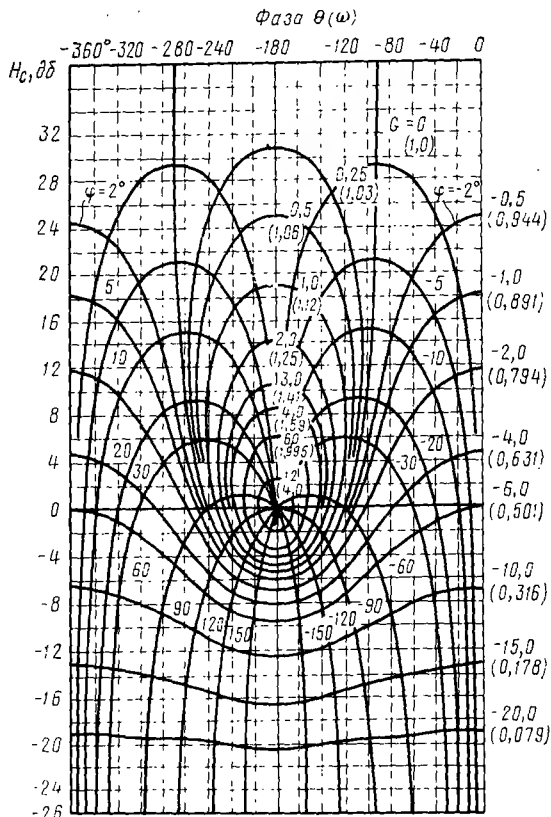


Рис. 7.5

граммы, имеющую индекс G_1 при некотором значении $\omega = \omega_1$, то это означает, что при этом значении ω ЛАХ, соответствующая (7.46), имеет значение G_1 . Точно так же, если при ω_1 кривая $G_c(\theta)$ пересекает одну из кривых номограммы, имеющую индекс Φ_1^0 , то при $\omega = \omega_1$ фазовая характеристика $\varphi(\omega)$, соответствующая (7.50), имеет значение Φ_1^0 . Таким образом могут быть получены точки и построены кривые $G_c(\omega)$ и $\varphi_c(\omega)$.

Далее, вычитая из логарифмических характеристик $G_c(\omega)$ и $\varphi_c(\omega)$, соответствующих (7.46), логарифмические характеристики, соответствующие $K_b(j\omega)$, можно получить логарифмические характеристики замкнутого участка цепи системы.

Достаточная точность построения характеристик по номограммам обеспечивается при значениях $-20 \text{ дБ} \leq G_c \leq 20 \text{ дБ}$.

§ 7.7. Составление и преобразование структурной схемы автоматической системы

Рассмотрим в качестве примера схему автоматической системы регулирования скорости вращения электродвигателя (см. рис. 4.2). Используя условную схему системы (см. рис. 4.3) и систему уравнений, характеризующую динамику всех элементов (см. § 4.4), получим передаточные функции элементов и составим структурную схему системы. Далее, производя структурные преобразования, найдем передаточные функции разомкнутой и замкнутой систем, а также частотные функции.

На основании уравнения моментов запишем

$$K_d(p) = \Delta\omega_d(p) / \Delta M(p) = 1/Jp, \quad (7.54)$$

где

$$\Delta M = \Delta M_d - \Delta M_c; \quad (7.55)$$

$$K_M(p) = \Delta M_d(p) / \Delta I_A(p) = C_M \Phi_d. \quad (7.56)$$

На основании уравнения равновесия э. д. с. цепи якоря двигателя определим

$$K_A(p) = \Delta I_A(p) / \Delta E_A(p) = 1/[r_A(1 + T_A p)], \quad (7.57)$$

где

$$\Delta E_A = \Delta E_{\Gamma} - \Delta E_d; \quad T_A = L_A/r_A; \quad (7.58)$$

$$K_e(p) = \Delta E_d(p) / \Delta\omega_d(p) = C_e \Phi_d. \quad (7.59)$$

Из уравнений э. д. с. цепи возбуждения генератора и э. д. с. якоря получим передаточные функции:

$$K_{\Gamma}'(p) = \Delta I_{\Gamma}(p) / \Delta U_{\Gamma}(p) = 1/[r_{\Gamma}(1 + T_{\Gamma} p)], \quad (7.60)$$

где

$$T_{\Gamma} = L_{\Gamma}/r_{\Gamma}; \quad (7.61)$$

$$K_{\Gamma}''(p) = \Delta E_{\Gamma}(p) / \Delta I_{\Gamma}(p) = k_{\Gamma}'. \quad (7.62)$$

По уравнениям для выходной ступени ЭМУ запишем:

$$K_{K.3}'(p) = \Delta I_{K.3}(p) / \Delta E_{K.3}(p) = [r_{K.3}(1 + T_{K.3} p)]^{-1}, \quad (7.63)$$

где

$$T_{K.3} = L_{K.3}/r_{K.3}; \quad (7.64)$$

$$K_{K.3}''(p) = \Delta U_{\Gamma}(p) / \Delta I_{K.3}(p) = k_{K.3}'. \quad (7.65)$$

Из уравнений выхода первой ступени ЭМУ получим

$$K'_y(p) = \Delta \Phi_y(p) / \Delta U_y(p) = k'_y / (1 - T_{\text{эвб}} p); \quad (7.66)$$

$$K''_y(p) = \Delta E_{\kappa.з}(p) / \Delta \Phi_y(p) = C_{\text{эв}} n_{\text{в}}; \quad (7.67)$$

$$\Delta U_y = (k'_1 / k'_2) \Delta U_0 + \Delta U_{\text{э.у}}, \quad (7.68)$$

где

$$T_{\text{эвб}} = T_y + T_1 = \frac{2 \cdot 2 p \sigma}{a_{\text{в}}} \left(\frac{\omega_y^2}{r_y} + \frac{\omega_1^2}{r_1} \right); \quad (7.69)$$

$$k'_1 = 2 \omega_1 / (a_{\text{в}} r_1); \quad k'_y = 2 \omega_y / (a_{\text{в}} r_y). \quad (7.70)$$

Из уравнения равновесия э. д. с. входа ЭМУ найдем

$$\Delta U_y = \Delta U'_0 + \Delta U_{\text{э.у}}; \quad (7.71)$$

$$K_0(p) = \Delta U'_0(p) / \Delta U_0(p) = k'_1 / k'_y. \quad (7.72)$$

На основании уравнений для электронного усилителя определим

$$K_{\text{э.у}}(p) = \Delta U_{\text{э.у}}(p) / \Delta U(p) = k_{\text{э.у}}; \quad (7.73)$$

$$\Delta U = \Delta U_{\text{э}} - \Delta U_{\text{тг}}. \quad (7.74)$$

По уравнению тахогенератора запишем

$$K_{\text{тг}}(p) = \Delta U_{\text{тг}}(p) / \Delta \omega_{\text{тг}}(p) = k_{\text{тг}}. \quad (7.75)$$

Используя передаточные функции элементов системы и уравнения узлов суммирования сигналов (7.54) - (7.75), а также принципиальную и условную схемы (см. рис. 4.2 и 4.3) системы регулирования, составим структурную схему (рис. 7.6). Выходной управляемой переменной будет скорость вращения двигателя, представленная на структурной схеме в виде отклонения $\Delta \omega_{\text{д}}$; возмущающим воздействием (нагрузка) — изменение момента сопротивления на валу электродвигателя $\Delta M_{\text{с}}$; внешними воздействиями будут отклонения напряжения, прикладываемого к задающей обмотке управления ΔU_0 , и отклонения напряжения эталонного источника сравнения $\Delta U_{\text{э}}$; последнее (управляющий сигнал) определит заданное (предписанное) значение управляемой переменной.

В случае необходимости учета каких-либо дополнительных факторов следует составить уравнение относительно воздействия, вводимого в рассмотрение, и отметить на структурной схеме место его ввода.

В случае возмущающего воздействия $\Delta M_{\text{с}} \neq 0$ по структурной схеме (см. рис. 7.6) можно составить выражения передаточных функций для разомкнутой $K_z(p)$ и замкнутой $W_z(p)$ систем:

$$K_z(p) = \frac{K_{\text{д}}(p)}{1 + K_e(p) K_{\text{я}}(p) K_{\text{м}}(p) K_{\text{д}}(p)}; \quad (7.76)$$

$$W_z(p) = \frac{K_z(p)}{1 + K_z(p) K_{\text{о.с}}(p)} = \frac{K_{\text{д}}(p)}{1 + [K_e(p) + K_{\text{эвб}}(p)] K_{\text{я}}(p) K_{\text{м}}(p) K_{\text{д}}(p)}, \quad (7.77)$$

где

$$\left. \begin{aligned} K'_{\text{о.с}}(p) &= K_{\text{эвб}}(p) \cdot K_{\text{я}}(p) \cdot K_{\text{м}}(p); \\ K_{\text{эвб}}(p) &= K_{\text{тг}}(p) \cdot K_{\text{э.у}}(p) \cdot K_y(p) \cdot K_{\kappa.з}(p) \cdot K_{\Gamma}(p); \\ K_y(p) &= K'_y(p) \cdot K''_y(p); \\ K_{\kappa.з}(p) &= K'_{\kappa.з}(p) \cdot K''_{\kappa.з}(p); \\ K_{\Gamma}(p) &= K'_{\Gamma}(p) \cdot K''_{\Gamma}(p). \end{aligned} \right\} \quad (7.78)$$

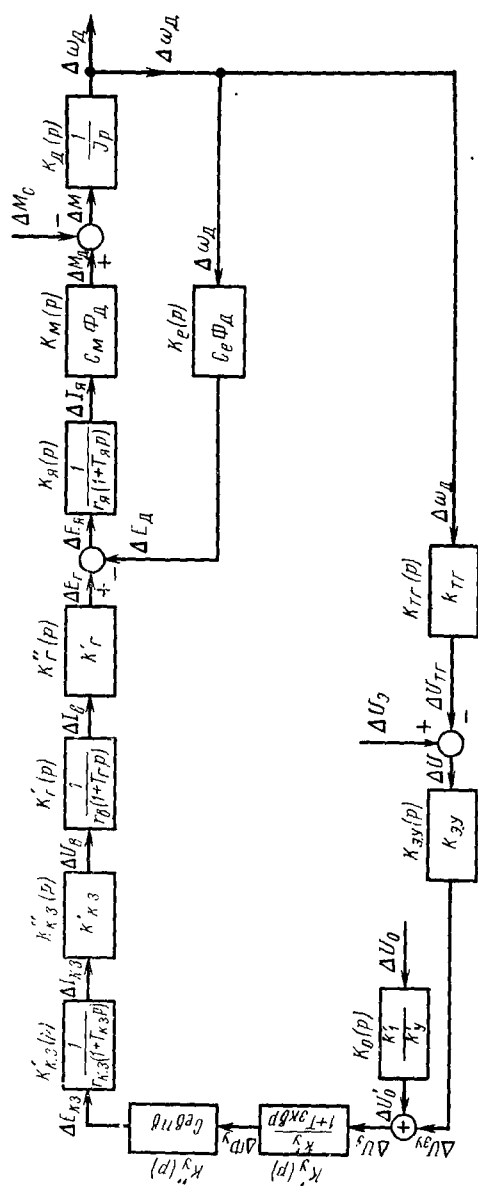


Рис. 7.6

При определении $W_z(p)$ структурная схема была преобразована для выделения точки приложения возмущающего воздействия (рис. 7.7, а). Это позволяет указать две параллельные обратные связи, учитывающие действие противо-з. д.с. двигателя M_d и главной отрицательной обратной связи, обуславливающей изменение составляющей момента M_d'' . На основании рис. 7.7, а запишем передаточную функцию эквивалентной обратной связи в виде двух отрицательных параллельных обратных связей:

$$K_{o.c}(p) = K_e(p) K_A(p) K_M(p) + K_{эв}(p) K_A(p) K_M(p). \quad (7.79)$$

Указанное здесь преобразование дает возможность составить эквивалентную структурную схему (рис. 7.7, б) и определить передаточную функцию замкнутой системы:

$$W_z(p) = \frac{K_d(p)}{1 + K_d(p) K_{o.c}(p)} = \frac{K_d(p)}{1 + [K_e(p) + K_{эв}(p)] K_A(p) K_M(p) K_d(p)}. \quad (7.80)$$

На основании (7.80) и рис. 7.6 получим

$$W_z(p) = - \frac{\Delta \omega_d(p)}{\Delta M_c(p)} = \frac{K' (1 + T_{эв} p) (1 + T_{к.з} p) (1 + T_{г} p) (1 + T_{я} p)}{[T_{эм} p (1 + T_{я} p) + 1] (1 + T_{эв} p) (1 + T_{к.з} p) (1 + T_{г} p) + K}. \quad (7.81)$$

Следовательно, операторное уравнение замкнутой системы по возмущающему воздействию ΔM_c имеет вид

$$\begin{aligned} & [(T_{эм} T_{я} p^2 + T_{эм} p + 1) (1 + T_{эв} p) \times \\ & \times (1 + T_{к.з} p) (1 + T_{г} p) + K] \Delta \omega_d(p) = \\ & = -K' (1 + T_{эв} p) (1 + T_{к.з} p) \times \\ & \times (1 + T_{г} p) (1 + T_{я} p) \Delta M_c(p). \end{aligned} \quad (7.82)$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы на основании (7.82)

$$(T_{эм} T_{я} p^2 + T_{эм} p + 1) (1 + T_{эв} p) \times \\ \times (1 + T_{к.з} p) (1 + T_{г} p) + K = 0. \quad (7.83)$$

В формулах (7.81) — (7.83)

$$\left. \begin{aligned} K' &= r_A / (C_e C_M \Phi_d^2); \\ T_{эм} &= J r_A / (C_e C_M \Phi_d^2); \\ K &= k_y k_{к.з} k_{г} k_{э.у} k_{тг} k_d. \end{aligned} \right\} \quad (7.84)$$

Здесь $k_y = k'_{y} C_{эв} n_b$; $k_{к.з} = k'_{к.з} / r_{к.з}$; $k_{г} = k'_{г} / r_b$; $k_d = 1 / (C_e \Phi_d)$.

Уравнение (7.82) может быть получено также аналитически после совместного решения уравнений элементов системы, приведенных в § 4.4. Таким образом, уравнение системы может быть получено как аналитически, так и при помощи структурных преобразований. Уравнение (7.82) показывает, что с увеличением нагрузки ($\Delta M_c > 0$) происходит уменьшение скорости вращения ($\Delta \omega_d < 0$) и наоборот. На основании рис. 7.6 также можно получить передаточные функции для разомкнутой и замкнутой систем относительно задающего воздействия

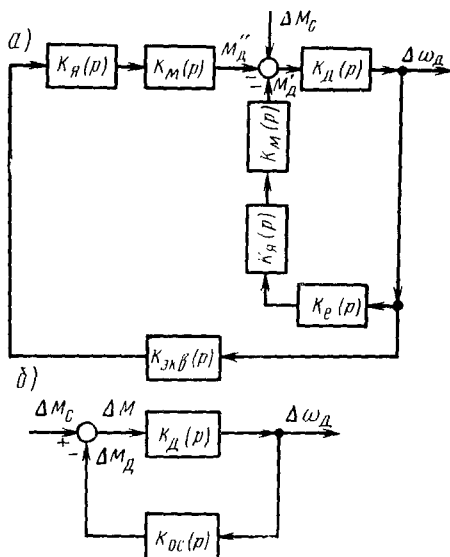


Рис. 7.7

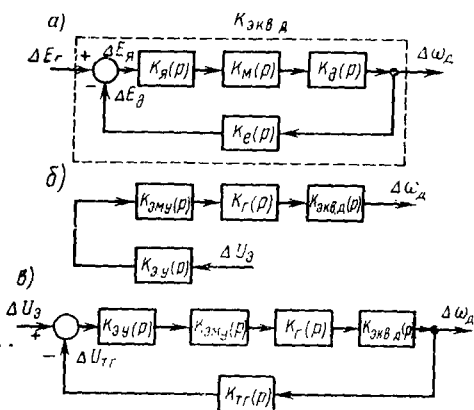
на входе электронного усилителя $\Delta U_{\text{в}} \neq 0$. Для облегчения преобразований (полагая $\Delta M_{\text{с}} = 0$) электрический двигатель можно представить одним эквивалентным звеном $K_{\text{эв.д.}}(p)$, для которого входом является э. д. с. генератора, а выходом — скорость вращения (рис. 7.8, а). При этом эквивалентная передаточная функция двигателя

$$K_{\text{эв.д.}}(p) = \frac{K_{\text{н}}(p) K_{\text{м}}(p) K_{\text{д}}(p)}{1 + K_{\text{е}}(p) K_{\text{я}}(p) K_{\text{м}}(p) K_{\text{д}}(p)} \quad (7.85)$$

Подставляя в (7.85) выражения передаточных функций звеньев (см. рис. 7.6) и производя преобразования с учетом (7.84), получим

$$K_{\text{эв.д.}}(p) = \frac{1}{C_{\text{с}} \Phi_{\text{д}} (T_{\text{эм}} T_{\text{я}} p^2 + T_{\text{эм}} p + 1)} \quad (7.86)$$

Рис. 7.8



В случае разомкнутой цепи обратной связи (см. рис. 7.8, б) для задающего воздействия $\Delta U_{\text{в}} \neq 0$ передаточная функция разомкнутой системы

$$K_1(p) = K_{\text{у.у}}(p) K_{\text{эв.д.}}(p) K_{\text{г}}(p) K_{\text{н.з.д.}}(p).$$

Учитывая передаточные функции звеньев, после преобразований найдем передаточную функцию разомкнутой системы относительно воздействия в виде $\Delta U_{\text{в}}$:

$$K_1(p) = \frac{\Delta \omega_{\text{д}}(p)}{\Delta U_{\text{в}}(p)} = \frac{K_1}{(1 + T_{\text{эв.д.}} p) (1 + T_{\text{н.з.}} p) (1 + T_{\text{г}} p) (T_{\text{эм}} T_{\text{я}} p^2 + T_{\text{эм}} p + 1)} \quad (7.87)$$

где $K_1 = k_{\text{у}} k_{\text{н.з.}} k_{\text{эв.д.}} k_{\text{д}}$ — коэффициент передачи.

Для замкнутой системы (рис. 7.8, в)

$$W_1(p) = K_1(p) [1 + K_{\text{тг}}(p) K_1(p)]^{-1}.$$

Подставив (7.87), после преобразований с учетом (7.84) получим передаточную функцию замкнутой системы относительно задающего воздействия в виде $\Delta U_{\text{в}}$:

$$W_1(p) = \frac{\Delta \omega_{\text{д}}(p)}{\Delta U_{\text{в}}(p)} = \frac{K_1}{(1 + T_{\text{эв.д.}} p) (1 + T_{\text{н.з.}} p) (1 + T_{\text{г}} p) (T_{\text{эм}} T_{\text{я}} p^2 + T_{\text{эм}} p + 1) + K} \quad (7.88)$$

Аналогичный результат будет получен, если применить формулу (7.20). Операторное уравнение для данного случая будет иметь вид:

$$[(T_{\text{эм}} T_{\text{я}} p^2 + T_{\text{эм}} p + 1) (1 + T_{\text{эв.д.}} p) (1 + T_{\text{н.з.}} p) (1 + T_{\text{г}} p) + K] \Delta \omega_{\text{д}}(p) = K_1 \Delta U_{\text{в}}(p). \quad (7.89)$$

На основании (7.89) можно записать характеристическое уравнение замкнутой системы, которое будет аналогично (7.83). Из (7.89) видно, что с увеличением напряжения эталонного источника сравнения ($\Delta U_{\text{в}} > 0$) происходит

увеличение скорости вращения двигателя ($\Delta\omega_d > 0$) и наоборот. Указанный случай задающего воздействия можно рассматривать как настройку регулятора.

В случае возмущающего воздействия на входе электромашиного усилителя $\Delta U_0 \neq 0$ можно получить передаточные функции для разомкнутой и замкнутой систем (см. рис. 7.6). Аналогично предыдущему случаю электродвигатель представим эквивалентным звеном $K_{\text{эв.д}}(p)$.

Передаточная функция разомкнутой системы относительно воздействия на входе задающей обмотки управления ЭМУ будет определяться структурной схемой, представленной на рис. 7.9, а:

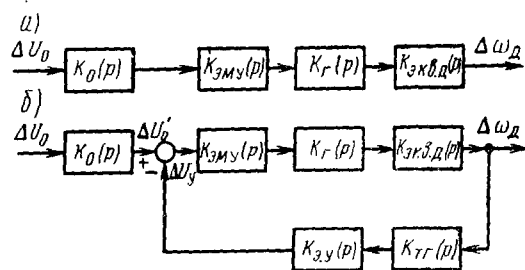


Рис. 7.9

$$K_2(p) =$$

$$= K_0(p) K_{\text{эму}}(p) K_r(p) K_{\text{эв.д}}(p). \quad (7.90)$$

С учетом передаточных функций звеньев получим передаточную функцию разомкнутой системы относительно воздействия в виде ΔU_0 :

$$K_2(p) = \frac{\Delta\omega_d(p)}{\Delta U_0(p)} = \frac{K_2}{(1 + T_{\text{эв}} p)(1 + T_{\text{к.з}} p)(1 + T_r p)(T_{\text{эм}} T_{\text{я}} p^2 + T_{\text{эм}} p + 1)}. \quad (7.91)$$

где $K_2 = k_1 k_{\text{к.з}} k_r k_d$ — коэффициент передачи.

Для замкнутой системы (рис. 7.9, б), считая обратную связь относительно данного узла суммирования отрицательной, получим

$$W_2(p) = K_0(p) \frac{K'_2(p)}{1 + K''_{\text{о.с}}(p) K'_2(p)} = \frac{K_2(p)}{1 + K''_{\text{о.с}}(p) K'_2(p)}. \quad (7.92)$$

где

$$\left. \begin{aligned} K_2(p) &= K_0(p) K'_2(p); \\ K'_2(p) &= K_{\text{эму}}(p) K_r(p) K_{\text{эв.д}}(p); \\ K''_{\text{о.с}}(p) &= K_{\text{тг}}(p) K_{\text{э.у}}(p). \end{aligned} \right\} \quad (7.93)$$

Учитывая передаточные функции и выполняя преобразования, вместо (7.92) найдем передаточную функцию замкнутой системы относительно воздействия в виде ΔU_0 :

$$W_2(p) = \frac{\Delta\omega_d(p)}{\Delta U_0(p)} = \frac{K_2}{(1 + T_{\text{эв}} p)(1 + T_{\text{к.з}} p)(1 + T_r p)(T_{\text{эм}} T_{\text{я}} p^2 + T_{\text{эм}} p + 1) + K}. \quad (7.94)$$

Операторное уравнение замкнутой системы для данного воздействия будет иметь вид

$$\begin{aligned} [(T_{\text{эм}} T_{\text{я}} p^2 + T_{\text{эм}} p + 1)(1 + T_{\text{эв}} p)(1 + T_{\text{к.з}} p)(1 + T_r p) + K] \Delta\omega_d(p) = \\ = K'_2 \Delta U_0(p). \end{aligned} \quad (7.95)$$

Уравнение (7.95) показывает, что с увеличением напряжения на задающей обмотке управления ЭМУ ($\Delta U_0 > 0$) будет расти скорость вращения двигателя ($\Delta \omega_d > 0$) и наоборот. На основании (7.95) можно записать характеристическое уравнение замкнутой системы, аналогичное (7.83).

Характеристическое уравнение и левая часть операторных уравнений замкнутой системы (7.82), (7.89) и (7.95) имеют один вид, независимо от того, относительно какого воздействия (и в какой точке системы оно приложено) рассматривается динамика системы.

Подобным же образом можно рассматривать любую автоматическую систему.

Следует еще раз подчеркнуть, что вид передаточных функций и операторных уравнений любой рассматриваемой системы существенно зависит от того, в каком месте системы приложено внешнее воздействие и какая переменная принимается в качестве выходной.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется структурной схемой и что она характеризует?
2. Укажите основные обозначения, применяемые на структурных схемах.
3. Какие способы соединения звеньев встречаются на структурной схеме и как определяется эквивалентная передаточная функция отдельных участков цепи и системы?
4. Объясните методы построения частотных характеристик автоматических систем.

Глава 8

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ СИСТЕМ

Основной динамической характеристикой автоматической системы является ее устойчивость. В зависимости от характера переходного процесса линеаризованной системы различают три основных случая поведения системы после возмущающего воздействия [Л. 24, 35]:

1) система не может восстановить равновесного состояния, значение управляемой переменной все больше отклоняется от заданного; такой процесс называется *расходящимся*, а система — *неустойчивой*;

2) система возвращается к равновесному состоянию, значение управляемой переменной отличается от заданного на величину статической погрешности системы; такой переходный процесс будет *сходящимся*, а система — *устойчивой*;

3) система характеризуется установившимся периодическим движением; такой процесс называется *незатухающим колебательным*, а система будет *находиться на границе асимптотической устойчивости*.

§ 8.1. Методы определения устойчивости

Устойчивость линейных систем не зависит от величины возмущения; система, устойчивая при малых возмущениях, будет устойчивой и при больших возмущениях. Поэтому для суждения об устойчивости

линейных систем достаточно исследовать и определить устойчивость «в малом», т. е. найти устойчивость по уравнениям в форме приращений. При этом судить об устойчивости можно по корням характеристического уравнения замкнутой системы.

Если динамика системы точно описывается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, то устойчивость «в малом» обеспечивает неограниченную устойчивость системы. Нелинейные системы, описываемые нелинейными дифференциальными уравнениями, могут быть устойчивыми при малых возмущениях и неустойчивыми при больших.

Процессы, происходящие в большей части реальных систем, описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, которые для упрощения исследования могут быть линеаризованы. Тогда исследование реальной (действительной) системы заменится исследованием линеаризованной системы.

Правильность суждения об устойчивости реальной системы «в малом» по линеаризованным уравнениям доказана А. М. Ляпуновым [Л. 22].

При некоторых общих условиях справедливо следующее (первая теорема А. М. Ляпунова):

1. Если характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет все корни с отрицательными вещественными частями, то действительная система устойчива. При этом никакие отброшенные при линеаризации члены второй и высших степеней отклонения переменных не могут изменить устойчивость системы.

2. Если характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет хотя бы один корень с положительной вещественной частью, то действительная система неустойчива. При этом никакие отброшенные при линеаризации члены второй и высших степеней отклонения переменных не могут придать системе устойчивость.

3. Если характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет хотя бы один нулевой корень или пару чисто мнимых сопряженных корней, то поведение действительной системы не может определяться ее линеаризованным уравнением. В этом случае отброшенные при линеаризации уравнения члены второй и высшей степеней отклонения переменных коренным образом изменяют описание динамического процесса реальной системы.

Аналитическая формулировка условия устойчивости сводится к тому, что возникшая в результате нарушения равновесия абсолютная величина отклонения управляемой переменной от заданного значения по истечении достаточно длительного промежутка времени должна стать меньше некоторого заранее заданного значения ϵ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\Delta x(t)| \leq \epsilon. \quad (8.1)$$

Для астатической системы ошибка регулирования равна нулю, поэтому $\epsilon = 0$. При аналитическом исследовании динамических свойств автоматической системы надо составить для нее дифференциальное уравнение и проинтегрировать его. Это означает, что будет найден закон изменения интересующей нас переменной во времени, согласно

которому можно сделать заключение о характере переходного процесса (устойчивый или неустойчивый).

Для решения указанной задачи необходимо найти свободное движение системы, которое описывается однородным дифференциальным уравнением:

$$a_0 \frac{d^n x_{св}}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x_{св}}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx_{св}}{dt} + a_n x_{св} = 0, \quad (8.2)$$

где $a_0, a_1, \dots, a_n$ — постоянные коэффициенты, определяемые параметрами системы; $x_{св}$ — свободное движение системы, определяющее динамическую ошибку.

На основании (8.2) можно записать характеристическое уравнение системы:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0. \quad (8.3)$$

Уравнение (8.3) определяет корни, характеризующие свободное движение. Известно, что при отрицательных вещественных корнях составляющая свободного движения при $t \rightarrow \infty$ монотонно убывает до нуля (рис. 8.1, а). Для пары комплексных корней с отрицательной вещественной частью составляющая свободного движения при $t \rightarrow \infty$ также убывает до нуля по закону затухающих колебаний (рис. 8.1, б).

Аналитические выражения составляющих свободного движения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} x_i &= A_i e^{\alpha_i t}; \\ x_i &= A_i e^{\alpha_i t} \sin(\beta_i t + \varphi_i), \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

где A_i — постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий; p_i — корни уравнения (8.3); α_i — вещественная часть корня (интенсивность затухания колебаний); β_i — мнимая часть корня (частота собственных колебаний); φ_i — начальная фаза.

Система будет устойчивой при отрицательных корнях и отрицательных вещественных частях корней. В случае положительного вещественного корня составляющая свободного движения при $t \rightarrow \infty$ будет неограниченно возрастать (рис. 8.1, в). Для пары комплексных корней с положительной вещественной частью составляющая свободного движения при $t \rightarrow \infty$ также будет возрастать по закону расходящихся колебаний (рис. 8.1, г).

Если среди корней характеристического уравнения (8.3) будет хотя бы одна пара чисто мнимых, то появится составляющая свободного движения в виде незатухающего колебательного процесса; система будет находиться на границе устойчивости и неустойчивости.

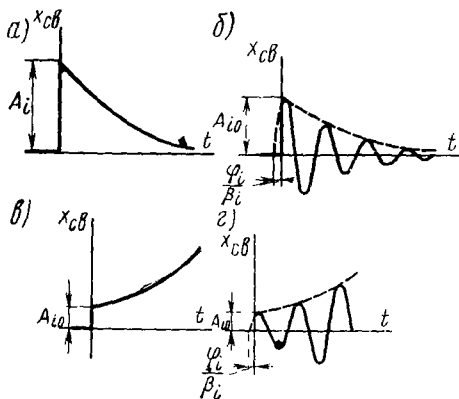


Рис. 8.1

Таким образом, необходимым и достаточным условием устойчивости системы является соблюдение того, чтобы все корни лежали в левой полуплоскости (рис. 8.2).

Значения коэффициентов характеристического уравнения, при которых по крайней мере одна пара комплексных корней находится на мнимой оси, а все остальные корни расположены в левой полуплоскости, определяют границу устойчивости. Граница устойчивости делит совокупность значений коэффициентов характеристического уравнения на две области: одна соответствует устойчивости системы, другая — неустойчивости.

Анализируя коэффициенты уравнения (8.3), можно установить, что они зависят только от постоянных времени и коэффициентов усиления звеньев системы.

Возникновению неустойчивости, как правило, способствует увеличение коэффициента усиления системы. В некоторых частных случаях уменьшение этого коэффициента может привести к нарушению устойчивости. Такие системы называются *условно устойчивыми*.

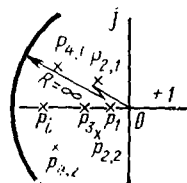


Рис. 8.2

Для суждения об устойчивости структурно устойчивых линейных систем надо определить расположение корней характеристического уравнения на комплексной плоскости. При этом можно не вычислять корни характеристического уравнения, надо лишь выяснить, все ли корни расположены слева от мнимой оси.

Обычно встречаются две постановки этой задачи: 1) можно считать, что заданы все параметры системы, и необходимо определить, устойчива ли система при этих значениях параметров; 2) необходимо определить значения некоторых параметров (при заданных остальных), при которых система устойчива.

Математическая формулировка условий, которым должны удовлетворять коэффициенты характеристического уравнения или какие-либо функции этих коэффициентов, чтобы система была устойчивой, называется *критерием устойчивости* [Л. 10]. Критерии устойчивости делятся на алгебраические и частотные; они позволяют выяснить, все ли корни характеристического уравнения замкнутой системы находятся в левой полуплоскости без решения этого уравнения.

§ 8.2. Получение характеристического уравнения.

Условие устойчивости линейной
(линеаризованной) системы

При исследовании устойчивости замкнутой системы в зависимости от критерия устойчивости требуется рассмотреть характеристическое уравнение либо только замкнутой системы, либо разомкнутой системы и ее частотные функции. В общем случае операторное уравнение разомкнутой системы имеет вид

$$A(p) X_{вх}(p) = B(p) X_{вых}(p) + C(p) Z(p). \quad (8.5)$$

Характеристическое уравнение определяется однородным дифференциальным уравнением, поэтому для разомкнутой системы из (8.5), приравняв нулю оператор при выходной переменной, получим

$$A(p) = 0. \quad (8.6)$$

При рассмотрении (8.6) и передаточных функций разомкнутой системы

$$K_1(p) = B(p)/A(p); \quad (8.7)$$

$$K_2(p) = C(p)/A(p) \quad (8.8)$$

можно видеть, что характеристическое уравнение системы определяется полиномом знаменателя (собственным оператором системы) передаточной функции (8.7). Это уравнение используется крайне редко (например при определении устойчивости разомкнутой системы в случае критерия Найквиста).

Наиболее важное значение имеет характеристическое уравнение замкнутой системы. Используя (8.5), для замкнутой системы можно записать

$$A(p) X_{\text{вых}}(p) = B(p) \Delta X(p) + C(p) Z(p), \quad (8.9)$$

или

$$A(p) X_{\text{вых}}(p) = B(p) [X_{\text{вх}}(p) - X_{\text{вых}}(p)] + C(p) Z(p), \quad (8.10)$$

откуда

$$[A(p) + B(p)] X_{\text{вых}}(p) = B(p) X_{\text{вх}}(p) + C(p) Z(p). \quad (8.11)$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы на основании (8.11) представится как

$$A(p) + B(p) = 0. \quad (8.12)$$

При рассмотрении (8.12) и передаточных функций замкнутой системы

$$\left. \begin{aligned} W(p) &= \frac{B(p)}{A(p) + B(p)} = \frac{K_1(p)}{1 + K_1(p)}; \\ W_2(p) &= \frac{C(p)}{A(p) + B(p)} = \frac{K_2(p)}{1 + K_1(p)} \end{aligned} \right\} \quad (8.13)$$

можно видеть, что ее характеристическое уравнение определяется знаменателем передаточной функции (8.13). Как следует из (8.12) и (8.13), характеристическое уравнение замкнутой линейной системы не зависит от того, относительно какой переменной составляется дифференциальное уравнение системы и какие возмущающие и задающие воздействия в систему вводятся. Решение задач по исследованию устойчивости систем во всех случаях основано на использовании характеристических уравнений.

Необходимым условием устойчивости линейной системы любого порядка является положительность всех коэффициентов характеристического уравнения этой системы.

Пусть имеется характеристическое уравнение замкнутой системы

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0 \quad (a_0 > 0). \quad (8.14)$$

Уравнение (8.14) можно представить в виде произведения множителей, содержащих корни:

$$a_0 (p - p_1) (p - p_2) \dots (p - p_n) = 0. \quad (8.15)$$

Если все корни характеристического уравнения будут отрицательными, то все множители в (8.15) будут положительными:

$$a_0 (p + |\alpha_1|) (p + |\alpha_2|) \dots (p + |\alpha_n|) = 0, \quad (8.16)$$

где $p_1 = -|\alpha_1|$, $p_2 = -|\alpha_2|$, ..., $p_n = -|\alpha_n|$ — значения корней.

Производя перемножения в (8.16), получим уравнение (8.14), в котором все коэффициенты будут определяться положительными членами уравнения (8.16), т. е. будут положительными; нигде не могут получиться отрицательные числа и нули.

Аналогичное явление можно установить, если имеются комплексные корни с отрицательной вещественной частью:

$$a_0 (p + |\alpha_1|) (p + |\alpha_2| - j\omega_2) (p + |\alpha_2| + j\omega_2) \dots (p + |\alpha_n|) = 0,$$

или

$$a_0 (p + |\alpha_1|) [(p + |\alpha_2|)^2 + \omega_2^2] \dots (p + |\alpha_n|) = 0. \quad (8.17)$$

Уравнение (8.17) также приводится к виду уравнения (8.14) с положительными коэффициентами. Для того чтобы получить отрицательные вещественные части корней, необходимо условие положительности всех коэффициентов уравнения.

§ 8.3. Достаточность условий положительности коэффициентов для устойчивости систем

Необходимое условие устойчивости — положительность коэффициентов характеристического уравнения — является достаточным условием только для систем первого и второго порядка.

Корень характеристического уравнения первой степени

$$a_0 p + a_1 = 0 \quad (8.18)$$

при положительных a_0 и a_1 всегда будет отрицательным:

$$p_1 = -a_1/a_0. \quad (8.19)$$

Корни характеристического уравнения второй степени

$$a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0 \quad (8.20)$$

при положительных a_0 , a_1 и a_2 будут либо вещественными отрицательными, либо комплексными с отрицательной вещественной частью:

$$p_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0}. \quad (8.21)$$

Необходимое условие устойчивости — положительность коэффициентов характеристического уравнения — для систем третьего и высших порядков обеспечивает отрицательность лишь вещественных корней, но не вещественных частей комплексных корней. Поэтому необходимым условием недостаточно для устойчивости систем выше второго порядка, так как по виду характеристического уравнения еще неизвестно, какими являются корни. В этом случае требуется исследование устойчивости с помощью критериев устойчивости.

Пусть, например, имеется пара сопряженных комплексных корней с положительной вещественной частью. Подставив в (8.15) значения корней, получим

$$a_0(p + |\alpha_1|) \{ (p - |\alpha_2|)^2 + \omega_2^2 \} \dots (p + |\alpha_n|) = 0, \quad (8.22)$$

или

$$a_0 [p^3 + (|\alpha_1| - 2|\alpha_2|)p^2 + (\alpha_2^2 + \omega_2^2 - 2|\alpha_1||\alpha_2|)p + + |\alpha_1|(\alpha_2^2 + \omega_2^2)] \dots (p + |\alpha_n|) = 0. \quad (8.23)$$

Из (8.23) легко установить, что при некоторых соотношениях между числами α_1 , α_2 , ω_2 коэффициенты уравнения (8.23), приведенного к виду (8.14), будут положительными, в то время как часть корней имеет положительную вещественную часть и система неустойчива.

§ 8.4. Алгебраические критерии устойчивости

Алгебраические критерии устойчивости позволяют по коэффициентам характеристического уравнения замкнутой системы определить, все ли корни находятся в левой полуплоскости, не решая этого уравнения. Наиболее широкое распространение из алгебраических критериев имеют критерии Рауса и Гурвица.

Критерий Рауса [Л. 48]. В 1877 г. Е. Раус для определения устойчивости системы по коэффициентам характеристического уравнения замкнутой системы (8.14) предложил правило, оформленное в виде таблицы. При этом коэффициенты уравнения, имеющие четные индексы, записываются в первую строку, имеющие нечетные индексы — во вторую строку таблицы. Остальные строки (всего $n + 1$ строка) и столбцы таблицы заполняются по предыдущим (известным) строкам на основе определенного правила (табл. 8.1).

На основании таблицы Рауса может быть сделан следующий вывод относительно знаков вещественной части корней характеристического уравнения: если все коэффициенты первого столбца табл. 8.1 больше нуля (положительны) при $a_0 > 0$, то вещественные части всех корней характеристического уравнения отрицательны (устойчивая система); если хотя бы один коэффициент первого столбца табл. 8.1 отрицателен или равен нулю, то система неустойчива. При этом число перемен знаков первого столбца показывает число корней с положительной вещественной частью.

Таблица Рауса

Номер строки	Номер столбца				
	1	2	3	4	k
1	$a_0 = C_{11}$	$a_2 = C_{12}$	$a_4 = C_{13}$	$a_6 = C_{14}$	
2	$a_1 = C_{21}$	$a_3 = C_{22}$	$a_5 = C_{23}$	$a_7 = C_{24}$	
3	$C_{31} = a_2 - \frac{a_0 a_3}{a_1}$	$C_{32} = a_4 - \frac{a_0 a_5}{a_1}$	$C_{33} = a_6 - \frac{a_0 a_7}{a_1}$	$C_{34} = a_8 - \frac{a_0 a_9}{a_1}$	
4	$C_{41} = a_3 - \frac{a_1 C_{32}}{C_{31}}$	$C_{42} = a_5 - \frac{a_1 C_{33}}{C_{31}}$	$C_{43} = a_7 - \frac{a_1 C_{34}}{C_{31}}$	$C_{44} = a_9 - \frac{a_1 C_{35}}{C_{31}}$	
i	$C_{i,k} = C_{(i-2), (k+1)} - \lambda_i C_{(i-1), (k+1)}; \quad \lambda_i = \frac{C_{(i-2), 1}}{C_{(i-1), 1}}$				
n+1					

Пример 8.1. Определим устойчивость системы автоматического регулирования скорости двигателя постоянного тока (см. рис. 4.2). Используем характеристическое уравнение этой системы [см. (7.83)]. При этом коэффициенты и постоянные времени звеньев заданы: $T_{\text{ЭМ}} = 1$ сек; $T_{\text{Я}} = 0,01$ сек; $T_{\text{ЭВБ}} = 0,1$ сек; $T_{\text{Г}} = 0,5$ сек; $T_{\text{К.З}} = 0,2$ сек; $k_{\text{Д}} = 0,5$ рад/в.сек; $k_{\text{Г}} = 0,6$; $k_{\text{ЭМУ}} = k_{\text{У}} k_{\text{К.З}} = 4$; $k_{\text{ТР}} = 0,5$ в.сек/рад; $k_{\text{Э.У}} = 10$.

Представим характеристическое уравнение замкнутой системы (7.83) в численном виде:

$$0,0001p^5 + 0,0117p^4 + 0,188p^3 + 0,98p^2 + 1,8p + 7 = 0. \quad (8.24)$$

Составив таблицу Рауса по коэффициентам этого уравнения (табл. 8.2), устанавливаем, что система устойчива (все члены первого столбца таблицы больше нуля).

Таблица 8.2

Расчетные данные по критерию Рауса

Номер строки	Номер столбца		
	1	2	3
1	$a_0 = C_{11} = 0,0001$	$a_2 = C_{12} = 0,188$	$a_4 = C_{13} = 1,8$
2	$a_1 = C_{21} = 0,0117$	$a_3 = C_{22} = 0,98$	$a_5 = C_{23} = 7$
3	$C_{31} = 0,188 - \frac{0,0001 \cdot 0,98}{0,0117} \approx 0,18$	$C_{32} = 1,8 - \frac{0,0001 \cdot 7}{0,0117} = 1,74$	0
4	$C_{41} = 0,98 - \frac{0,0117 \cdot 1,74}{0,18} = 0,866$	$C_{42} = 7 - \frac{0,0117 \cdot 0}{0,18} = 7$	0
5	$C_{51} = 1,74 - \frac{0,18 \cdot 7}{0,866} = 0,29$	0	—
6	$C_{61} = 7 - \frac{0,866 \cdot 0}{0,29} = 7$	—	—

Недостатком критерия Рауса является большой объем арифметических вычислений при высоком порядке характеристического уравнения системы.

Критерий Гурвица [Л. 49]. В 1895 г. математик А. Гурвиц разработал алгебраический критерий устойчивости в форме определителей. При этом определители Гурвица составляются по коэффициентам характеристического уравнения (8.14). Используя коэффициенты этого уравнения, составляют главный определитель Гурвица. Для этого все коэффициенты, начиная с коэффициента при $(n - 1)$ -й производной, выписывают последовательно до свободного члена по главной диагонали. Столбцы вверх от главной диагонали дополняют коэффициентами с возрастающими индексами, а столбцы вниз — коэффициентами с убывающими индексами. Места, которые должны быть заняты коэффициентами с индексом выше a_n и ниже a_0 , заполняют нулями.

Для уравнения n -й степени главный определитель Гурвица

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1} & \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_n \end{vmatrix}. \quad (8.25)$$

Для того чтобы характеристическое уравнение (8.14) имело все корни с отрицательной вещественной частью, главный определитель Гурвица (8.25), а также все его диагональные миноры $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ и т. д. должны иметь один знак с a_0 , т. е. быть больше нуля. Номер диагонального минора определяет номер коэффициента по диагонали, до которого составляется данный минор:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} \text{ и т. д.} \quad (8.26)$$

Последний столбец главного определителя содержит только один коэффициент a_n , отличный от нуля, поэтому

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} a_n. \quad (8.27)$$

Для положительных коэффициентов уравнения (необходимое условие устойчивости) $a_n > 0$, следовательно, $\Delta_n > 0$, если $\Delta_{n-1} > 0$. Таким образом, можно отметить, что следует вычислять не все диагональные миноры главного определителя, так как некоторые из них приобретают положительные значения при положительности других миноров. Например, при $n = 5$ следует проверить знаки Δ_2, Δ_4 и т. д.

Пример 8.2. Определим устойчивость системы автоматического регулирования скорости двигателя постоянного тока (см. рис. 4.2) при тех же данных, что и в примере 8.1. Используя уравнение (8.24), запишем определитель Гурвица

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 0,0117 & 0,98 & 7 & 0 & 0 \\ 0,0001 & 0,188 & 1,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0117 & 0,98 & 7 & 0 \\ 0 & 0,0001 & 0,188 & 1,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0117 & 0,98 & 7 \end{vmatrix}. \quad (8.28)$$

Вычислим диагональные миноры Δ_2 , Δ_3 , Δ_4 и Δ_5 :

$$\left. \begin{aligned} \Delta_2 &= 0,0117 \cdot 0,188 - 0,0001 \cdot 0,98 = 0,002101 > 0; \\ \Delta_3 &= 0,0117 \begin{vmatrix} 0,188 & 1,8 \\ 0,0117 & 0,98 \end{vmatrix} - 0,0001 \begin{vmatrix} 0,98 & 7 \\ 0,0117 & 0,98 \end{vmatrix} = 0,00182 > 0; \\ \Delta_4 &= -7 \begin{vmatrix} 0,0117 & 0,98 & 7 \\ 0,0001 & 0,188 & 1,8 \\ 0 & 0,0001 & 0,188 \end{vmatrix} + 1,8 \Delta_3 = 0,00104 > 0; \\ \Delta_5 &= \Delta_5 \quad \Delta_4 = 7 \cdot 0,00104 = 0,00728 > 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.29)$$

В связи с тем что $a_0 = 0,0001 > 0$; $\Delta_1 = a_1 = 0,0117 > 0$; $\Delta_2 > 0$; $\Delta_3 > 0$; $\Delta_4 > 0$ и $\Delta_5 > 0$, данная система на основании критерия Гурвица устойчива.

Используя свойства определителей, можно установить, что система находится на границе устойчивости при условии положительности всех миноров и равенства нулю предпоследнего:

$$\Delta_{n-1} = 0. \quad (8.30)$$

На основании равенства (8.30) можно при всех заданных параметрах системы принять за неизвестный какой-либо один параметр и определить его предельное значение, при котором система находится на границе устойчивости. Таким параметром обычно считают коэффициент усиления системы.

§ 8.5. Частотный критерий устойчивости

Частотные критерии позволяют судить об устойчивости замкнутых автоматических систем по частотным характеристикам условно разомкнутых систем без определения корней характеристического уравнения замкнутой системы. Однако при этом необходимо знать, устойчива или нет условно разомкнутая система (имеет ли характеристическое уравнение условно разомкнутой системы корни с положительной вещественной частью).

Частотные критерии являются графо-аналитическими и обеспечивают наглядность инженерных расчетов. Они позволяют определить устойчивость замкнутой системы при отсутствии характеристического уравнения и передаточных функций системы, используя экспериментально полученные частотные характеристики звеньев и разомкнутой системы в целом.

Принцип аргумента. Рассмотрим характеристическое уравнение замкнутой системы

$$1 + K(p) = 0, \quad (8.31)$$
$$K(p) = B(p)/A(p). \quad (8.32)$$
$$[A(p) \div B(p)]/A(p) = 0. \quad (8.33)$$
$$F(p) = \frac{A(p) + B(p)}{A(p)} = \frac{c_0(p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_n)}{a_0(p-\bar{p}_1)(p-\bar{p}_2)\dots(p-\bar{p}_n)}. \quad (8.34)$$

— p_i) при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ повернется на пол-оборота (т. е. на угол π против часовой стрелки), если корень p_i лежит слева от мнимой оси, и по часовой стрелке, если корень расположен справа от мнимой оси.

$$F(j\omega) = 1 + K(j\omega) = \frac{c_0(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n)}{a_0(j\omega - \bar{p}_1)(j\omega - \bar{p}_2) \dots (j\omega - \bar{p}_n)} = \frac{F_1(j\omega)}{F_2(j\omega)}. \quad (8.35)$$

Для устойчивой замкнутой системы при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ вектор числителя $F_1(j\omega)$ повернется на угол $\varphi_1 = n\pi$, а при изменении ω от 0 до ∞ — на угол $\varphi_1 = n\pi/2$.

Следует отметить, что на практике возможны два варианта соотношения разомкнутой и замкнутой систем:

1) устойчивая система в замкнутом состоянии является устойчивой и в разомкнутом состоянии;

2) устойчивая система в замкнутом состоянии является неустойчивой в разомкнутом состоянии, когда характеристическое уравнение (8.31) разомкнутой системы имеет m корней с положительной вещественной частью (это возможно в случае многоконтурных систем и при наличии неустойчивых звеньев).

В соответствии с этим вектор $F_2(j\omega)$ в первом случае повернется при изменении ω от 0 до ∞ на угол $\varphi_2 = n\pi/2$, а во втором случае — на угол $\varphi'_2 = (n - 2m)\pi/2$. Фаза результирующего вектора $F(j\omega)$ в соответствии с (8.35) равна разности фаз векторов числителя $F_1(j\omega)$ и знаменателя $F_2(j\omega)$. В первом случае, когда система устойчива в разомкнутом и в замкнутом состоянии, получим

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = n\pi/2 - n\pi/2 = 0. \quad (8.36)$$

Следовательно, при изменении частоты от 0 до ∞ приращение аргумента результирующего вектора $F(j\omega)$ равно нулю.

Во втором случае, когда устойчивая замкнутая система неустойчива в разомкнутом состоянии, имеем

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi'_2 = n\pi/2 - (n - 2m)\pi/2 = m\pi. \quad (8.37)$$

Это означает, что при изменении частоты от 0 до ∞ приращение аргумента результирующего вектора $F(j\omega)$ не равно нулю и пропорционально числу корней m с положительной вещественной частью уравнения (8.31) разомкнутой системы.

Приращению аргумента [см. (8.36) и (8.37)] на основании равенства (8.35) определяются частотной функцией $F(j\omega)$, которая, в свою очередь, определяется суммой постоянного слагаемого, равного единице, и функции $K(j\omega)$:

$$F(j\omega) = 1 + K(j\omega). \quad (8.38)$$

Это уравнение указывает, что при любом значении частоты конец вектора $F(j\omega)$ совпадает с концом вектора $K(j\omega)$, определяющего амплитудно-фазовую характеристику разомкнутой системы. Если переместить мнимую ось вправо на отрезок, равный единице, то кривая, описанная концами обоих векторов, окажется амплитудно-фазовой характеристикой разомкнутой системы $K(j\omega)$. При этом начало вектора $K(j\omega)$ будет совпадать с началом координат, а начало вектора $F(j\omega)$ будет находиться на расстоянии, равном единице, слева от мнимой оси, т. е. в точке $(-1, j0)$ (рис. 8.3, б).

При изменении частоты ω от нуля до ∞ положение обоих векторов будет изменяться (см. рис. 8.3, б).

Критерий Найквиста. В 1932 г. Г. Найквист разработал критерий, основанный на анализе АФХ разомкнутой системы. Учитывая (8.36) и (8.37) относительно приращения аргумента устойчивой замкнутой системы, определяемого на основании (8.35) и вида кривой АФХ, условие устойчивости по критерию Найквиста можно сформулировать следующим образом:

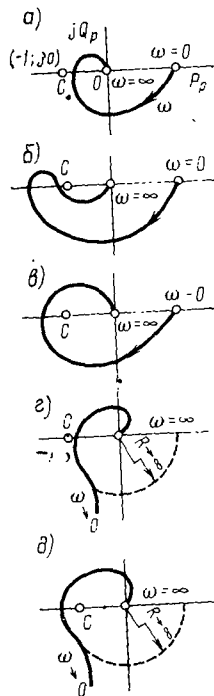


Рис 8.1

1) если система устойчива в разомкнутом состоянии, то для устойчивости соответствующей замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы АФХ разомкнутой системы для $0 \leq \omega \leq \infty$ не охватывала точку с координатами $(-1, j0)$. Только в этом случае приращение аргумента вектора $F(j\omega)$ будет равно нулю;

2) если система неустойчива в разомкнутом состоянии и имеет m корней в правой полуплоскости, то для устойчивости соответствующей замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы АФХ разомкнутой системы для $0 \leq \omega \leq \infty$ охватывала $m/2$ раз точку с координатами $(-1, j0)$, т. е. приращение аргумента вектора $F(j\omega)$ должно составлять $\varphi = m\pi$.

Если система является астатической, т. е. содержит интегрирующее звено, то для применимости критерия Найквиста необходимо дополнять АФХ дугой бесконечно большого радиуса ($R \rightarrow \infty$) и определять ее расположение относительно точки $(-1, j0)$. Критерий Найквиста при этом используется с учетом приведенных формулировок [Л. 35].

На рис. 8.4 приведены примеры некоторых АФХ устойчивых и неустойчивых статических (рис. 8.4, а, б и в) и астатических (рис. 8.4, г и д) систем.

Пример 8.3. Определим устойчивость системы автоматического регулирования скорости двигателя постоянного тока (см. рис. 4.2). Используя структурную схему (см. рис. 7.8, в), передаточную функцию (7.87) для прямого пути прохождения сигнала и цепи главной обратной связи $K_{\text{тр}}(p) = k_{\text{тр}}$, а также численные данные, указанные в примере 8.1, получим

$$K(j\omega) = \frac{6}{j0,0001\omega^5 + 0,0117\omega^4 - j0,188\omega^3 - 0,98\omega^2 + j1,8\omega + 1}$$

Представим выражение частотной функции в виде суммы вещественной $P_p(\omega)$ и мнимой $Q_p(\omega)$ частей:

$$P_p(\omega) = \frac{6(0,0117\omega^4 - 0,98\omega^2 + 1)}{(0,0117\omega^4 - 0,98\omega^2 + 1)^2 + (0,0001\omega^5 - 0,188\omega^3 + 1,8\omega)^2}$$

$$Q_p(\omega) = - \frac{6(0,0001\omega^5 - 0,188\omega^3 + 1,8\omega)}{(0,0117\omega^4 - 0,98\omega^2 + 1)^2 + (0,0001\omega^5 - 0,188\omega^3 + 1,8\omega)^2}$$

Изменяя ω от 0 до ∞ , вычислим значения вещественной и мнимой частей построим АФХ разомкнутой системы (рис. 8.5, а). Данная система состоит из устойчивых звеньев, поэтому она устойчива в разомкнутом состоянии, а так как ее АФХ не охватывает критическую точку $(-1, j 0)$, то на основании критерия Найквиста замкнутая система также устойчива.

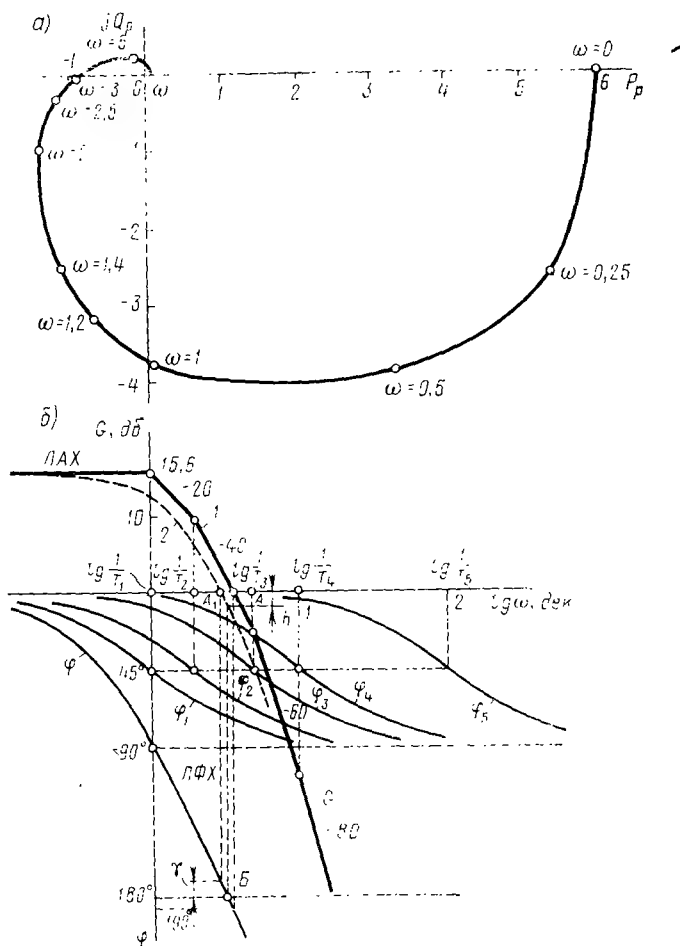


Рис. 8.5

Использование логарифмических частотных характеристик для исследования устойчивости по критерию Найквиста. Если устойчива разомкнутая система, то для устойчивости соответствующей замкнутой системы нужно, чтобы АФХ либо не пересекала действительную ось слева от точки с координатами $(-1, j 0)$, либо пересекала ее четное число раз, не охватывая указанную точку. Это означает, что при фазе -180° амплитуда частотной функции должна быть меньше единицы (см. рис. 8.4, а). В случае неоднократного пересечения АФХ вещественной оси, расположенной слева от мнимой оси (см. рис. 8.4; б), не-

обходимо, чтобы при фазе, равной $-\pi$, не было значения $A(\omega) \geq 1$ [допускаются значения $A(\omega) > 1$ без охвата критической точки].

Если разомкнутая система неустойчива, то для устойчивости соответствующей замкнутой системы нужно, чтобы АФХ пересекала действительную ось слева от точки с координатами $(-1, j 0)$ определенное число раз. Если условиться, что переход фазовой характеристики через линию $-\pi$, -3π и т. д. положителен при возрастании абсолютного значения аргумента и отрицателен при его убывании, то для устойчивой замкнутой системы разность между этими переходами должна быть в два раза меньше числа корней m с положительной вещественной частью.

При использовании логарифмических частотных характеристик разомкнутой системы следует учитывать, что точке АФХ с координатами $(-1, j 0)$ соответствуют критические значения $G_{кр} = 20 \lg 1 = 0$ и $\varphi_{кр} = -180^\circ$. При этом замкнутая система устойчива, если разность между числом положительных и отрицательных переходов $\varphi(\omega)$ через линию на уровне -180° во всех областях графика, где ЛАХ проходит выше оси абсцисс, равна $m/2$ при m корнях с положительной вещественной частью. В случае, когда разомкнутая одноконтурная система устойчива, замкнутая система также будет устойчива, если ЛАХ пересекает ось абсцисс при меньшей частоте, чем ЛФХ пересекает линию на уровне -180° .

Пример 8.4. Определим устойчивость системы автоматического регулирования скорости двигателя постоянного тока (см. рис. 4.2). Используем передаточные функции разомкнутой системы (см. рис. 7.8, в) и $K_{тр}(p) = k_{тр}$, формулу (7.87) и численные данные параметров, указанные в примере 8.1. Передаточную функцию запишем в виде

$$K(p) = \frac{6}{(p+1)(0,5p+1)(0,2p+1)(0,1p+1)(0,01p+1)}.$$

На основании этого выражения определяем $G_0 = 20 \lg 6 = 15,6$ дБ и частоты сопряжений асимптот ЛАХ (1/сек):

$$\omega_{c1} = 1/1 = 1; \quad \omega_{c2} = 1/0,5 = 2; \quad \omega_{c3} = 1/0,2 = 5; \quad \omega_{c4} = 1/0,1 = 10; \\ \omega_{c5} = 1/0,01 = 100.$$

Учитывая эти данные и то, что $K(p)$ соответствует последовательному соединению инерционных звеньев первого порядка, построим логарифмические частотные характеристики разомкнутой системы (рис. 8.5, б, кривая 1). Так как разомкнутая система устойчива, то из рис. 8.5, б заключаем, что исследуемая замкнутая система неустойчива. Это противоречит результатам, полученным в примерах 8.1, 8.2 и 8.3. В связи с чем следует построить уточненную ЛАХ с учетом поправок (кривая 2), на основании которой заключаем, что замкнутая система устойчива.

Использование обратных АФХ. В этом случае критерий Найквиста формулируется следующим образом [Л. 35, 50]:

1) для того чтобы система, устойчивая в разомкнутом состоянии, была устойчива в замкнутом состоянии, необходимо и достаточно, чтобы обратная АФХ охватывала точку с координатами $(-1, j 0)$;

2) для того чтобы система, неустойчивая в разомкнутом состоянии, была устойчива в замкнутом состоянии, необходимо и достаточно, чтобы обратная АФХ не охватывала критическую точку $(-1, j 0)$.

Использование нормированных АФХ. Проектируя систему управления, иногда разрабатывают серию аналогичных по схеме устройств, различающихся значением какого-либо параметра. Например, если различны заданные ошибки регулирования, то различным будет и коэффициент усиления системы. Чтобы сравнить эти устройства, нормируют АФХ по какому-либо параметру (не зависящему от частоты).

Считая параметром нормирования общий коэффициент усиления системы K , можно записать частотную функцию разомкнутой системы

$$K(j\omega) = K \cdot \bar{K}(j\omega),$$

где $\bar{K}(j\omega) = \frac{K(j\omega)}{K} = \frac{P_p(\omega)}{K} + j \frac{Q_p(\omega)}{K}$ — нормированная частотная функция.

По выражению $\bar{K}(j\omega)$ строится нормированная АФХ разомкнутой системы. При нормировании можно использовать обычную АФХ, разделив масштаб по осям координат на параметр нормирования. Таким образом, при изменении параметра нормирования нормированная АФХ будет оставаться неизменной, меняться будут лишь масштаб по осям координат и положение критической точки.

При нормировании АФХ по общему коэффициенту усиления критическая точка будет иметь координаты $(-1/K; j0)$. С учетом сказанного формулировка критерия Найквиста сохранится с изменением координат критической точки.

§ 8.6. Определение устойчивости по методу разделения частотных характеристик разомкнутой системы

Построение АФХ разомкнутых автоматических систем высокого порядка и исследование их устойчивости является сложной задачей и требует выполнения большого объема вычислений, поэтому для упрощения расчетов можно использовать метод разделения частотных характеристик объекта и регулятора [Л. 27].

Рассмотрим условие границы устойчивости, когда АФХ разомкнутой системы проходит через критическую точку $(-1; j0)$:

$$K_p(j\omega_{кр}) \cdot K_o(j\omega_{кр}) = -1, \quad (8.39)$$

где $K_p(j\omega_{кр})$ и $K_o(j\omega_{кр})$ — частотные функции регулятора и объекта регулирования.

Вместо уравнений (8.39) можно записать

$$\left. \begin{aligned} |K_p(j\omega_{кр}) K_o(j\omega_{кр})| &= A_p(\omega_{кр}) A_o(\omega_{кр}) = 1; \\ \arg K_p(j\omega_{кр}) K_o(j\omega_{кр}) &= \varphi_p(\omega_{кр}) + \varphi_o(\omega_{кр}) = -\pi, \end{aligned} \right\} \quad (8.40)$$

где A_p и φ_p — амплитуда и фаза частотной функции регулятора; A_o и φ_o — амплитуда и фаза частотной функции объекта.

На основании (8.40) условие границы устойчивости можно сформулировать следующим образом: если сумма фазовых углов АФХ

объекта $\varphi_0(\omega_{кр})$ и регулятора $\varphi_p(\omega_{кр})$ при некоторой частоте $\omega_{кр}$ равна π и произведение модулей АФХ объекта $A_0(\omega_{кр})$ и регулятора $A_p(\omega_{кр})$ равно единице, то замкнутая автоматическая система находится на границе устойчивости.

Решение этой задачи можно упростить, если вместо уравнения (8.39) записать

$$K_0(j\omega_{кр}) = -[K_p(j\omega_{кр})]^{-1}.$$

В этом случае границы устойчивости будут соответствовать

$$A_0(\omega_{кр}) = A_p^{-1}(\omega_{кр}); \quad (8.41)$$

$$\varphi_0(\omega_{кр}) = \varphi_p^{-1}(\omega_{кр}) = -\pi, \quad (8.42)$$

где $A_p^{-1}(\omega_{кр})$ и $\varphi_p^{-1}(\omega_{кр})$ — модуль и фаза отрицательной обратной АФХ регулятора.

Для определения устойчивости системы можно использовать графики АФХ объекта $K_0(j\omega)$ и отрицательной обратной АФХ регулятора.

Равенство (8.42) означает, что точки указанных АФХ, соответствующие одинаковой частоте $\omega_{кр}$, должны быть расположены на одной

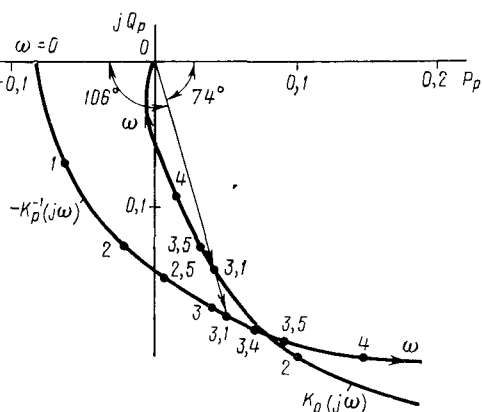


Рис. 8.6

прямой, проходящей через начало координат; равенство (8.41) при этом означает, что система находится на границе устойчивости.

Критерий устойчивости замкнутой системы для устойчивой разомкнутой системы на основании (8.41) и (8.42) сформулируем следующим образом: если разность фазовых углов АФХ объекта $\varphi_0(\omega_0)$ и отрицательной обратной АФХ регулятора $\varphi_p^{-1}(\omega_0)$ при некоторой частоте ω_0 равна $-\pi$, а модуль вектора АФХ объекта при

этой частоте $A_0(\omega_0)$ меньше модуля вектора отрицательной обратной АФХ $A_p^{-1}(\omega_0)$, то замкнутая система устойчива; в противном случае замкнутая система неустойчива.

Пример 8.5. Определим устойчивость системы автоматического регулирования скорости двигателя постоянного тока (см. рис. 4.2) по методу разделения частотных характеристик объекта и регулятора. Используя структурную схему (см. рис. 7.8, в) и данные примера 8.1, запишем

$$K_0(p) = 0,5/(0,01p^2 + p + 1).$$

$$K_p^{-1}(p) = (0,5p + 1)(0,2p + 1)(0,1p + 1) \cdot 12.$$

Заменив в этих выражениях p на $j\omega$, получим частотные функции $K_0(j\omega)$ и $K_p^{-1}(j\omega)$, по которым построим соответствующие АФХ (рис. 8.6). По ним найдем, что при $\omega_0 = 3,1$ 1/сек

$$\varphi_0(\omega_0) - \varphi_p^{-1}(\omega_0) = -74^\circ - 106^\circ = -180^\circ;$$

$$A_0(\omega_0) = 0,16 < A_p^{-1}(\omega_0) = 0,188.$$

Таким образом, рассматриваемая система устойчива.

§ 8.7. Критерий Михайлова

В 1936—1938 гг. А. В. Михайлов разработал критерий, основанный на анализе характеристического уравнения замкнутой системы. По этому уравнению строится характеристическая кривая (годограф), вид которой позволяет судить об устойчивости системы [Л. 35].

Доказательство критерия Михайлова основано на определении приращения аргумента вектора частотной функции, составленной по характеристическому уравнению замкнутой системы, при изменении частоты аналогично тому, как это было сделано при рассмотрении критерия Найквиста. Ранее было установлено, что характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид

$$1 + K(p) = A(p) + B(p) = 0.$$

В общем случае это уравнение может быть записано в виде операторного полинома:

$$F_x(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n. \quad (8.43)$$

Вместо (8.43) можно записать произведение множителей:

$$F_x(p) = a_0 (p - p_1)(p - p_2)(p - p_3) \dots (p - p_n), \quad (8.44)$$

где $p_1, p_2, \dots, p_n$ — корни уравнения (8.43).

Каждому корню уравнения (8.43) соответствует определенная точка на комплексной плоскости корней, поэтому каждый корень может быть геометрически изображен вектором.

Если в частном случае переменный оператор p является чисто мнимым числом $j\omega$, то вместо (8.44) можно записать

$$F_x(j\omega) = a_0 (j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n).$$

Каждый множитель $(j\omega - p_k)$ может быть изображен на комплексной плоскости в виде вектора, начало которого находится в точке, определяющей корень p_k , а конец лежит на мнимой оси (рис. 8.7). Следовательно, $F_x(j\omega)$ можно представить как результирующий вектор, равный произведению элементарных векторов $(j\omega - p_k)$ на постоянное число a_0 . При этом модуль определяется указанным произведением составляющих модулей, а фаза равна сумме фаз составляющих векторов. Это позволит нанести на комплексной плоскости характеристи-

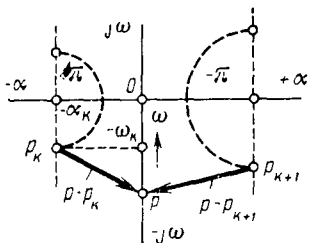


Рис. 8.7

ческой функции $F_x(j\omega)$ вектор при данной частоте ω_i ; начало его находится в начале координат. При изменении частоты от $-\infty$ до $+\infty$ каждый составляющий вектор повернется на угол, равный 180° (на $+\pi$, если его начало лежит в левой полуплоскости, и на $-\pi$, если его начало лежит в правой полуплоскости). За положительное направление принимается поворот вектора против движения часовой стрелки.

Если характеристическое уравнение n -го порядка имеет m корней в правой полуплоскости, то в левой полуплоскости будет $(n - m)$ корней.

При изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ вектор $F_x(j\omega)$ также повернется на определенный угол φ в связи с поворотом составляющих векторов:

$$\varphi = -m\pi : (n - m)\pi = (n - 2m)\pi. \quad (8.45)$$

Для устойчивой замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения (8.43) лежали в левой полуплоскости ($m = 0$), т. е. имели отрицательную вещественную часть.

Таким образом, если вектор $F_x(j\omega)$ при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ поворачивается в положительном направлении (не изменяя направления движения) на угол, равный $n\pi$ (где n — степень характеристического уравнения), то такая система устойчива; в противном случае система неустойчива.

При отрицательных частотах кривая Михайлова симметрична кривой при положительных частотах, поэтому достаточно рассмотреть одну ее часть, соответствующую, например, положительным частотам. При этом угол, описываемый вектором $F_x(j\omega)$ при $0 \leq \omega \leq \infty$, уменьшится вдвое, т. е. будет составлять n квадрантов. Получаем окончательную формулировку критерия устойчивости Михайлова.

Автоматическая система будет устойчива, если при $0 \leq \omega \leq +\infty$ вектор $F_x(j\omega)$, начав движение от вещественной оси комплексной плоскости, вращаясь против часовой стрелки и нигде не обращаясь в ноль, обходит последовательно n квадрантов (где n — степень характеристического уравнения).

Следовательно, для оценки устойчивости системы регулирования необходимо:

определить характеристический полином $F_x(p)$ замкнутой системы;

построить характеристическую кривую, описываемую концом вектора $F_x(j\omega)$ при $0 \leq \omega \leq +\infty$.

На рис. 8.8, а показаны годографы для устойчивой системы при различных n . На рис. 8.8, б приведена кривая $F_x(j\omega)$ для неустойчивой системы; на рис. 8.8, в — кривая $F_x(j\omega)$ для системы четвертого порядка, находящейся на границе устойчивости [кривая проходит через $(n - 1)$ квадрант и начало координат].

Если угол поворота вектора $F_x(j\omega)$ равен $l\pi$ (где $l < n$), то система будет неустойчива. Число m корней характеристического уравнения, имеющих положительную вещественную часть, можно найти из следующего равенства:

$$\varphi = l\pi = (n - 2m)\pi, \quad (8.46)$$

Анализируя годографы Михайлова для устойчивых систем, можно установить следствие критерия. Для правильных годографов, соответствующих устойчивым системам, обязательна перемежаемость очек пересечения кривой с осями координат. В точках пересечения кривой Михайлова с вещественной осью мнимая часть $Q_x(\omega)$ характеристической функции $\chi_x(j\omega)$ обращается в нуль, а в точках пересечения кривой с мнимой осью вещественная часть $P_x(\omega)$ обращается в нуль. Поэтому значения частот, при которых происходит пересечение кривой с вещественной или мнимой осью, должны являться корнями уравнений:

$$P_x(\omega) = 0; \quad (8.48)$$

$$Q_x(\omega) = 0. \quad (8.49)$$

Вещественную и мнимую функции можно представить также графически (рис. 8.8, а). Точки пересечения этих кривых с осью абсцисс дают значения корней уравнений (8.48) и (8.49). Из сопоставления рис. 8.8, а и

8.8, б можно заключить, что для устойчивой системы обязательна перемежаемость и вещественности корней уравнений (8.48) и (8.49). В связи с указанным следствием можно привести другую формулировку критерия устойчивости Михайлова: линейная система любого порядка n будет устойчивой, если точки пересечения кривых $P_x(\omega)$ и $Q_x(\omega)$ с осью абсцисс (включая и точку $\omega = 0$) перемежаются друг с другом и общее число этих точек равно степени n характеристического уравнения (дополнительный критерий Михайлова).

Построение годографа Михайлова возможно различными способами. Один из них заключается в определении значений $P_x(\omega)$ и $Q_x(\omega)$ по методу контрольных точек, включая (обязательно) частоты точек пересечения годографа с осями координат, которые находятся как корни уравнений (8.48) и (8.49). Другой способ заключается в том, что предварительно определяются годографы отдельных звеньев системы и по ним строится искомый годограф с применением правила умножения и сложения векторов.

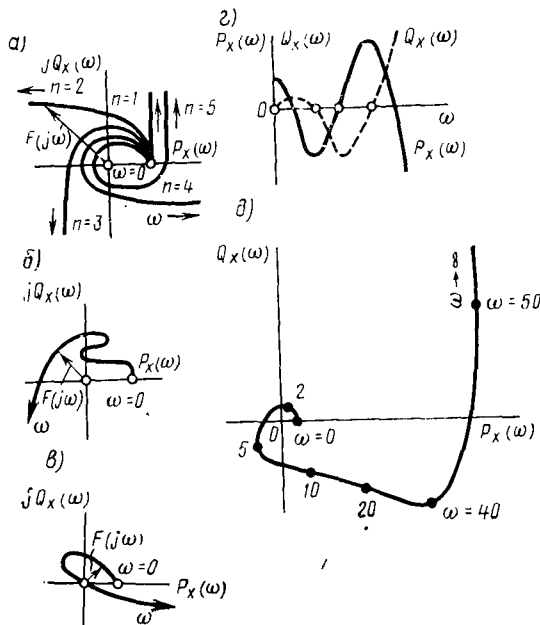


Рис. 8.8

Пример 8.6. Определим устойчивость системы автоматического регулирования скорости двигателя постоянного тока (см. рис. 4.2.). Используем характеристическое уравнение замкнутой системы в численном виде (8.24). Заменив в нем p на $j\omega$ и разделив вещественную и мнимую части, получим

$$F_X(j\omega) = (0,0117\omega^4 - 0,98\omega^2 + 7) + j(0,0001\omega^5 - 0,188\omega^3 + 1,8\omega), \quad (8.50)$$

откуда

$$P_X(\omega) = 0,0117\omega^4 - 0,98\omega^2 + 7; \quad (8.51)$$

$$Q_X(\omega) = 0,0001\omega^5 - 0,188\omega^3 + 1,8\omega. \quad (8.52)$$

Исследуем устойчивость данной системы по способу перемежаемости корней для $P_X(\omega) = 0$ и $Q_X(\omega) = 0$. Найдем корни для $P_X(\omega)$: $\omega_{1,2}' = \pm 2,8$ 1/сек; $\omega_{3,4}' = \pm 7,71$ 1/сек; затем для $Q_X(\omega)$: $\omega_1'' = 0$; $\omega_{2,3}'' = \pm 3,09$ 1/сек; $\omega_{4,5}'' = \pm 43,24$ 1/сек. Корни для $P_X(\omega)$ и $Q_X(\omega)$ в данном случае перемежаются, поэтому исследуемая система устойчива. Годограф Михайлова для этой системы проходит пять квадрантов (рис. 8.8, д).

§ 8.8. Критерий Вышнеградского

Критерий устойчивости Вышнеградского относится к алгебраическим критериям. Он разработан для исследования систем, описываемых уравнениями третьего порядка. Построение диаграммы Вышнеградского с указанием областей устойчивости позволяет отнести критерий Вышнеградского к более общему методу — построению областей устойчивости. Проф. И. А. Вышнеградский еще в 1860 г. сформулировал условия, соблюдение которых соответствует устойчивому движению системы. Характеристическое уравнение системы предварительно преобразовывается так, чтобы коэффициент перед третьей производной был равен единице. Разделив коэффициенты уравнения на коэффициент при третьей производной, получим:

$$p^3 + c_1 p^2 + c_2 p + c_3 = 0. \quad (8.53)$$

Для представления уравнения (8.53) в форме Вышнеградского вместо параметра p и коэффициентов c_1 и c_2 вводятся новая переменная z и обобщенные коэффициенты (координаты) Вышнеградского X и Y :

$$p = z / \sqrt[3]{c_3}; \quad c_1 = X / \sqrt[3]{c_3}; \quad c_2 = Y / \sqrt[3]{c_3}. \quad (8.54)$$

Подставив (8.54) в (8.53) и сократив на c_3 , найдем уравнение в форме Вышнеградского:

$$z^3 + Xz^2 + Yz + 1 = 0. \quad (8.55)$$

При этом

$$z = p / \sqrt[3]{c_3}; \quad X = c_1 / \sqrt[3]{c_3}; \quad Y = c_2 / \sqrt[3]{c_3}. \quad (8.56)$$

Предположим, что система находится на границе устойчивости. Тогда уравнение (8.53) должно иметь один действительный отрицательный корень и пару чисто мнимых корней:

$$p_1 = -\alpha; \quad p_2 = +j\omega; \quad p_3 = -j\omega. \quad (8.57)$$

Вместо (8.53) с учетом (8.57) запишем равенство:

$$p^3 + c_1 p^2 + c_2 p + c_3 = (p + \alpha)(p - j\omega)(p + j\omega) = (p + \alpha)(p^2 + \omega^2). \quad (8.58)$$

Раскрыв скобки в правой части, получим:

$$p^3 + c_1 p^2 + c_2 p + c_3 = p^3 + \alpha p^2 + \omega^2 p + \alpha \omega^2. \quad (8.59)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях правой и левой частей уравнения (8.59), найдем

$$c_1 = \alpha; \quad c_2 = \omega^2; \quad c_3 = \alpha \omega^2. \quad (8.60)$$

На основании (8.60) после перемножения c_1 и c_2 получим:

$$c_1 c_2 = \alpha \omega^2 = c_3; \quad (8.61)$$

$$c_1 c_2 - c_3 = 0. \quad (8.62)$$

Подставив вместо c_1 и c_2 значения из (8.54) и сократив на c_3 , запишем условие, при котором система находится на границе устойчивости:

$$XY - 1 = 0, \quad (8.63)$$

или

$$XY = 1. \quad (8.64)$$

Откладывая X и Y в прямоугольной системе координат, можно на основании (8.64) построить кривую, представляющую собой равностороннюю гиперболу (рис. 8.9). Эта кривая соответствует тому, что при любом значении параметров системы, удовлетворяющих равенству (8.67), получается пара чисто мнимых корней и один действительный отрицательный. Кривая AB является границей, разделяющей плоскость на устойчивую и неустойчивую области.

Для определения устойчивой области применим к уравнению (8.55) критерий Гурвица. Для устойчивости системы необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$\Delta_2 - XY - 1 > 0, \quad (8.65)$$

откуда найдем условие устойчивости системы — критерий Вышнеградского:

$$XY - 1 > 0, \quad (8.66)$$

или

$$XY > 1. \quad (8.67)$$

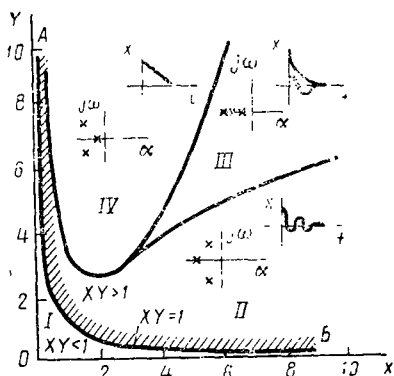


Рис. 8.9

При $\Delta_2 = XY - 1 < 0$ система будет неустойчивой, поэтому для области неустойчивости получим

$$XY - 1 < 0, \quad (8.68)$$

или

$$XY < 1. \quad (8.69)$$

Если нанести точки на рис. 8.9 соответственно (8.67), то можно определить область устойчивости системы, расположенную выше кривой AB . Область $XY < 1$, ограниченная осями координат и кривой AB , будет соответствовать значениям параметров, при которых система неустойчива.

На основании указанного можно сформулировать критерий устойчивости Вышнеградского: система регулирования будет устойчива, если произведение обобщенных коэффициентов Вышнеградского больше единицы ($XY > 1$), в противном случае система будет неустойчивой.

При условии $XY - 1$ система находится на границе устойчивости.

Используя уравнение (8.53) и уравнение Вышнеградского (8.55), построены дополнительные кривые [Л. 4 35], разделяющие область устойчивой работы на участки различных переходных процессов (апериодический III , колебательный II и монотонный IV).

Проф. И. Н. Вознесенский в 1936 г. установил возможность использования критерия Гурвица для определения влияния какого-либо параметра на устойчивость системы аналогично критерию Вышнеградского, но уже для системы любого порядка.

Для этого откладывают в прямоугольной системе координат по оси абсцисс числовые значения параметра, влияние которого на устойчивость системы хотят выяснить, а по оси ординат — числовые значения определителей Гурвица при различных значениях исследуемого параметра. В результате получается соответствующая кривая для каждого определителя Гурвица. Расположение этих кривых относительно оси абсцисс показывает допустимые пределы изменения параметра без нарушения устойчивости системы. Если все определители Гурвица положительны (все точки на кривых выше оси абсцисс), то система устойчива; если хотя бы один определитель Гурвица меньше нуля, т. е. кривая пересекает ось абсцисс и уходит в другой квадрант, то система неустойчива. Это позволяет определить диапазон изменения исследуемого параметра при сохранении устойчивости.

§ 8.9. Определение областей устойчивости

Дальнейшим развитием диаграммы Вышнеградского явилось построение областей устойчивости для систем любого порядка. Для этого используются специальные методы (например, метод D -разбиения Ю. И. Неймарка).

Положим, что автоматическая система описывается линейным дифференциальным уравнением, а характеристическое уравнение имеет вид уравнения (8.3). Допустим, что все коэффициенты, кроме одного, в этом уравнении заданы. Пусть коэффициент a_1 изменяется от 0 до ∞ . Будем давать этому коэффициенту ряд значений и определять при этом значения всех n корней уравнения. Если далее на некоторой вещественной полуоси отмечать для каждого значения a_1 точку, которой

соответствует определенному распределению корней на комплексной плоскости, то выбранная полуось может быть разбита на ряд отрезков в зависимости от того, все или не все корни характеристического уравнения лежат в плоскости корней слева от мнимой оси. На стыках таких отрезков один или несколько корней находятся на мнимой оси [Л. 11].

Разделение вещественной полуоси на отрезки устойчивости и неустойчивости для коэффициента a_1 показано жирными и тонкими линиями соответственно на рис. 8.10, а, по которому можно установить критические значения коэффициента a_1 .

Положим теперь, что в уравнении (8.3) изменяются два коэффициента, а остальные остаются неизменными. Тогда, вычислив все корни, можно произвести разбиение плоскости этих коэффициентов на области устойчивости (заштрихована на рис. 8.10, б) и неустойчивости.

Если в уравнении (8.3) заданы все коэффициенты, кроме трех, то, рассуждая аналогично, можно в пространстве этих коэффициентов выделить области (объемы) устойчивости и неустойчивости, разделяемые поверхностью (рис. 8.10, в).

Аналогично можно исследовать совокупность нескольких коэффициентов уравнения системы. При этом следует рассматривать многомерное пространство, по осям которого сложены значения коэффициентов. В этом пространстве возможна область, где каждой точке соответствует расположение корней характеристического уравнения слева от мнимой оси. Гиперповерхность, ограничивающая эту область, называется *границей устойчивости*. Обычно все коэффициенты a_i связаны с конкретными параметрами анализируемой системы (постоянная времени T , коэффициент усиления k и т. п.), поэтому при изменении одного из параметров необходимо строить гиперповерхность в n -мерном пространстве коэффициентов характеристического уравнения.

Наиболее просто область устойчивости выделяется для характеристического уравнения второй степени:

$$p^2 + a_1 p + a_2 = 0. \quad (8.70)$$

Корни этого уравнения

$$p_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{a_1^2/4 - a_2} \quad (8.71)$$

будут иметь отрицательную вещественную часть только тогда, когда $a_1 > 0$ и $a_2 > 0$. Следовательно, в плоскости коэффициентов a_1 и a_2 областью устойчивости будет только первый квадрант, все точки которого удовлетворяют условию $a_1 > 0$ и $a_2 > 0$ (рис. 8.10, в).

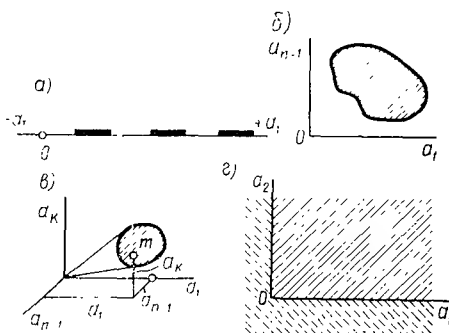


Рис. 8.10

§ 8.10. Понятие о D -разбиении пространства коэффициентов характеристического уравнения

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0$$

Если при значениях каких-либо двух коэффициентов характеристического уравнения (8.3) в плоскости корней (рис. 8.11, а) имеется k корней, лежащих слева от мнимой оси, и $(n - k)$ — справа от мнимой оси, то, изменяя значения этих коэффициентов, получим определенную кривую на плоскости коэффициентов (рис. 8.11, б), ограничивающую область, каждая точка которой характеризует указанное расположение корней характеристического уравнения относительно мнимой оси. Область, ограниченную этой кривой, обозначим через $D(k; n - k)$.

Число k корней, лежащих слева от мнимой оси, может иметь любое целое значение ($0 \leq k \leq n$), поэтому в плоскости коэффициентов a_0 и a_n можно указать области $D(k; n - k)$,

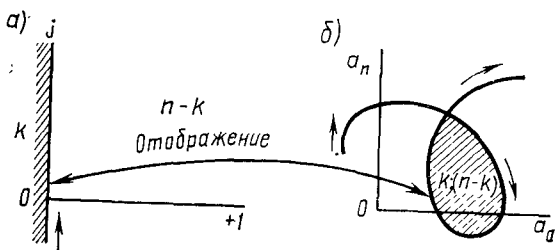


Рис. 8.11

соответствующие разным значениям k . Например, при степени уравнения $n = 4$ в пространстве коэффициентов можно рассматривать следующие области: $D(0; 4)$; $D(1; 3)$; $D(2; 2)$; $D(3; 1)$; $D(4; 0)$. Из этих областей только последняя является областью устойчивости в пространстве коэффициентов, так как она соответствует расположению всех четырех корней слева от мнимой оси. Однако если в рассматриваемом случае невозможно получить область $D(4; 0)$ при заданных значениях двух коэффициентов, то это значит, что ни при каких значениях незадаанных коэффициентов система не может быть сделана устойчивой. Таким образом, плоскость коэффициентов может и не содержать областей устойчивости.

Разбиение пространства коэффициентов на области устойчивости и неустойчивости называется D -разбиением [Л. 11, 15, 25].

Если при каких-то значениях коэффициентов характеристического уравнения n -й степени k корней находятся в левой полуплоскости, то при изменении коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_n$ корни также будут изменяться и при определенных значениях могут перейти в правую полуплоскость.

Следовательно, мнимая ось в плоскости корней есть отображение границы D -разбиения, и переход через эту границу в пространстве коэффициентов соответствует переходу корней через мнимую ось в плоскости корней. Чтобы определить границу D -разбиения, надо заменить в исследуемом характеристическом уравнении p на $j\omega$ и изменять ω от $-\infty$ до $+\infty$.

§ 8.11. D-разбиение плоскости одного комплексного параметра

Если требуется выяснить влияние на устойчивость только одного параметра, а значения остальных параметров заданы, целесообразно ввести вместо этого параметра комплексную величину, вещественная часть которой равна исследуемому параметру. Пусть τ есть параметр (коэффициент), влияние которого на устойчивость системы определяется. Если он входит в характеристическое уравнение линейно, то уравнение можно привести к виду:

$$S(p) + \tau R(p) = 0,$$

или

$$\tau = -S(p)/R(p). \quad (8.72)$$

В качестве параметра τ может быть принята постоянная времени T или коэффициент усиления k любого звена системы. Полагаем временно, что параметр τ — комплексное число. Это позволяет в результате подстановки вместо p значения $j\omega$ в (8.72) отобразить мнимую ось плоскости корней p на плоскость комплексного коэффициента $\tau(j\omega)$. После этого можно отделить мнимую часть от вещественной:

$$\tau = \tau(j\omega) = -S(j\omega)/R(j\omega) = -x(\omega) + jy(\omega). \quad (8.73)$$

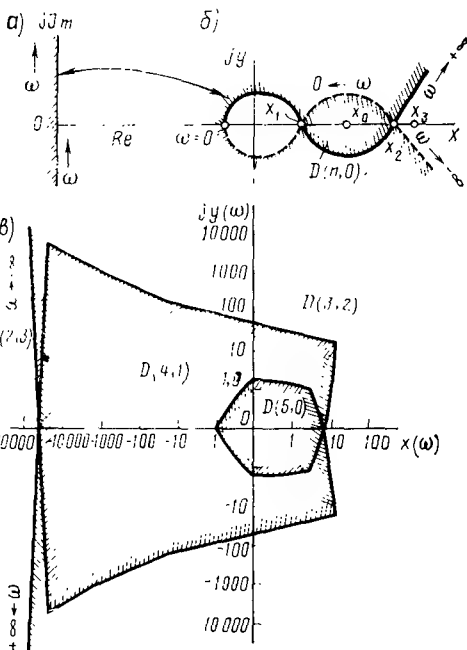


Рис. 8.12

Придавая различные значения ω , по (8.73) строим кривую. Эта кривая отображает мнимую ось комплексной плоскости p , т. е. границу D -разбиения плоскости $\tau(j\omega)$. В связи с симметричностью частотных характеристик относительно вещественной оси достаточно кривую D -разбиения построить в пределах $0 \leq \omega \leq +\infty$, а затем дополнить ее зеркальным отображением относительно вещественной оси (рис. 8.12). После этого надо наметить предполагаемую область устойчивости $D(n; 0)$. Для этого применяют правило штриховки, основанное на том, что границей в плоскости корней является мнимая ось и при движении по ней от $-\infty$ до $+\infty$ область корней устойчивой системы располагается слева (штриховка на рис. 8.12, а). Соответственно этому в плоскости $\tau(j\omega)$ на D -кривой (рис. 8.12, б) необходимо отметить направление движения в диапазоне частот $-\infty \leq \omega \leq +\infty$

и также заштриховать левую часть кривой по отношению к этому движению. Часть плоскости, в сторону которой направлены штрихи, является отображением левой полуплоскости корней и может рассматриваться как предполагаемая область устойчивости. Так как параметр τ по физическому смыслу есть вещественная величина, то рассматриваются лишь те отрезки вещественной оси, которые лежат в области, окруженной внутренней штриховкой.

Для каждой области указывают распределение корней. Для этого полагают $\tau = 0$ и находят корни характеристического уравнения $S(p) = 0$. Полученное распределение корней $D(k; n - k)$ считают заданным и наносят на плоскость $\tau(j\omega)$ в области начала координат. Если в плоскости комплексного коэффициента при движении от одной точки к другой пересекается D -кривая и при этом происходит переход с заштрихованной стороны на незаштрихованную, то в плоскости корней один корень пересекает мнимую ось, переходя из левой полуплоскости в правую. Если штриховка двойная (например, в точке пересечения кривых), то мнимую ось пересекают два корня. Так находится область плоскости $\tau(j\omega)$, соответствующая расположению всех корней в левой полуплоскости. Далее выбирают из этой области какое-либо значение параметра $\tau_0 = x_0$ и проверяют устойчивость по какому-либо критерию. Если система при этом устойчива, то полученная область является областью устойчивости.

Пример 8.7. Построим кривую D -разбиения для коэффициента усиления K разомкнутой системы автоматического регулирования скорости вращения двигателя постоянного тока (см. рис. 4.2) при тех же заданных постоянных времени, что и в примере 8.1. Характеристическое уравнение замкнутой системы запишем в виде уравнения (8.72):

$$0,0001p^5 + 0,0117p^4 + 0,188p^3 + 0,98p^2 + 1,8p + 1 + K = 0.$$

Заменим p на $j\omega$ и выделим вещественную и мнимую части:

$$K = -(0,0117 \omega^4 - 0,98 \omega^2 + 1) - j(0,0001 \omega^5 + 0,188 \omega^3 + 1,8 \omega) = \\ = -x(\omega) - jy(\omega).$$

Изменяя ω от 0 до $+\infty$, определим $x(\omega)$ и $y(\omega)$ и построим D -кривую (рис. 8.12, в). Из предыдущих примеров известно, что при $K = 6$ система устойчива, поэтому для области внутри кривой около начала координат указываем распределение корней $D(5; 0)$. Распределение корней для других областей определяем по правилу перехода через D -кривую. На основании полученной D -кривой устанавливаем, что данная система будет устойчива при любом значении коэффициента усиления K в пределах от -1 до $7,3$. Значение $K = 6$ близко к границе области устойчивости.

§ 8.12. D -разбиение плоскости двух параметров

В некоторых случаях бывает необходимо проверить влияние двух параметров (τ и k) на устойчивость системы. Если эти параметры входят линейно в характеристическое уравнение (8.3) системы, то его можно записать в следующем виде:

$$kP(p) + \tau Q(p) + R(p) = 0, \quad (8.74)$$

где $P(p)$, $Q(p)$, $R(p)$ — полиномы, коэффициенты которых не зависят от τ и k .

Надо выделить области устойчивости (если они существуют) в плоскости τ и k . Для этого необходимо построить кривую D -разбиения, положив в (8.74) $p = j\omega$, при различных значениях ω .

При подстановке $p = j\omega$ в (8.74) полиномы $P(j\omega)$; $Q(j\omega)$; $R(j\omega)$ могут быть разложены на вещественные и мнимые части:

$$\left. \begin{aligned} P(j\omega) &= P_1(\omega) + jP_2(\omega); \\ Q(j\omega) &= Q_1(\omega) + jQ_2(\omega); \\ R(j\omega) &= R_1(\omega) + jR_2(\omega). \end{aligned} \right\} \quad (8.75)$$

Подставив (8.75) в (8.74) и сгруппировав вещественные и мнимые части, получим:

$$kP_1(\omega) + \tau Q_1(\omega) + R_1(\omega) + j[kP_2(\omega) + \tau Q_2(\omega) + R_2(\omega)] = 0. \quad (8.76)$$

Комплексная величина равна нулю только в том случае, если вещественная и мнимая части одновременно равны нулю. Поэтому вместо (8.76) можно записать два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} kP_1(\omega) + \tau Q_1(\omega) &= -R_1(\omega); \\ kP_2(\omega) + \tau Q_2(\omega) &= -R_2(\omega). \end{aligned} \right\} \quad (8.77)$$

Эта система двух уравнений позволяет определить два неизвестных параметра τ_x и k_x при некоторой частоте $\omega = \omega_x$. Значения τ_x и k_x на плоскости τ и k определяют точку, которая принадлежит кривой D -разбиения. Чтобы найти все точки этой кривой, следует решить методом определителей уравнения (8.77) относительно k и τ :

$$k \neq \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{Q_1(\omega) R_2(\omega) - Q_2(\omega) R_1(\omega)}{P_1(\omega) Q_2(\omega) - P_2(\omega) Q_1(\omega)}; \quad (8.78)$$

$$\tau = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{P_2(\omega) R_1(\omega) - P_1(\omega) R_2(\omega)}{P_1(\omega) Q_2(\omega) - P_2(\omega) Q_1(\omega)}, \quad (8.79)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} P_1(\omega) & Q_1(\omega) \\ P_2(\omega) & Q_2(\omega) \end{vmatrix}. \quad (8.80)$$

Если определитель $\Delta \neq 0$, то каждому значению ω соответствуют определенные значения k и τ [см. (8.78) и (8.79)]. Эти значения характеризуют точку на плоскости, где k откладывается обязательно по оси абсцисс, а τ — по оси ординат для указанного случая записи (8.80). Если поменять местами столбцы определителя, то надо изменить обозначения осей на плоскости k и τ .

Для различных ω рассчитывается кривая, представляющая собой границу области с одинаковым распределением корней.

Определитель Δ является непрерывной функцией ω , его знак может измениться при $\omega = 0$ и $\omega \rightarrow \infty$. В этом случае числитель и знаменатель (8.78) и (8.79) могут оказаться одновременно равными 0 или ∞ . Могут быть значения $\omega = \omega_1$, при которых числитель и зна-

менатель также оказываются равными нулю. Это означает, что одно из выражений (8.78) и (8.79) при данном значении ω_1 является следствием другого и в плоскости двух параметров k и τ получается не точка, а прямая линия:

$$k = -\frac{\tau Q_1(\omega) + R_1(\omega)}{P_1(\omega)} = -\frac{\tau Q_2(\omega) + R_2(\omega)}{P_2(\omega)}. \quad (8.81)$$

Точки, принадлежащие этим прямым, называются *исключительными*, а сами прямые — особыми.

Граница D -разбиения по двум параметрам, получаемая из (8.78) и (8.79), должна быть дополнена особыми прямыми, уравнения которых получаются подстановкой в (8.76) значений $\omega = 0$; $\omega = \infty$ и некоторых $\omega = \omega_1$.

Наиболее просто уравнения особых прямых для $\omega = 0$ и $\omega = \infty$ могут быть получены следующим путем. Если свободный член и коэффициент при старшем члене характеристического уравнения зависят от параметров k и τ , то, приравняв нулю свободный член a_n , получим уравнение особой прямой для случая $\omega = 0$; приравняв нулю коэффициент a_0 при старшем члене, найдем уравнение особой прямой для случая $\omega = \infty$. Если указанные коэффициенты характеристического уравнения не зависят от k и τ , то особая прямая проходит в бесконечности и не вычерчивается.

Кривая D -разбиения в плоскости двух параметров не симметрична относительно вещественной оси, но имеет совпадающие точки, соответствующие $+\omega$ и $-\omega$, так как, согласно (8.78) и (8.79), k и τ являются четными функциями частоты, а, согласно (8.80), Δ — нечетная функция частоты, т. е. $\Delta(\omega) = -\Delta(-\omega)$. Поэтому достаточно построить D -кривую только для положительных частот, для отрицательных частот она будет повторяться.

Если главный определитель $\Delta = 0$, то это означает, что кривой D -разбиения не существует и все разбиение плоскости двух параметров осуществляется только особыми прямыми.

После того как на плоскости k и τ построена кривая D -разбиения, надо наметить предполагаемую область устойчивости $D(n; 0)$. Для этого аналогично предыдущему применяется правило штриховки.

Если k откладывается по оси абсцисс, а τ — по оси ординат, то, двигаясь по D -кривой от $\omega = -\infty$ до $\omega = +\infty$, следует штриховать левую сторону кривой при $\Delta > 0$, а правую — при $\Delta < 0$. При движении вдоль D -кривой знак Δ меняется только при пересечении кривой с особыми прямыми, т. е. при $\omega = 0$, $\omega = \infty$ и при $\omega = \omega_1$. Так как D -кривая с изменением частоты от $-\infty$ до $+\infty$ проходит дважды, то ее и штрихуют дважды, но оба раза с одной стороны, ибо знак определителя Δ при изменении знака ω частоты меняется на обратный.

Поскольку особые прямые также принадлежат к границе D -разбиения, то и они должны быть заштрихованы. При этом требуется, чтобы одновременно заштрихованные или одновременно незаштрихованные стороны D -кривой и особой прямой расположились навстречу друг другу (рис. 8.13). Особые прямые для $\omega = 0$ и $\omega = \infty$ штрихуют

Если выяснено распределение корней для одной из областей D -разбиения в плоскости двух параметров, то легко найти распределение корней во всех других областях. Как и в предыдущем случае, при переходе через D -кривую с двойной штриховкой происходит переме-

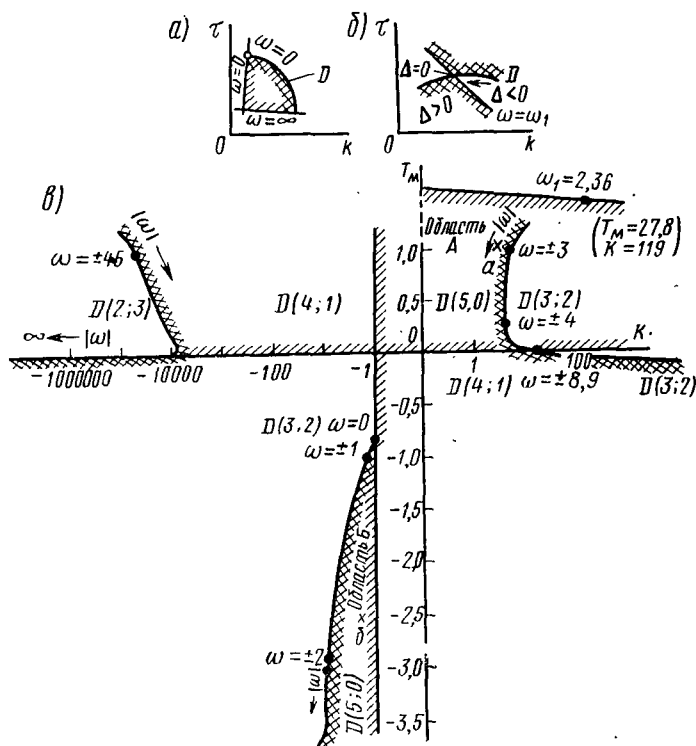


Рис. 8.13

Пример 8.8. Построим D -разбиение плоскости двух параметров (коэффициента усиления разомкнутой системы K и постоянной времени двигателя T_M) системы автоматического регулирования скорости двигателя постоянного тока (см. рис. 4.2). Для остальных параметров используем численные данные, указанные в примере 8.1 На основании (7.83) запишем характеристическое уравнение системы в виде (8.74):

$$K \nrightarrow T_M(0,0001p^5 \nrightarrow 0,0117p^4 \nrightarrow 0,178p^3 \nrightarrow 0,81p^2 \nrightarrow p) \nrightarrow$$

$$\nrightarrow (0,01p^3 \nrightarrow 0,17p^2 \nrightarrow 0,8p \nrightarrow 1) = 0. \quad (8.82)$$

Заменяв p на $j\omega$, на основании указанного выше получим

$$\left. \begin{aligned} K &= (0,17\omega^2 - 1) \cdot \omega^2 (0,81 - 0,0117\omega^2) T_M; \\ T_M &= -\frac{0,01\omega^2 - 0,8}{0,0001\omega^4 - 0,178\omega^2 + 1} \end{aligned} \right\} \quad (8.83)$$

Изменяя ω от 0 до $+\infty$, по (8.83) определим для каждого значения ω параметры K и T_M и построим кривые D -разбиения (рис. 8.13, в). Принимая в исходном уравнении (8.82) коэффициент при p^5 и свободный член равными нулю, получим уравнения особых линий $T_M = 0$ и $K = -1$.

Кроме того, из условия $\Delta = 0,0001\omega^4 - 0,178\omega^2 + 1 = 0$ находим $\omega_1 = 2,36$ 1/сек, для которой особая прямая проходит через точку с координатами $K = 119$ и $T_M = 27,8$ с углом наклона $\alpha = -12^\circ 30'$, определяемым из уравнения

$$dT_M/dK = \operatorname{tg} \alpha \text{ при } \omega_1 = 2,36 \text{ 1/сек.}$$

После нанесения этих линий по известным правилам производим штриховку D -кривых и особых линий. Из предыдущих примеров известно, что при $T_M = 1$ сек и $K = 6$ система устойчива, поэтому для области A с такой точкой указываем распределение корней D (5; 0). Распределение корней для других областей определяем по правилу перехода через D -кривую.

На основании полученного графика устанавливаем, что точка со значениями $K = 6$ и $T_M = 1$ сек близка к границе области устойчивости.

Полученная область B также соответствует значениям параметров, когда система устойчива; однако значения K и T_M здесь отрицательны, что не соответствует реальным условиям практики, поэтому область B является теоретической.

§ 8.13. Запас устойчивости

Определение устойчивости систем по указанным критериям для заданных параметров, а также выбор некоторых параметров после построения областей устойчивости должны производиться с учетом запаса устойчивости. Определенный запас устойчивости системы необходим по следующим причинам:

при составлении уравнений звеньев автоматической системы допускается некоторая идеализация реального явления: в нем берется только самое главное и отбрасывается масса второстепенных факторов;

при линеаризации уравнения становятся еще более приближенными; параметры системы, входящие в коэффициенты уравнения (массы, моменты инерции, емкости, сопротивления, коэффициенты усиления, постоянные времени и т. д.), определяются с более или менее значительной погрешностью (неточность расчета некоторых коэффициентов составляет около 10%), что зависит от методов измерения и применяемых приборов;

при пользовании экспериментально снятыми характеристиками неизбежны погрешности в методике эксперимента, в технике его проведения и обработке результатов;

в серии систем управления, имеющих одинаковую структурную схему, параметры однотипных образцов не могут быть совершенно одинаковыми; всегда имеется случайный разброс параметров вследствие технологических допусков на изготовление деталей и других причин, что указывает на приближенность расчета, производимого по параметрам какого-либо образца, по сравнению с серией;

в процессе работы каждого образца также возможны изменения параметров, имеющие случайный характер (деформации, неустойчивость, температурные изменения и пр.).

Следовательно, при определении устойчивости системы нет гарантии, что реальной системе будет соответствовать точно та точка области устойчивости, которая была найдена расчетным путем. Так, если расчетное состояние было слишком близко к границе устойчивости, то по указанным причинам реальная система может оказаться неустойчивой.

Запас устойчивости предусматривает некоторое удаление расчетных параметров системы от значений, соответствующих границе

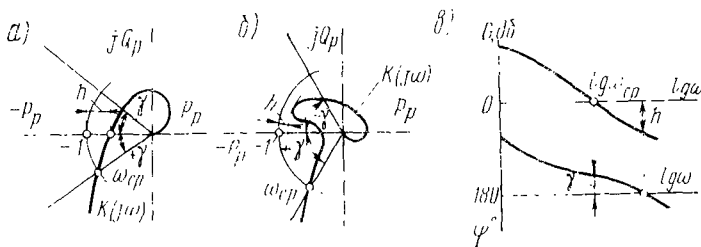


Рис. 8.14

устойчивости. Этот запас устойчивости обеспечивает работу реальной системы в области устойчивости с заданным качеством переходного процесса.

Формулировка запаса устойчивости системы зависит от того, какой критерий устойчивости применяется. При использовании критерия Найквиста устойчивость определяется по расположению АФХ относительно критической точки с координатами $(-1; j 0)$. Очевидно, что запас устойчивости будет тем больше, чем дальше расположена АФХ от этой точки (рис. 8.14, а).

Определяя запас устойчивости, обычно вводят понятие о запасе устойчивости по фазе и запасе устойчивости по модулю вектора $K(j\omega)$. Оба эти запаса рассматриваются одновременно.

Если угол, равный разности между фазой $\varphi(\omega_{cp})$ вектора $K(j\omega_{cp})$ и углом π , назвать *избытком фазы*, то запас устойчивости по фазе γ будет характеризоваться наименьшей величиной избытка фазы при модуле, равном единице. Наименьшая величина γ относится к случаю, когда модуль вектора $K(j\omega)$ имеет несколько значений, равных единице.

Запас устойчивости по модулю h определяется величиной отрезка оси абсцисс, заключенного между критической точкой $(-1, j 0)$ и АФХ.

Частота ω_{cp} , соответствующая вектору $K(j\omega_{cp})$, имеющему модуль, равный единице, называется *частотой среза разомкнутой системы*.

В некоторых случаях для исключения ошибок целесообразно запас по модулю h устанавливать другим путем, т. е. находить как наименьшее значение разности между модулем вектора $K(j\omega)$ и единицей

при избытке фазы в пределах $\pm \gamma$ (см. рис. 8.14, б). При использовании критерия Найквиста величины запаса устойчивости по модулю и по фазе могут быть выражены также в процентах:

$$\left. \begin{aligned} h\% &= (h/1) \cdot 100; \\ \gamma\% &= (\gamma/180) \cdot 100. \end{aligned} \right\} \quad (8.84)$$

При использовании критерия Михайлова запас устойчивости характеризуется наименьшей величиной отрезка между точкой пересечения годографом вещественной оси и началом координат. Если применяется следствие критерия Михайлова (перемежаемость корней),

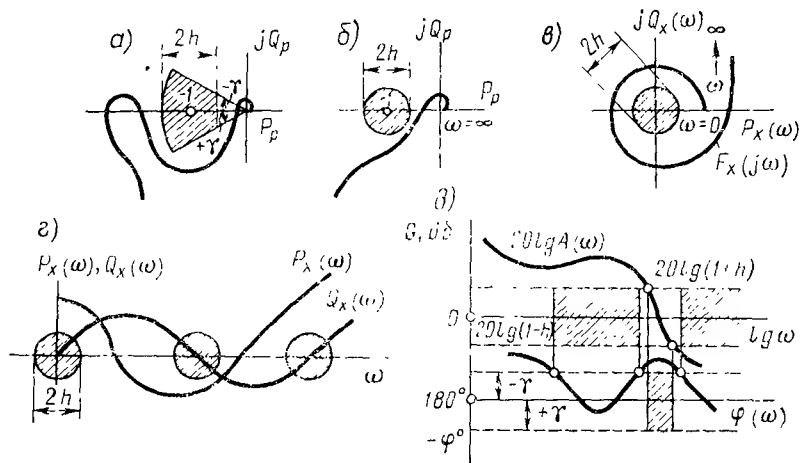


Рис. 8.15

то запас устойчивости определяется наименьшим расстоянием между точками на оси частот для вещественной и мнимой характеристик.

При использовании логарифмических характеристик запас по фазе γ находится по кривой ЛФХ при ω_{cp} , а запас по модулю — по кривой ЛАХ при $\varphi = -180^\circ$ (рис. 8.14, в).

Для системы, рассмотренной в примере 8.4, по рис. 8.5, б устанавливаем $h = 1,5$ дБ, $\gamma = 10^\circ$.

Для того чтобы система обладала определенным запасом устойчивости, на комплексной плоскости частотных характеристик вокруг критической точки вычерчивается определенная запретная область, в которую частотная характеристика не должна заходить (рис. 8.15). Для рис. 8.15, а считается, что система обладает запасом по модулю и по фазе, если ЛФХ не заходит в запретную область, обозначенную в виде сектора, ограниченного величинами $\pm h$ и $\pm \gamma$ около критической точки. На рис. 8.15, б запретная область для АФХ представлена в виде круга радиуса h с центром в критической точке. На рис. 8.15, в (критерий Михайлова) запретная область изображена кругом заданного радиуса h с центром в начале координат, а в случае анализа перемежаемости корней запретные области указываются в виде кругов

заданного радиуса относительно корней, например, мнимой $Q_x(\omega)$ составляющей функции (рис. 8.15, з). Для случая логарифмических характеристик запретные области наносятся на графики ЛАХ и ЛФХ по заданным запасам h и γ . Эти области (рис. 8.15, д) представляют собой прямоугольники, ограниченные для ЛАХ горизонтальными линиями на расстоянии $20 \lg(1 + h)$ и $20 \lg(1 - h)$ от оси абсцисс, а для ЛФХ — линиями $(180^\circ - \gamma)$ и $(180^\circ + \gamma)$.

При алгебраических критериях устойчивости, выражающихся в виде неравенств, запас устойчивости будет обеспечен, если эти неравенства достаточно далеки от равенств. Например, для критерия Вышнеградского необходимо, чтобы при заданном $\varepsilon > 0$ выполнялось неравенство $XU > 1 + \varepsilon$. Для критерия Гурвица применительно к уравнению n -го порядка необходимо, чтобы все диагональные определители были больше ε . Для критерия Рауса необходимо, чтобы все элементы первого столбца таблицы были больше ε .

Значения h , γ и ε , характеризующие запас устойчивости, устанавливаются обычно опытным путем для систем определенных классов. Выбор соответствующего запаса устойчивости позволяет обеспечить и заданный характер переходного процесса (качество процесса).

§ 8.14. Критический коэффициент усиления

Ранее отмечалась связь коэффициентов характеристического уравнения с распределением его корней в плоскости корней. Так как коэффициенты уравнения системы зависят от параметров звеньев (постоянных времени, коэффициентов усиления), то изменение последних вызывает перераспределение корней.

Рассмотрим, например, влияние величины коэффициента усиления K на вид АФХ и соответственно на поведение системы. При последовательном включении звеньев передаточная функция $K(p)$ определяется произведением передаточных функций отдельных звеньев и содержит в числителе статический коэффициент усиления K . Увеличение этого коэффициента приводит к росту вектора $K(j\omega)$. Это вызывает расширение АФХ, приближая ее к критической точке $(-1; j0)$. Следовательно, увеличение коэффициента усиления K может привести к такому изменению АФХ, что критическая точка окажется охваченной, и система будет неустойчивой.

Изменение АФХ при различных коэффициентах усиления системы показано на рис. 8.16, а; кривая 2 соответствует системе, где K в два раза больше, чем в системе, которой соответствует кривая 1. Однако в некоторых случаях уменьшение K может привести к неустойчивости, например, в системе, обладающей АФХ клювообразного вида (рис. 8.16, б). Здесь при уменьшении K критическая точка может

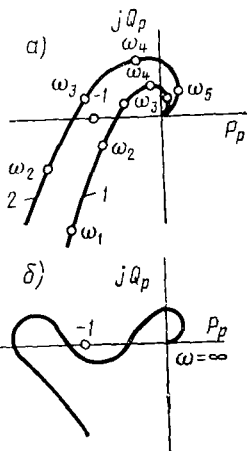


Рис. 8.16

оказаться охваченной второй петлей кривой и система станет неустойчивой (системы, имеющие АФХ клювообразного вида иногда называются *условно устойчивыми*).

Значения коэффициента усиления, при которых АФХ проходит через критическую точку $(-1, j0)$, называются *критическими* для разомкнутой системы и обозначаются $K_{кр}$.

Исследуя расположение кривой Михайлова, а также ее вещественной и мнимой составляющих, можно установить, как изменяются запас устойчивости и поведение системы регулирования при изменении параметров. Величина K определяет статическую ошибку: чем больше K , тем выше статическая точность системы. Однако у каждой автоматической системы имеется предельное значение $K_{кр}$, обеспечивающее устойчивость. Это критическое значение $K_{кр}$ зависит от значений постоянных времени звеньев.

Рассмотрим систему, состоящую из инерционных звеньев. Если порядок характеристического уравнения замкнутой системы определяется, например, постоянными времени T_1, T_2 и T_3 при коэффициентах усиления звеньев k_1, k_2 и k_3 , то коэффициенты характеристического уравнения будут выражены через эти величины:

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0, \quad (8.85)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= T_1 T_2 T_3; \\ a_1 &= T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3; \\ a_2 &= T_1 + T_2 + T_3; \\ a_3 &= 1 + k_1 k_2 k_3. \end{aligned} \right\} \quad (8.86)$$

Предельное значение коэффициента усиления можно определить на основании критерия Гурвица, когда $\Delta_2 = 0$:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 0. \quad (8.87)$$

Подставив в (8.87) значение коэффициентов (8.86) и обозначив $k_1 k_2 k_3$ через $K_{кр}$, получим

$$(T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3)(T_1 + T_2 + T_3) - T_1 T_2 T_3(1 + K_{кр}) = 0. \quad (8.88)$$

После алгебраических преобразований (раскрывая скобки и деля на значение a_0) запишем

$$K_{кр} = 2 + \frac{T_2}{T_1} + \frac{T_3}{T_1} + \frac{T_1}{T_2} + \frac{T_3}{T_2} + \frac{T_1}{T_3} + \frac{T_2}{T_3}. \quad (8.89)$$

Из (8.89) можно сделать весьма важный практический вывод: *критический коэффициент усиления является функцией отношения постоянных времени*. Изменяя это отношение, можно в достаточно широких пределах получать значения $K_{кр}$. Например, при $T_1 = T_2 = T_3 = T$ имеем $K_{кр} = 8$ независимо от величины $0 < T < \infty$.

Аналогично можно определить зависимость $K_{кр}$ от определенных сочетаний постоянных времени систем при любом порядке характеристического уравнения статических и астатических систем.

Найдем $K_{кр}$ системы для случая звеньев с одинаковыми T и k ; характеристическое уравнение замкнутой системы можно записать в виде

$$\prod_{i=1}^n (T_i p + 1) + k_i^n = (Tp + 1)^n + K = 0. \quad (8.90)$$

При этом уравнение частотной функции, определяющей годограф Михайлова, представится как

$$F_x(j\omega) = (Tj\omega + 1)^n + K. \quad (8.91)$$

Все звенья будут иметь одинаковые годографы Михайлова $F_3(j\omega) = (Tj\omega + 1)$. Допустим, что годограф системы перемещен влево вдоль вещественной оси на величину K . Тогда при $\omega = 0$ он будет находиться на расстоянии, равном $+1$ от начала координат. Пусть годограф Михайлова впервые пересекает вещественную ось при $\omega = \omega_{кр}$ (рис. 8.17).

Если A — модуль, α — фаза вектора одного звена, то при n последовательно включенных звеньях результирующий вектор

$$F_{рез}(j\omega_1) = A^n e^{jn\alpha}. \quad (8.92)$$

При первом пересечении годографом вещественной оси вектор $F_x^\circ(j\omega)$ имеет фазу 180° , т. е.

$$\pi = n\alpha$$

или

$$\alpha = \pi/n. \quad (8.93)$$

Рассматривая треугольник Oab (см. рис. 8.17), можно записать выражение для модуля и фазы отдельного звена при частоте $\omega = \omega_1$, для которой $F_3(j\omega_1)$ имеет угол $\alpha = \pi/n$:

$$\left. \begin{aligned} A &= \sqrt{(T\omega_1)^2 + 1}; \\ \operatorname{tg} \alpha &= \operatorname{tg}(\pi/n) = T\omega_1/1 = T\omega_1. \end{aligned} \right\} \quad (8.94)$$

Если постоянные времени остаются неизменными, то форма годографа не изменяется. Из рис. 8.17 можно заключить, что критическим коэффициентом усиления является модуль вектора $F_x^\circ(j\omega_{кр})$, так как при сдвиге годографа вправо на эту величину он пройдет через начало координат. Следовательно,

$$K_{кр} = A^n = \left[\sqrt{(T\omega_{кр})^2 + 1} \right]^n = \left[\sqrt{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{n}\right) + 1} \right]^n = \left[\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)} + 1 \right]^{n/2},$$

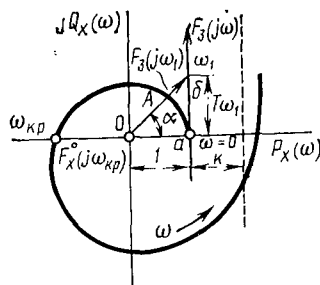


Рис. 8.17

откуда

$$K_{кр} = 1/\cos^n(\pi/n). \quad (8.95)$$

Ниже приведены значения $K_{кр}$ при различных числах одинаковых звеньев одноконтурной системы [см. (8.95)]:

n	2	3	4	5	6
$K_{кр}$	∞	8	4	2,9	2,4

В современных системах управления необходим коэффициент усиления, достигающий порядка нескольких десятков и сотен единиц. Одноконтурные системы с одинаковыми (и близкими) значениями постоянных времени звеньев непригодны для практического применения при $n > 2$. Чтобы получить большие значения $K_{кр}$, надо выбирать звенья с различными постоянными времени. Установлено, что если система состоит из трех инерционных звеньев, то допустимая величина $K_{кр}$ тем выше, чем больше разница между значениями двух наиболее отличающихся друг от друга постоянных времени ($T_1 \gg T_2$), а третья равна среднеарифметическому значению:

$$T_3 = (T_1 + T_2)/2. \quad (8.96)$$

В случае n последовательно соединенных звеньев наибольшее $K_{кр}$ можно получить тогда, когда разница двух значений постоянных времени будет наибольшей, одно значение постоянной времени равно среднеарифметической величине от этих крайних значений, а величины остальных постоянных времени мало отличаются от меньшей постоянной.

Положим, что удалось добиться того, что постоянные времени последовательно соединенных звеньев составляют геометрическую прогрессию и имеется определенная кратность:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{T_2}{T_3} = \dots = \frac{T_k}{T_{k+1}} = \dots = \frac{T_{n-1}}{T_n} = \lambda. \quad (8.97)$$

Тогда $K_{кр}$ для статической системы при различном числе n звеньев и различном λ может принимать значения, приведенные в табл. 8.3. Из таблицы видно, как важно увеличивать λ , т. е. «раздвигать» постоянные времени; при этом можно записать

$$\lambda^{n-1} = T_1/T_n. \quad (8.98)$$

Если среди звеньев имеется одно интегрирующее, то система становится астатической. Значения $K_{кр}$ в зависимости от λ для астатической системы приведены в табл. 8.4.

Таблица 8.3

Значения коэффициента усиления для статической системы

Кратность постоянной времени λ	Число звеньев			
	3	4	5	6
5	37	33	29	28
10	122	110	110	110
100	10 200	10 100	10 098	10 097

Значения коэффициента усиления для астатической системы

Кратность постоянной времени λ	Число звеньев (включая интегрирующие)			
	3	4	5	6
1	2	0,89	0,57	0,42
5	6	4,87	4,68	4,62
10	11	9,92	9,91	9,9
190	101	100	100	100

В общем случае коэффициент $K_{кр}$ может быть определен по критерию Гурвица из (8.30) или по методу D -разбиения. Для рассмотренной в примерах 8.1 ÷ 8.7 системы регулирования в результате расчета и из рис. 8.12, в находим $K_{кр} = 7,35$.

§ 8.15. Устойчивость систем с запаздыванием

К линейным системам с запаздыванием относятся автоматические системы, содержащие одно или несколько звеньев с запаздыванием. Время запаздывания остается постоянным во всем ходе процесса управления.

На практике различают два вида элементов запаздывания: в первом сигнал на выходе не искажается, а точно повторяется, но через некоторый промежуток времени τ (рассмотренное ранее простейшее звено с запаздыванием); во втором кроме задержки сигнала на выходе во времени τ искажается его форма.

Если в системе несколько звеньев с запаздыванием, то их можно заменить одним эквивалентным звеном с запаздыванием $\tau_{экв}$, определяемым суммой времени запаздывания всех звеньев.

Для разомкнутой системы, представляемой на структурной схеме рядом последовательно соединенных типовых звеньев, среди которых имеется звено с запаздыванием, можно на основании правил преобразований структурных схем записать передаточную функцию:

$$K_{\tau}(p) = K(p) e^{-p\tau}, \quad (8.99)$$

где $K(p) = B(p)/A(p)$ — передаточная функция последовательно соединенных звеньев без учета звена с запаздыванием; $K_{\tau}(p)$ — передаточная функция разомкнутой системы с учетом звена с запаздыванием.

Для замкнутой системы на основании (8.99) и ранее установленного правила передаточная функция

$$W(p) = \frac{K_{\tau}(p)}{1 + K_{\tau}(p)} = \frac{K(p) e^{-p\tau}}{1 + K(p) e^{-p\tau}}. \quad (8.100)$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы с запаздыванием будет трансцендентным:

$$F_{\tau}(p) = 1 + K(p) e^{-p\tau} \cdot A(p) + B(p) e^{-p\tau} = 0. \quad (8.101)$$

Решение дифференциального уравнения систем с запаздыванием можно записать в виде ряда. Для устойчивости системы необходимо, чтобы все корни уравнения (8.101) имели отрицательные вещественные части. Но в отличие от обыкновенного алгебраического уравнения оно может иметь бесконечное количество корней, т. е. будет равно нулю при бесчисленных значениях p , включая $p = \infty$. Это обстоятельство не позволяет непосредственно применить известные критерии устойчивости для исследования систем с запаздыванием. Для обеспечения устойчивости линейных систем первого и второго порядка с запаздыванием уже недостаточно выполнения только условия положительности коэффициентов, а для систем третьего порядка с запаздыванием и выше неприменимы критерии устойчивости Вышнеградского, Рауса и Гурвица.

Расчет по критерию Найквиста. На основании (8.99) можно отметить, что передаточная функция разомкнутой системы с запаздыванием $K_\tau(p)$ равна произведению передаточной функции той же системы при отсутствии запаздывания на передаточную функцию запаздывающего звена $e^{-p\tau}$. Если τ постепенно уменьшать до нуля, то в пределе получим:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} K_\tau(p) = K_{np}(p) = K(p). \quad (8.102)$$

При этом система превратится в предельную, в которой собственно запаздывающее звено отсутствует; оно как бы заменено прямой жесткой связью. С учетом сказанного вместо (8.99) можно записать:

$$K_\tau(p) = K_{np}(p) e^{-p\tau}. \quad (8.103)$$

Заменяя в (8.103) p на $j\omega$, получим частотную функцию

$$K_\tau(j\omega) = K_{np}(j\omega) e^{-j\omega\tau}. \quad (8.104)$$

Изменяя частоту ω , по (8.104) можно построить АФХ разомкнутой системы с учетом запаздывания. Для линейной системы справедлива запись:

$$K_{np}(j\omega) = A_{np}(\omega) e^{-j\varphi(\omega)}. \quad (8.105)$$

Подставив (8.105) в (8.104), получим

$$K_\tau(j\omega) = A_{np}(\omega) e^{-j[\varphi(\omega) + \omega\tau]}. \quad (8.106)$$

Из (8.106) видно, что для определения АФХ системы с запаздыванием следует построить АФХ предельной системы и повернуть каждый радиус-вектор этой характеристики на угол $\omega\tau$ по часовой стрелке (рис. 8.18, а). Например, вместо точки a на кривой при ω_a АФХ предельной системы получим точку b АФХ системы с запаздыванием, повернув вектор на угол $\omega_a\tau$ по часовой стрелке.

По виду АФХ системы с запаздыванием и ее расположению относительно критической точки $(-1; j0)$ заключают об устойчивости системы.

При различных временах запаздывания τ может оказаться, что АФХ системы с запаздыванием пройдет через критическую точку при частоте $\omega_{кр}$ или охватит ее. В этом случае модуль вектора будет равен единице, а фаза будет кратна величине π :

$$A(\omega_{кр}) = 1;$$

$$-[\varphi(\omega_{кр}) + \tau_{кр} \omega_{кр}] = -\pi \pm 2\pi q, \quad q = 0, 1, 2, \dots, \quad (8.107)$$

где индекс «кр» указывает на соответствие критической точке $(-1, j0)$.

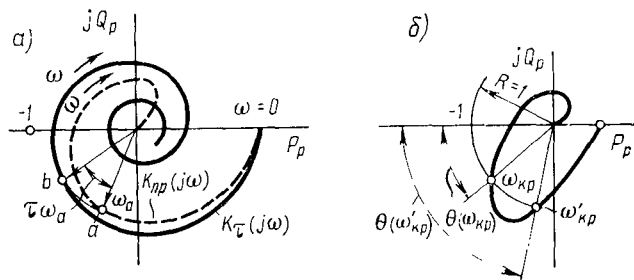


Рис. 8.18

Из соотношений (8.107) находят предельное значение $\tau_{кр}$, при котором система находится на границе устойчивости (при $q = 0$):

$$\tau_{кр} = [\pi - \varphi(\omega_{кр})] / \omega_{кр} = \theta(\omega_{кр}) / \omega_{кр}. \quad (8.108)$$

Если $\tau < \tau_{кр}$, то система устойчива; если $\tau > \tau_{кр}$, то система неустойчива.

Чтобы найти значение $\theta(\omega_{кр})$, применяют следующий графический способ (рис. 8.18, б). Из начала координат, как из центра, проводят окружность единичного радиуса ($R = 1$). Точку ее пересечения с АФХ предельной системы при $\omega_{кр}$ соединяют с началом координат. Угол, заключенный между полученным лучом и отрицательной вещественной полуосью, будет равен $\theta(\omega_{кр})$.

Если имеется две точки пересечения при $\omega_{кр}$ и $\omega'_{кр}$ (см. рис. 8.18, б), то при $\tau'_{кр} > \tau > \tau_{кр}$ система неустойчива, а при $\tau > \tau'_{кр}$ — устойчива. Следовательно, в некоторых автоматических системах будет наблюдаться перемена участков устойчивости и неустойчивости в зависимости от величины τ .

При исследовании устойчивости систем с запаздыванием по критерию Найквиста можно соответствующим образом использовать также нормированные, обратные и логарифмические частотные характеристики. При расчете устойчивости системы с запаздыванием необходимо определенным образом условно размыкать систему. Если замкнутая система с запаздыванием является одноконтурной, то размыкать систему можно в любом месте; если же замкнутая система с запаздыванием является многоконтурной, то размыкать ее следует на том участке, где включено звено с запаздыванием.

Использование кривой D -разбиения при определении устойчивости. Определить устойчивость многоконтурной замкнутой системы с запаздыванием и найти критическое значение времени запаздывания можно из кривой D -разбиения, например, по общему коэффициенту усиления системы. Выделив в характеристическом уравнении замкнутой системы (8.101) общий коэффициент усиления, можно записать

$$A(p) + KB_1(p) e^{-p\tau} = 0. \quad (8.109)$$

Кривая D -разбиения относительно общего коэффициента усиления предельной системы ($\tau = 0$)

$$K = -A(j\omega)/B_1(j\omega). \quad (8.110)$$

При наличии запаздывания кривая D -разбиения относительно общего коэффициента усиления

$$K_\tau = \frac{A(j\omega)}{B_1(j\omega)} e^{j\omega\tau}. \quad (8.111)$$

Сравнивая (8.110) и (8.111), устанавливаем, что при наличии запаздывания каждый вектор K_{np} предельной системы поворачивается на угол $\omega\tau$ против часовой стрелки. Это позволяет построить кривую K_τ представленную на рис. 8.19, а. Из сопоставления кривых на этом рисунке видно, что K_{np} системы с запаздыванием меньше, чем предельной системы. Однако возможны и другие случаи в зависимости

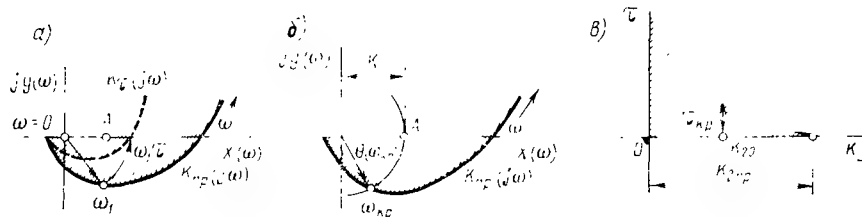


Рис. 8.19

от расположения кривой D -разбиения предельной системы. Устойчивость системы с запаздыванием определяется расположением точки A , соответствующей заданной величине K . Если точка A находится в области устойчивости (со стороны нитриховки кривой K_τ), то система с запаздыванием устойчива.

Возможен следующий способ определения критического времени запаздывания по кривой D -разбиения предельной системы; если из начала координат, как из центра, провести дугу радиусом, равным заданной величине K , до пересечения с кривой D -разбиения предельной системы, то луч, проведенный из начала координат в эту точку, будет определять предельный угол θ (ω_{np}) (рис. 8.19, б). Тогда критическое время запаздывания

$$\tau_{кр} = \theta(\omega_{np})/\omega_{np}. \quad (8.112)$$

Если $\tau < \tau_{кр}$, то система будет устойчивой при данном K разомкнутой системы.

В некоторых случаях целесообразно, проектируя систему, выбрать значение какого-либо параметра k_2 по методу D -разбиения, учитывая наличие звена с запаздыванием. Применяв указанное выше построение (см. рис. 8.19, б), можно при разных значениях k_2 получить соответствующие значения $\tau_{кр}$. Это позволит построить кривую в координатах (k_2, τ) , ограничивающую область устойчивости по данным параметрам (рис. 8.19, в).

Звено с запаздыванием в одних случаях ухудшает устойчивость, а в других — способствует стабилизации неустойчивой предельной системы.

Пример 8.9. Определим устойчивость систем с запаздыванием (см. рис. 6.2).

Передаточная функция разомкнутой системы

$$K(p) = \frac{K e^{-\tau p}}{p(1 + T_{эм} p)(1 + T_{н.з} p)(1 + T_{к.з} p)} \quad (8.113)$$

Пусть задано $K = 0,71$ 1/сек; $T_{эм} = 2$ сек; $T_{н.з} = 0,312$ сек; $T_{к.з} = 0,14$ сек; $\tau = 1$ сек. Подставляя заданные значения в (8.113), построим логарифмические частотные характеристики предельной системы ($\tau = 0$), определив предварительно

$$20 \lg K = -3 \text{ дб}; \quad \omega_{с1} = 1/T_{эм} = 0,5 \text{ 1/сек}; \\ \omega_{с2} = 1/T_{н.з} = 3,2 \text{ 1/сек}; \quad \omega_{с3} = 1/T_{к.з} = 7,15 \text{ 1/сек}.$$

Из рис. 8.20 видно, что предельная система устойчива и имеет запас устойчивости по фазе $\gamma^\circ = 24^\circ$ при $\omega_{ср} = 0,55$ 1/сек. На основании (8.108) определяем критическое время запаздывания

$$\tau_{кр} = \frac{\gamma}{\omega_{ср}} = \frac{24^\circ \pi}{180^\circ \cdot 0,55} = 0,76 \text{ сек}.$$

В рассматриваемой системе задано $\tau = 1$ сек, которое больше $\tau_{кр} = 0,76$ сек, поэтому указанная система с запаздыванием при заданных параметрах неустойчива. Чтобы обеспечить устойчивость этой системы с запаздыванием, следует либо уменьшить согласно (6.74) запаздывание за счет снижения l или увеличения v , либо изменить параметры или структуру предельной системы.

§ 8.16. Вопросы структурной устойчивости систем

В ряде случаев оказывается, что система неустойчива при любых значениях параметров и сделать ее устойчивой можно только изменив структуру. Такого рода системы называются *структурно неустойчивыми*.

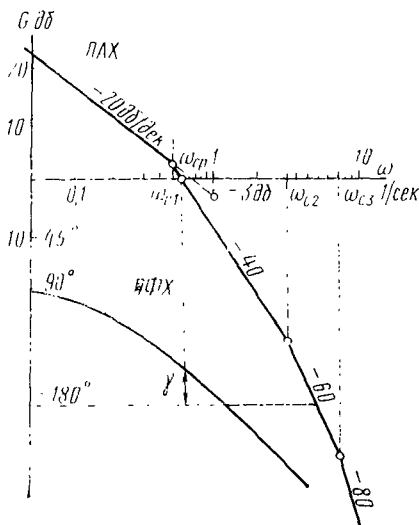


Рис. 8.20

Имеются такие сочетания звеньев, когда система «абсолютно устойчива» независимо от значений параметров этих звеньев. При этом характеристическое уравнение системы не выше второго порядка и ни один из его членов не становится отрицательным или равным нулю.

Ранее было указано, что АФХ разомкнутой статической системы имеет начало на положительной вещественной полуоси (при $\omega = 0$) и заканчивается в начале координат (при $\omega = \infty$). Пусть, например, эта АФХ определяется частотной функцией одноконтурной разомкнутой системы без дифференцирующих элементов:

$$K(j\omega) = \frac{K}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2) \dots (1 + j\omega T_n)}. \quad (8.114)$$

Здесь при $\omega = 0$ значение $K(j0) = K$.

Если теперь включить в основной контур одно интегрирующее звено, то частотная функция

$$K(j\omega) = - \frac{jK}{\omega (1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2) \dots (1 + j\omega T_n)}. \quad (8.115)$$

Здесь при $\omega = 0$ значение $K(j0) = -j\infty$ и АФХ будет иметь вид кривой, уходящей в бесконечность вдоль отрицательной мнимой полуоси. Выбором параметров системы можно добиться, чтобы критическая точка не охватывалась кривой АФХ. Бесконечно большое значение $K(j0)$ физически означает, что при подаче на вход воздействия постоянной величины выходная переменная интегрирующего звена непрерывно будет увеличиваться с постоянной скоростью. Замыкание ветви АФХ, определяемой положительными частотами, с ветвью, определяемой отрицательными частотами, осуществляется в данном случае дугой бесконечно большого радиуса. Для одноконтурной системы с двумя последовательно включенными интегрирующими звеньями без дифференцирующих звеньев частотная функция

$$K(j\omega) = - \frac{K}{\omega^2 (1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2) \dots (1 + j\omega T_n)}.$$

Здесь при $\omega = 0$ также получим $K(j0) = -\infty$ и АФХ будет иметь вид кривой, уходящей в бесконечность вдоль отрицательной вещественной полуоси. Если дополнить АФХ дугой бесконечно большого радиуса, то критическая точка $(-1; j0)$ будет всегда охвачена кривой АФХ и система будет неустойчива при любых значениях параметров. Таким образом, одноконтурная система, содержащая два интегрирующих звена, но не имеющая дифференцирующих звеньев, представляет собой структурно неустойчивую систему. В этом можно убедиться также, анализируя характеристическое уравнение замкнутой системы, содержащей, например, последовательно соединенные два интегрирующих и одно инерционное звено:

$$(T_1 p + 1) T_2 p T_3 p + k_1 k_2 k_3 = 0. \quad (8.116)$$

Раскрыв скобки в (8.116), получим уравнение, которое не содержит члена с оператором p в первой степени. Это указывает на несоблюде-

ние необходимого условия устойчивости систем — положительности всех коэффициентов, поэтому никакие значения параметров системы T и K не обеспечивают отрицательности вещественных частей корней уравнения (8.116) и, следовательно, система является структурно неустойчивой.

Еще одним примером структурно неустойчивой системы является система, состоящая из последовательно соединенных инерционного звена первого порядка и консервативного звена; ее характеристическое уравнение имеет вид

$$(T_1 p + 1)(T_2^2 p^2 + 1) + k_1 k_2 = 0,$$

или

$$T_1 T_2^2 p^3 + T_2^2 p^2 + T_1 p + (k_1 k_2 + 1) = 0.$$

Система будет устойчивой, если по критерию Гурвица соблюдается неравенство

$$T_1 T_2^2 - T_1 T_2^2 (k_1 k_2 + 1) > 0,$$

т. е. если

$$-T_1 T_2^2 k_1 k_2 > 0. \quad (8.117)$$

В связи с тем что постоянные времени T_1 , T_2 и коэффициенты усиления k_1 , k_2 являются положительными числами, неравенство (8.117) невыполнимо. Следовательно, система, содержащая консервативное звено и инерционное звено первого порядка, структурно неустойчива.

Имеются другие сочетания звеньев, которые соответствуют структурно неустойчивым системам; в характеристическом уравнении таких систем отсутствуют некоторые члены (наличие интегрирующих звеньев) или не все члены имеют один и тот же знак (наличие неустойчивых звеньев).

Таким образом, в ряде случаев, анализируя проектируемую систему, можно заранее отбросить варианты, которые являются структурно неустойчивыми. Это особенно существенно при анализе сложных систем.

Исследования [Л. 1, 25] показали, что относительно структурной устойчивости систем управления могут быть сделаны некоторые выводы. Например, одноконтурная система, содержащая q интегрирующих звеньев, t неустойчивых звеньев или r консервативных звеньев, при n -й степени характеристического уравнения структурно устойчива [Л. 1], если:

при отсутствии стабилизирующих устройств (без производных в законе управления)

$$q + t < 2; \quad n > 4r;$$

при наличии воздействий по первой производной и при $q + t < 3$

$$n > 4r - 3 \quad \text{для} \quad q + t = 0;$$

$$n > 4r \quad \text{для} \quad q + t = 1;$$

$$n > 4r + 1 \quad \text{для} \quad q + t = 2.$$

Исследования многоконтурных систем с перекрещивающимися (простыми) обратными связями показали, что для структурной устойчивости такой системы достаточно (но не необходимо), чтобы этим же свойством обладали все ее участки с внутренними контурами.

§ 8.17. Исследование устойчивости методом корневого годографа

Метод корневого годографа (метод Эванса) может быть применен при расчете корректирующих устройств автоматических систем, а также при исследовании устойчивости замкнутых автоматических систем и оценке качества переходного процесса [Л. 37].

Корневыми годографами называются траектории, описываемые корнями характеристического уравнения автоматической системы в комплексной плоскости корней при изменении одного из параметров (чаще всего коэффициента усиления) от 0 до ∞ .

Этот графо-аналитический метод отличается большой наглядностью. Он основан на использовании передаточных функций системы и заключается в определении расположения корней характеристического уравнения замкнутой системы в плоскости корней по известному расположению нулей и полюсов передаточной функции разомкнутой системы при различных значениях какого-либо параметра.

Рассматривая передаточные функции и характеристические уравнения разомкнутой и замкнутой систем, можно установить взаимосвязь между их нулями и полюсами при различных значениях коэффициента усиления. В случае одноконтурной системы передаточная функция при разомкнутой ГОС определяется произведением передаточных функций типовых звеньев и поэтому состоит из сомножителей первого и второго порядка:

$$K(p) = B(p)/A(p) = KB_1(p)/A(p) = KK_1(p), \quad (8.118)$$

где $K_1(p) = B_1(p)/A(p)$, $K = k_1 k_2 \dots k_n$ — коэффициент усиления разомкнутой системы.

Характеристическое уравнение разомкнутой системы при этом имеет вид:

$$A(p) = 0. \quad (8.119)$$

Передаточная функция замкнутой системы относительно задающего воздействия при единичной обратной связи

$$W(p) = KB_1(p)/[A(p) + KB_1(p)]. \quad (8.120)$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы на основании (8.120) запишется как

$$A(p) + KB_1(p) = 0, \quad (8.121a)$$

или

$$A(p)/K + B_1(p) = 0. \quad (8.121б)$$

Из выражений (8.121а) и (8.121б) следует, что при $K \rightarrow 0$ корни характеристического уравнения замкнутой системы стремятся к корням характеристического уравнения разомкнутой системы $A(p) = 0$, т. е. к полюсам передаточной функции разомкнутой системы (8.118). В случае, когда $K \rightarrow \infty$, из (8.121) следует, что корни характеристического уравнения замкнутой системы стремятся к корням полинома $B_1(p)$, т. е. к нулям передаточной функции разомкнутой системы (8.118). Если $B_1(p) = \text{const}$, то все корни характеристического уравнения замкнутой системы уходят в бесконечность при $K \rightarrow \infty$, так как в этом случае корни $B_1(p)$ находятся в бесконечности.

Нули передаточных функций (8.118) и (8.120), характеризующиеся корнями полиномов числителей, одинаковы. Корни характеристического уравнения замкнутой системы (8.121) определяются суммой полиномов $A(p)$ и $K \cdot B_1(p)$ передаточной функции разомкнутой системы.

Таким образом, замечена общая тенденция изменения корней (полюсов); найдены начала и концы их траекторий, получаемых при изменении коэффициента усиления разомкнутой системы.

Чтобы построить траектории корней (корневые годографы) уравнения (8.121) при изменении коэффициента усиления K и неизменных остальных параметров, надо найти расположение корней характеристического уравнения для каждого значения K на основании уравнения

$$H_0(p) = 1 + K(p) = 1 + K \cdot K_1(p) = 0$$

или

$$K \cdot K_1(p) = -1. \quad (8.122a)$$

В случае положительной обратной связи имеем

$$K \cdot K_1(p) = -1. \quad (8.122б)$$

Так как $K_1(p)$ является функцией комплексного переменного p , то уравнение (8.122а) распадается на два:

для модуля

$$|K \cdot K_1(p)| = 1, \quad (8.123)$$

для аргумента

$$\arg |K \cdot K_1(p)| = \pm \pi(2i + 1), \quad (8.124)$$

где $i = 0, 1, 2, \dots$

Уравнения (8.122а), (8.123) и (8.124) идентичны и соответствуют случаю отрицательной ГОС одноконтурной структурной схемы автоматической системы. Если цепь ГОС представлена в виде звена с передаточной функцией $K_{o.c}(p)$, следует разомкнуть систему на выходе ГОС и записать

$$\left. \begin{aligned} K \cdot K_{\text{э.кв}}(p) &= -1; \\ |K \cdot K_{\text{э.кв}}(p)| &= 1; \\ \arg |K \cdot K_{\text{э.кв}}(p)| &= \pm \pi(2i + 1); \\ K_{\text{э.кв}}(p) &= K_1(p) \cdot K_{o.c}(p); \\ K &= (k_1 k_2 \dots k_n) k_{o.c}. \end{aligned} \right\} \quad (8.125)$$

Передаточная функция разомкнутой цепи $K_{\text{эв}}(p)$ в общем случае может быть представлена в виде дроби, числитель и знаменатель которой являются полиномами от комплексного числа p . При использовании метода корневого годографа передаточную функцию $K \cdot K_{\text{эв}}(p)$ следует преобразовать к виду:

$$K \cdot K_{\text{эв}}(p) = K \cdot c \frac{(p - N_1)(p - N_2) \dots (p - N_m)}{(p - P_1)(p - P_2) \dots (p - P_n)}, \quad (8.126)$$

где $N_1, N_2, \dots, N_m$ — нули (всего m); $P_1, P_2, \dots, P_n$ — полюсы (всего n) передаточной функции разомкнутой системы; c — коэффициент, появляющийся в результате приведения к единице всех коэффициентов при операторе p в числителе и в знаменателе. В отличие от частотного метода ($p = j\omega$) здесь комплексное число p может иметь любое значение на всей комплексной плоскости корней.

Если каждый сомножитель (двуучлен) числителя и знаменателя представить в виде вектора на комплексной плоскости корней, то для случая, когда точка p является корнем характеристического уравнения замкнутой системы p_k ($k = 1, 2, \dots, n$), на основании (8.125) и (8.126) можно записать

$$\arg |K \cdot K_{\text{эв}}(p)| = \pm \pi (2i + 1); \quad (8.127)$$

$$\pm (\theta_1^0 + \theta_2^0 + \dots + \theta_m^0) \pm (\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) = \pm \pi (2i + 1), \quad (8.128)$$

где θ_i^0 и θ_i — углы, образуемые векторами сомножителей соответственно числителя и знаменателя (8.126) с вещественной осью.

Из (8.125) и (8.126) следует, что модуль вектора $K \cdot K_{\text{эв}}(p)$ определяется произведением числа Kc на произведение модулей векторов l_i^0 числителя (8.126) и делением на произведение модулей векторов l_i знаменателя (8.126):

$$Kc \frac{l_1^0 l_2^0 \dots l_m^0}{l_1 l_2 \dots l_n} = 1,$$

откуда находится коэффициент усиления разомкнутой системы для любой точки корневого годографа:

$$K = \frac{1}{c} \cdot \frac{l_1^0 l_2^0 \dots l_m^0}{l_1 l_2 \dots l_n}. \quad (8.129)$$

Пользуясь линейкой и транспортиром, нетрудно отыскать на комплексной плоскости точки, удовлетворяющие уравнению (8.128), и таким образом найти возможные корни характеристического уравнения (8.125) замкнутой системы для K , изменяющегося от 0 до ∞ . Величина K для точек годографа определяется по (8.129).

Для действительных коэффициентов характеристического уравнения обычно достаточно построить точки корневых годографов одного из комплексных корней, а второй (сопряженный) панести из условия симметрии. Следовательно, корневые годографы комплексных корней являются симметричными ветвями. Стрелки корневых годографов указывают на возрастание параметра K от 0 до ∞ .

Ветви корневых годографов, построенных с использованием (8.128) и (8.129), при $K = 0$ начинаются в корнях характеристического уравнения разомкнутой системы и уходят к нулям передаточной функции разомкнутой системы. Так как число нулей m функции $KK_{\text{экр}}(p)$ меньше числа корней n характеристического уравнения замкнутой системы, то $(n - m)$ корней при $K \rightarrow \infty$ удаляется в бесконечность. Если $m = 0$, то все корни уходят в бесконечность при $K \rightarrow \infty$. Число ветвей корневого годографа равно числу n корней характеристического уравнения, т. е. совпадает с порядком системы.

Расположение и конфигурация корневого годографа определяются параметрами и структурой автоматической системы, на основании которых составляется передаточная функция разомкнутой системы относительно выхода звена ГОС.

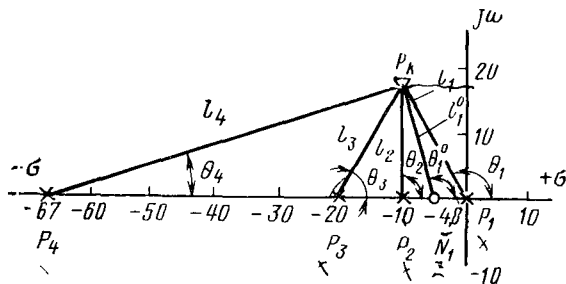


Рис. 8.21

Критерий устойчивости по корневному годографу можно сформулировать следующим образом: если какая-либо пара ветвей корневого годографа пересекает при значении $K_{\text{кр}}$ мнимую ось и уходит в правой полуплоскости в бесконечность (при $K \rightarrow \infty$), то система устойчива при $K < K_{\text{кр}}$, находится на границе устойчивости при $K = K_{\text{кр}}$ и неустойчива при $K > K_{\text{кр}}$.

Пример 8.10. На рис. 8.21 показаны нули (точки), полюсы (крестики), углы θ_i^0 и θ_j и модули сомножителей векторов l_i^0 числителя и l_j знаменателя (8.126) для одного p_k корня характеристического уравнения замкнутой системы, имеющей передаточную функцию вида

$$K \cdot K_{\text{экр}}(p) = \frac{2800 K (p + 4,8)}{p (p + 10) (p + 20) (p + 67)}, \quad (8.130)$$

где в соответствии с (8.126)

$$c = 2800; N_1 = -4,8; P_1 = 0; P_2 = -10; P_3 = -20; P_4 = -67.$$

Для построения корневого годографа необходимо соблюдать одинаковый масштаб по осям координат комплексной плоскости корней (обычно 10 мм на единицу).

Из рис. 8.21 следует, что для корня p_k (обозначен треугольничком)

$$\theta_1^0 = (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = 107 - (120 + 90 + 60 + 17) = -180^\circ,$$

т. е. точка плоскости является корнем характеристического уравнения замкнутой системы:

$$p_k = -10 + j17,3.$$

Произведя построения для сопряженного корня, получим сумму углов, равную $+180^\circ$, и корень уравнения

$$p_{k+1} = -10 - j17,3.$$

Измерив длины векторов для корня p_A , найдем $l_1 = 20$; $l_2 = 17,3$; $l_3 = 20$; $l_4 = 62$; $I_1 = 18$. Подставив эти значения модулей векторов, а также значение $c = 2800$ в (8.129), определим значение, соответствующее корню p_A :

$$K = \frac{1}{2800} \cdot \frac{20 \cdot 17,3 \cdot 20 \cdot 62}{18} = 8,5.$$

На рис. 8.22 построен корневой годограф для автоматической системы, обладающей передаточной функцией (8.130). Ветви годографа указаны жирными линиями. Из рисунка видно, что при $K = 0$ полюса замкнутой и разомкнутой систем совпадают. При увеличении K до бесконечности полюс P_1 стремится

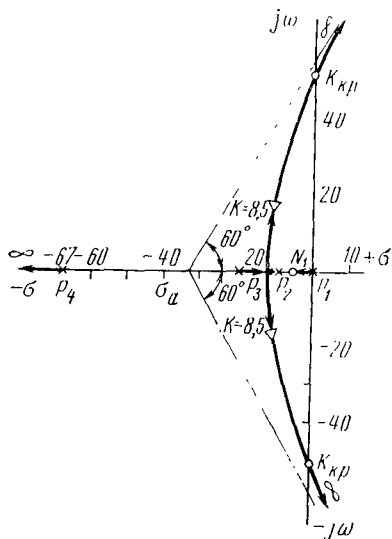


Рис. 8.22

к нулю N_1 , а полюс P_4 уходит вдоль отрицательной вещественной полуоси в бесконечность. Полюса P_2 и P_3 сначала стремятся по вещественной оси навстречу друг другу, далее, после совпадения (кратный корень), становятся комплексными сопряженными корнями (например, при $K = 8,5$) и по симметричным ветвям уходят в бесконечность (при $K \rightarrow \infty$), пересекая мнимую ось. Неразветвленными сегментами годографа являются отрезки на вещественной оси: от P_1 до N_1 и от P_4 до ∞ . Разветвляющимися являются ветви, отходящие от полюсов P_2 и P_3 и расходящиеся вверх и вниз от вещественной оси. Расходящиеся ветви полюсов P_2 и P_3 пересекают мнимую ось при $K_{кр} = 253$.

Для облегчения построений корневых годографов обычно используют их свойства, приведенные ниже без доказательства [Л. 37].

1. Ветви корневых годографов начинаются в полюсах передаточной функции разомкнутой системы при $K = 0$.

2. Ветви корневых годографов оканчиваются в нулях передаточной функции разомкнутой системы при $K \rightarrow \infty$.

3. Корневые годографы являются непрерывными кривыми или отрезками прямых, соответствующими изменению K от 0 до ∞ .

4. Корневые годографы, не лежащие на действительной оси, симметричны относительно этой оси.

5. Корневые годографы, лежащие на вещественной оси, находятся в тех ее частях, справа от которых расположено нечетное общее число действительных нулей и полюсов разомкнутой системы.

6. Число ветвей корневых годографов равно порядку уравнения автоматической системы.

7. Ветви корневых годографов, уходящих в бесконечность при $K \rightarrow \infty$, имеют асимптоты, число которых равно разности высших степеней n знаменателя и m числителя передаточной функции разомкнутой системы. Асимптоты в виде $(n - m)$ лучей выходят из одной точки, находящейся на действительной оси, под углом θ_a к оси абсцисс:

$$\theta_a = \pi / (n - m). \quad (8.131)$$

Общая точка пересечения асимптот имеет абсциссу (см. рис. 8.22)

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n P_i - \sum_{i=1}^m N_i}{n-m}. \quad (8.132)$$

8. Точки пересечения ветвей корневых годографов с мнимой осью соответствуют критическому значению коэффициента усиления, величина которого может быть определена либо по формуле (8.129), либо по критерию Гурвица.

9. Годографы, пересекающие действительную ось, направлены к ней под прямым углом. Координата p_0 точки пересечения годографов с действительной осью определяется из условий [соответственно (8.118) или (8.125)]

$$dK_1(p)/dp = 0, \quad \text{или} \quad dK_{\text{экр}}(p)/dp = 0.$$

10. Углы θ , под которыми ветви корневых годографов выходят из комплексного полюса разомкнутой системы, находятся из уравнения (8.128), записанного для достаточно близкой точки корневого годографа и выраженного относительно искомого угла.

В случае неединичных автоматических систем построение корневых годографов усложняется и требует выполнения дополнительных преобразований и вычислений [Л.37].

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте определения устойчивой и неустойчивой системы.
2. Что означает «структурно устойчивая» или «структурно неустойчивая» система?
3. Приведите первую теорему Ляпунова об устойчивости системы.
4. Что представляют собой необходимое условие устойчивости, необходимое и достаточное условие устойчивости?
5. Что является причиной неустойчивости системы?
6. Как геометрически охарактеризовать устойчивость системы на плоскости корней?
7. Что позволяют установить критерии устойчивости и в чем их общность?
8. Сформулируйте основные критерии устойчивости.
9. В чем различие между критериями Найквиста и Михайлова?
10. Как строятся области устойчивости?
11. В связи с чем рассматривается вопрос о запасе устойчивости?
12. Как устанавливается запас устойчивости применительно к различным критериям устойчивости?
13. Что характеризует критический коэффициент усиления?
14. Поясните основные свойства корневых годографов.

МЕТОДЫ КОРРЕКЦИИ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Коррекция автоматических систем является одним из основных вопросов теории и практики автоматического управления.

Ранее было показано, что высокая точность систем управления обеспечивается при высоком коэффициенте усиления. В то же время его величина по соображениям устойчивости ограничивается при определенных значениях параметров системы. Кроме того, не всегда возможно удовлетворить требованиям структурной устойчивости одно-контурных систем, так как структурная схема может содержать раз-
личное число консервативных, неустойчивых и интегрирующих звеньев.

В связи с этим возникает необходимость введения в систему управления дополнительных устройств, обеспечивающих устойчивую работу. Дополнительные устройства позволяют изменять соотношение постоянных звеньев (что увеличивает значение критического коэффициента усиления и повышает качество переходного процесса) и характеристики неустойчивых звеньев и этим облегчают создание структурно устойчивых систем.

Обеспечение устойчивой и качественной работы систем управления с помощью дополнительных устройств называется *коррекцией*, а сами устройства — *корректирующими*. Частным случаем коррекции является стабилизация неустойчивых систем.

Существуют различные методы коррекции систем. Основное значение и наиболее широкое распространение приобрели дополнительные обратные связи, которые могут охватывать одно или несколько звеньев. В отличие от главной обратной связи, замыкающей основной контур управления и называемой внешней обратной связью, дополнительные обратные связи называются внутренними и образуют параллельные корректирующие цепи. Система управления, имеющая внутренние и главные обратные связи, является *многоконтурной*.

§ 9.1. Жесткая обратная связь (безынерционная)

Охват звена обратной связью приводит к изменению передаточной функции:

$$K_{\text{авк}}(p) = \frac{K(p)}{1 \pm K_{\text{о.с}}(p) K(p)}, \quad (9.1)$$

где «+» соответствует отрицательной, а «—» — положительной обратной связи.

На основании (9.1) структурная схема может быть представлена в виде звена $K(p)$, охваченного обратной связью (рис. 9.1). Для жесткой обратной связи

$$K_{\text{о.с}}(p) = \beta. \quad (9.2)$$

Динамические и статические характеристики при охвате звена жесткой обратной связью будут изменяться.

Пример 9.1. Жесткая обратная связь охватывает безынерционное звено. В этом случае передаточная функция звена

$$K(p) = k.$$

В соответствии с (9.1) и (9.2) можно записать:

$$K_{\text{экв}}(p) = k(1 \pm \beta k)^{-1} = k_{\text{экв}}. \quad (9.3)$$

На основании (9.3) можно заключить, что эквивалентное звено получается также безынерционным при изменении коэффициента усиления. При наличии отрицательной обратной связи коэффициент усиления уменьшается, а при наличии положительной — увеличивается. Вид переходных характеристик безынерционного звена при этом сохраняется. В случае положительной обратной связи при $\beta k > 1$ получим $k_{\text{экв}} < 0$, а при $\beta k = 1$ получим $k_{\text{экв}} = \infty$.

Пример 9.2. Жесткая обратная связь охватывает инерционное звено первого порядка. При этом передаточная функция звена*

$$K(p) = k(1 + Tp)^{-1}.$$

В соответствии с (9.1) и (9.2) эквивалентная функция

$$K_{\text{экв}}(p) = \frac{k}{(1 + Tp) \pm \beta k} = \frac{k}{(1 \pm \beta k) + Tp}.$$

Разделив числитель и знаменатель на $(1 \pm \beta k)$, получим

$$K_{\text{экв}}(p) = k_{\text{экв}}(1 + T_{\text{экв}}p)^{-1}, \quad (9.4)$$

где

$$k_{\text{экв}} = k(1 \pm \beta k)^{-1}; \quad T_{\text{экв}} = T(1 \pm \beta k)^{-1}. \quad (9.5)$$

На основании (9.4) можно отметить, что эквивалентное звено получается также инерционным при изменении в соответствии с (9.5) коэффициента усиления и постоянной времени. При наличии отрицательной обратной связи происходит уменьшение чувствительности звена ($k_{\text{экв}} < k$) и увеличение быстродействия ($T_{\text{экв}} < T$); при наличии положительной связи имеет место обратное явление.

Пример 9.3. Жесткая обратная связь охватывает интегрирующее звено. В этом случае передаточная функция звена

$$K(p) = k/Tp.$$

В соответствии с (9.1) и (9.2) эквивалентная функция

$$K_{\text{экв}}(p) = k(Tp \pm \beta k)^{-1}.$$

Разделив числитель и знаменатель на βk , получим

$$K_{\text{экв}}(p) = k_{\text{экв}}(\pm 1 + T_{\text{экв}}p)^{-1}, \quad (9.6)$$

где

$$\left. \begin{aligned} k_{\text{экв}} &= k/\beta k = 1/\beta; \\ T_{\text{экв}} &= T/\beta k. \end{aligned} \right\} \quad (9.7)$$

* Здесь и далее принята запись $(1 + Tp)^{-1}$ вместо $\frac{1}{1 + Tp}$.

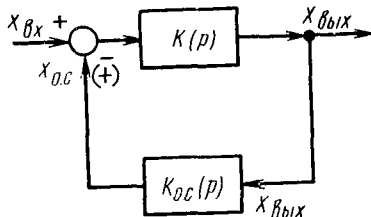


Рис. 9.1

Таким образом, в результате охвата интегрирующего звена жесткой отрицательной обратной связью имеем инерционное звено первого порядка. При отрицательной ОС оно устойчиво, а при положительной ОС — неустойчиво.

Аналогично можно рассмотреть влияние жесткой обратной связи на характеристики других звеньев.

Следовательно, отрицательная обратная связь уменьшает постоянную времени звеньев и увеличивает статическую ошибку системы, так как при этом снижается коэффициент усиления охватываемого звена. Положительная обратная связь, наоборот, увеличивает коэффициент усиления и постоянную времени звена. Кроме того, жесткая обратная связь позволяет изменить структуру охватываемого звена, улучшая его свойства при отрицательной связи; при положительной связи иногда создает неустойчивые звенья.

§ 9.2. Гибкая обратная связь

Гибкой обратной связью называется такая связь, при которой происходит только дифференцирование сигнала входной переменной. Так, например, в закон управления может быть введена производная от какой-либо переменной. В простейшем случае звено гибкой обратной связи $K_{o.c}(p)$ на структурной схеме может быть представлено в виде дифференцирующего идеального или реального звена (по первой производной):

$$K_{o.c}(p) = -T_{o.c} p \quad (9.8)$$

или

$$K_{o.c}(p) = T'_{o.c} p (1 + T''_{o.c} p)^{-1}. \quad (9.9)$$

В некоторых случаях вводятся более сложные дифференцирующие обратные связи.

Рассмотрим влияние простейшей идеальной гибкой обратной связи по первой производной.

Пример 9.4. Гибкая обратная связь охватывает безынерционное звено. С учетом (9.1) и (9.8) передаточная функция эквивалентного звена

$$K_{\text{экв}}(p) = \frac{k}{1 \pm kT_{o.c} p} = \frac{k}{1 \pm T_{\text{экв}} p}, \quad (9.10)$$

где $T_{\text{экв}} = kT_{o.c}$ — эквивалентная постоянная времени.

В данном случае получено эквивалентное инерционное звено первого порядка.

Пример 9.5. Гибкая обратная связь охватывает инерционное звено первого порядка. С учетом (9.1) и (9.8) передаточная функция эквивалентного звена

$$K_{\text{экв}}(p) = \frac{k}{1 \pm (T \pm kT_{o.c}) p} = \frac{k}{1 \pm T_{\text{экв}} p}, \quad (9.11)$$

где $T_{\text{экв}} = T \pm kT_{o.c}$ — эквивалентная постоянная времени.

Идеальная гибкая обратная связь, не изменяя коэффициент усиления звена, позволяет изменять постоянную времени, что способствует стабилизации системы. Однако при положительной связи может быть получено неустойчивое звено, если $T < kT_{o.c}$, или безынерционное звено, если $T = kT_{o.c}$.

Пример 9.6. Гибкая обратная связь охватывает интегрирующее звено. С учетом (9.1) и (9.8) передаточная функция эквивалентного звена

$$K_{\text{эв}}(p) = \frac{k}{(T \pm T_{0.c} k) p} = \frac{k}{T_{\text{эв}} p}, \quad (9.12)$$

где $T_{\text{эв}} = T \pm kT_{0.c}$ — эквивалентная постоянная времени.

Анализируя (9.12), можно видеть, что при охвате интегрирующего звена простейшей идеальной гибкой обратной связью структура этого звена остается прежней, изменяется только величина постоянной времени.

В заключение необходимо указать, что применение гибкой обратной связи позволяет изменять значения постоянных времени и структуру звена при постоянном коэффициенте усиления.

§ 9.3. Смешанная обратная связь

В некоторых случаях обратная связь может обладать свойствами жесткой и гибкой связи. Такой является обратная связь в виде дифференцирующего звена со статизмом с передаточной функцией

$$K_{0.c}(p) = k_{0.c}(1 \pm T'_{0.c} p)(1 + T''_{0.c} p)^{-1}. \quad (9.13)$$

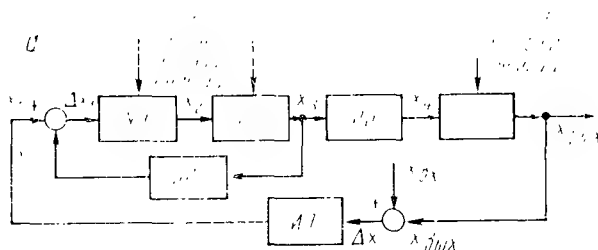
Смешанные обратные связи изменяют параметры охватываемого звена (постоянную времени, коэффициент усиления), однако значительно усложняют его структурную схему.

Эффект стабилизации неустойчивой системы при использовании смешанной обратной связи может оказаться большим, чем при использовании жесткой или гибкой обратной связи. Получаемое при этом эквивалентное звено имеет более высокий порядок уравнения, чем исходное звено.

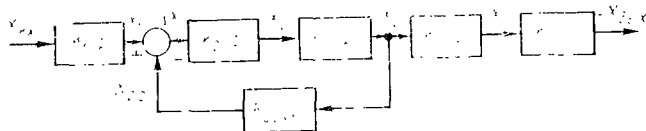
Более сложные корректирующие устройства приведены в гл. 11.

§ 9.4. Влияние отрицательных обратных связей на работу автоматических систем

Влияние отрицательной ОС (рис. 9.2, а) можно упрощенно объяснить следующим образом. Пусть на вход усилительного элемента УЭ без ОС ($x_{0.c} = 0$) поступает сигнал $x_1 = k_1 \Delta x$ с выхода измерительного элемента ИЭ, пропорциональный только отклонению выходной переменной ($x_{\text{вых}} = \text{const}$). Этот сигнал будет включать регулирующий орган РО на уменьшение управляемой переменной $x_{\text{вых}}$, пока отклонение Δx положительно, т. е. вплоть до точки В (рис. 9.2, б). Ввиду инерционности системы $x_{\text{вых}}$ будет уменьшаться и после достижения значения $\Delta x = 0$, а перестановка РО на действие в обратную сторону произойдет через некоторое время (после точки В), т. е. после того, как отклонение станет отрицательным. Это приведет к колебанию управляемой переменной (сплошная линия на рис. 9.2, б). При наличии ОС на вход усилителя, управляющего работой привода СЭ регулирующего органа, будет поступать разность двух сигналов: $\Delta x_1 = x_1 - x_{0.c}$. Так как из сигнала x_1 , зависящего от отклонения управляемой переменной, вычитается сигнал обратной связи $x_{0.c}$, то на входе усилителя



CONDUCTING THE



И. С. БУДЫКО.

ратной связи:

§ 9.5. Введение производных в закон управления при помощи прямых параллельных связей

В ряде случаев в закон управления (в оператор воздействия) кроме основного сигнала вводится производная какой-либо переменной. Производная может быть введена в закон управления также с помощью непосредственно дифференцирующих элементов ДЭ (рис. 9.4, а), подключаемых параллельно цепи прохождения основного сигнала (прямая дополнительная связь).

Рассмотрим работу автоматической системы при введении производной в закон управления. Допустим, что отклонение управляемой переменной без ДЭ происходит по закону, показанному сплошной

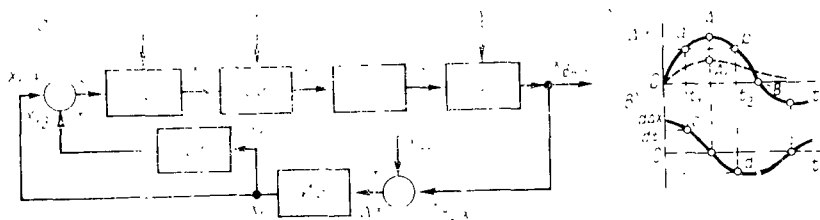


Рис. 9.4

линией на рис. 9.4, б; на рис. 9.4, в приведено связанное с этим изменение производной. Если в закон управления введена производная, то на участке OA отклонение и производная в момент времени t_1 (см. точки a и c) имеют одинаковые знаки. Их сумма обеспечивает большее воздействие на замкнутую систему, чем воздействие только по отклонению. Следовательно, наличие производной в законе управления форсирует действие регулятора на участке возрастания отклонения управляемой переменной, и максимальное отклонение в точке A_1 будет меньше, чем при управлении только по отклонению (см. точку A).

На участке AB производная отрицательна, когда знаки отклонения и производной противоположны. При этом результирующий сигнал в момент времени t_2 (см. точки b и d) будет меньше, чем при управлении без производной в законе управления. Следовательно, наличие производной в законе управления тормозит действие регулятора на участке уменьшения отклонения управляемой переменной. В результате этого компенсируется инерционное запаздывание системы и подавляются колебания (штриховая на рис. 9.4, б). В данном случае регулятор работает с опережением, улучшая качество переходного процесса. Необходимо, чтобы параметры звена, вводящего производную в закон управления, соответствовали условиям устойчивости системы.

Рассмотрим влияние воздействия производной на передаточную функцию и частотные характеристики системы. Представим вместо

функциональной схемы структурную схему разомкнутой системы (рис. 9.5, а). Если ДЭ представлен идеальным дифференцирующим звеном с передаточной функцией $K_d(p) = k_d p$, то передаточная функция разомкнутой системы

$$K_{\text{раз}}(p) = K_1(p)[1 + K_d(p)]K_2(p)K_3(p)K_4(p)K_5(p),$$

или

$$K_{\text{раз}}(p) = K(p)(1 + k_d p), \quad (9.16)$$

где $K(p)$ — передаточная функция разомкнутой системы без ДЭ; k_d — коэффициент усиления дифференцирующего звена.

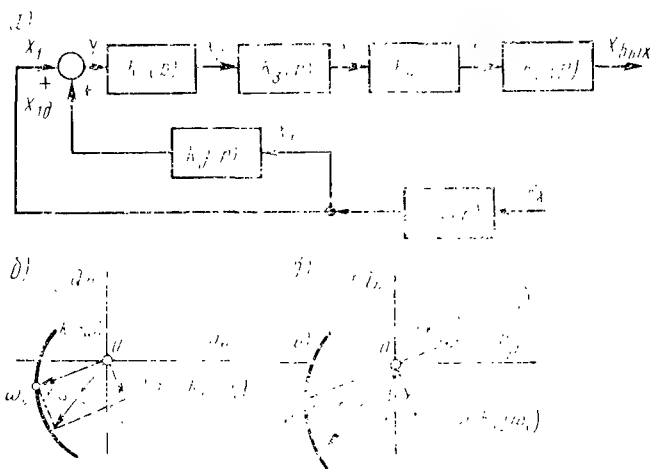


Рис. 9.5

Заменяв в (9.16) p на $j\omega$, получим частотную функцию

$$K_{\text{раз}}(j\omega) = K(j\omega) + jk_d \omega K(j\omega). \quad (9.17)$$

Из (9.17) следует, что первая производная добавляет к векторам АФХ разомкнутой системы $K(j\omega_i)$ векторы, повернутые относительно первых на 90° в положительном направлении и измененные в $k_d \omega_i$ раз (рис. 9.5, б). Это означает, что при введении первой производной АФХ будет деформироваться тем больше, чем выше частота.

Если дифференцирующий элемент создает и вторую производную, т. е. $K_d(p) = k_d p + k_d p^2$, то, проводя структурные преобразования исходной схемы (см. рис. 9.5, а), получим

$$K_{\text{раз}}(p) = K_1(p)[1 + k_d p + k_d p^2]K_2(p)K_3(p)K_4(p)K_5(p),$$

или

$$K_{\text{раз}}(p) = K(p)(1 + k_d p + k_d p^2). \quad (9.18)$$

Заменяв в (9.18) p на $j\omega$, получим частотную функцию

$$K_{\text{раз}}(j\omega) = K(j\omega) + jk_d \omega K(j\omega) - k_d \omega^2 K(j\omega). \quad (9.19)$$

Из (9.19) видно, что вектор результирующей АФХ в данном случае (вектор II на рис. 9.5, б) получается как сумма векторов АФХ разомкнутой системы без учета производных и составляющих векторов от первой производной [повернутых на 90° относительно $K(j\omega)$] и от второй производной [повернутых на 180° относительно $K(j\omega)$].

Если в законе управления имеется только вторая производная, то векторы результирующей АФХ будут уменьшены по сравнению с $K(j\omega)$, что не всегда допустимо из соображений требуемой точности управления. Этим объясняется то, что вторая производная обычно вводится в закон управления вместе с первой производной. Введение производных в закон управления позволяет изменить модуль и фазу результирующего вектора разомкнутой системы, отодвигая (корректируя) АФХ от критической точки.



Рис. 9.6

Выше было показано влияние идеальных дифференцирующих звеньев. При реальном дифференцирующем звене дополнительный вектор, обусловленный первой производной, будет повернут на угол, меньший 90° .

Для стабилизации неустойчивой замкнутой системы, АФХ которой охватывает критическую точку (сплошная кривая на рис. 9.6, а), в некоторых случаях реальное дифференцирующее звено включается параллельно какому-либо звену в комплексе с дополнительным апериодическим звеном (рис. 9.6, б). При надлежащем выборе значений постоянных времени T_1 и T_2 результирующая АФХ системы с воздействием по первой производной не будет охватывать критическую точку и система станет устойчивой (штриховая кривая на рис. 9.6, а).

Введением производных, компенсирующих большие постоянные времени, можно существенно изменить переходный процесс в системе. Пусть в системе управления имеются два звена с большими постоянными времени T_1 и T_2 . Если в закон управления введены первая и вторая производные, то на основании (9.15) эквивалентная функция

$$K_{\text{экв.}}(p) = \frac{(1 + k_1'p + k_2'p^2)}{(1 + T_1p)(1 + T_2p)} k_1 k_2 K_0(p), \quad (9.20)$$

где $K_0(p)$ — передаточная функция остальных звеньев; k_1 и k_2 — коэффициенты усиления рассматриваемых звеньев.

Полином $(1 + k_1'p + k_2'p^2)$ при соответствующем выборе k_1' и k_2' может быть разложен на множители первого порядка: $(1 + \tau_1p) \times (1 + \tau_2p)$. Тогда вместо (9.20) запишем

$$K_{\text{экв.}}(p) = k_1 k_2 K_0(p) \frac{(1 + \tau_1p)(1 + \tau_2p)}{(1 + T_1p)(1 + T_2p)}, \quad (9.21)$$

При $\tau_1 \approx T_1$ и $\tau_2 \approx T_2$ получим

$$K_{\text{нн}}(p) = k_1 k_2 K_0(p). \quad (9.22)$$

В передаточной функции (9.22) отсутствуют постоянные времени T_1 и T_2 и порядок системы понижен на два. Однако в ряде случаев для компенсации отдельных постоянных времени требуется создавать мощные дифференцирующие звенья, в результате некоторые звенья в динамике могут оказаться перегруженными из-за больших ускорений.

Исследования М. А. Айзермана [Л. 1] позволили установить, что при наличии положительного воздействия по первой производной одноконтурная система без нарушения структурной устойчивости может содержать до двух астатических звеньев и консервативные звенья, если степень характеристического уравнения n удовлетворяет следующим неравенствам:

$$q = 0 \dots n \geq 4r - 3;$$

$$q = 1 \dots n \geq 4r;$$

$$q = 2 \dots n \geq 4r + 1,$$

где q - число астатических звеньев; r - число консервативных звеньев.

Улучшение устойчивости систем благодаря введению производных в закон управления позволяет повысить значение критического коэффициента усиления. Например, для системы третьего порядка характеристическое уравнение имеет вид:

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0.$$

Если система астатическая, то $a_3 = K$ (для статической системы $a_3 = 1 + K$) и при введении первой производной на основании (9.16) можно записать:

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + K(1 + k_0 p) = 0,$$

или

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + (a_2 + K k_0) p + K = 0.$$

Критический коэффициент усиления по критерию Гурвица до введения первой производной

$$K_{\text{кр}} = a_1 a_2 / a_0. \quad (9.23)$$

После введения первой производной

$$K_{\text{кр},\text{нн}} = a_1 a_2 (a_0 + a_1 k_0) / a_0^2. \quad (9.24)$$

Из выражений (9.23) и (9.24) можно установить, что для систем третьего порядка всегда $K_{\text{кр},\text{нн}} > K_{\text{кр}}$ и разница тем больше, чем больше величина k_0 ; при $k_0 \rightarrow \infty$ значение $K_{\text{кр},\text{нн}} \rightarrow \infty$.

Введение производных в закон управления в результате включения дополнительных устройств в цепь прохождения основного сигнала называется *методом последовательной стабилизации* (коррекции), а в результате включения дополнительных устройств в виде дополнитель-

ных обратных связей — методом параллельной стабилизации (коррекции).

Основными достоинствами метода последовательной коррекции являются увеличение быстродействия и простота осуществления. К недостаткам этого метода следует отнести чувствительность к помехам; необходимость применения в ряде случаев промежуточных усилителей и сохранения симметричности цепей при переменном токе.

Метод параллельной коррекции имеет следующие достоинства: обратные связи уменьшают неустойчивость и нелинейность характеристик отдельных элементов (усилителей, электродвигателей и т. п.); питание обратных связей производится с выхода последующих элементов, развивающих значительную мощность, и поэтому не вызывает затруднений; величина сигналов, снимаемых с последующих элементов, бывает достаточной без дальнейшего усиления.

В ряде случаев для осуществления обратных связей требуется применение громоздких устройств (трансформаторов и др.); кроме того, жесткие отрицательные обратные связи снижают коэффициент усиления системы.

Для расчета параметров стабилизирующих устройств используют метод D -разбиения и критерии устойчивости, позволяющие выбрать наиболее выгодное значение этих параметров [Л. 1]. Имеется ряд рекомендаций относительно способов включения обратных связей, обеспечивающих неограниченное увеличение коэффициента усиления системы [Л. 25]. Этот вопрос кратко рассмотрен в конце главы.

§ 9.6. Введение интеграла в закон управления

Для повышения точности систем иногда в закон управления вводят интеграл, т. е. последовательно с основным сигналом проходит сигнал, пропорциональный интегралу отклонения регулируемой переменной (прямая дополнительная связь). Ввести интеграл в закон управления можно с помощью интегрирующих элементов, включаемых так, как это было показано в случае подключения параллельных дифференцирующих элементов (см. рис. 9.4, а и 9.5, а). Иногда интегрирующее звено может быть включено параллельно какому-либо типовому звену системы.

Рассмотрим влияние интеграла, вводимого в закон управления, на частотные характеристики и передаточную функцию. Если интегрирующий элемент включен так же, как дифференцирующий элемент на структурной схеме (см. рис. 9.5), то, применяя правила структурных преобразований, получим следующее выражение для передаточной функции разомкнутой системы:

$$K_{\text{раз}}(p) = K_1(p)(1 + k_n/T_n p) K_2(p) K_3(p) K_4(p) K_5(p),$$

или

$$K_{\text{раз}}(p) = K(p)(1 + a'p), \quad (9.25)$$

где $K(p)$ - передаточная функция разомкнутой системы без введения интеграла; $\alpha = k_{II} T_{II}$ - коэффициент интегрирующего звена (коэффициент веса).

При этом частотная функция

$$K_{\text{ин}}(j\omega) = K(j\omega)(1 + \alpha/j\omega) = K(j\omega) + (-j\alpha/\omega)K(j\omega). \quad (9.26)$$

Из (9.26) следует, что введение интеграла в закон управления добавляет ко всем векторам АФХ исходной системы векторы, повернутые относительно $K(j\omega)$ в отрицательном направлении (по часовой стрелке) на 90° и измененные в α/ω раз (рис. 9.7, а). Это означает, что исходная АФХ (кривая 1) корректируется и результирующая АФХ приближается к критической точке (рис. 9.7, б, кривая 2).

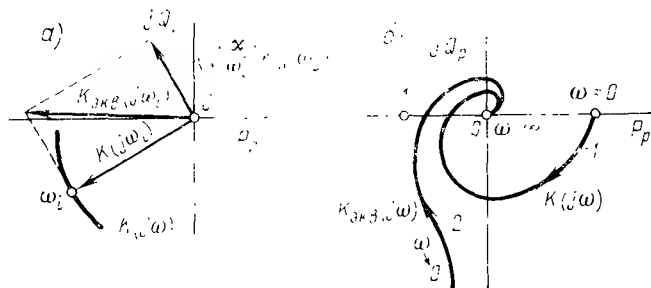


Рис. 9.7

Для улучшения устойчивости целесообразно ввести производную в закон управления. Часто производная и интеграл вводятся в закон управления одновременно.

Влияние интеграла приводит к увеличению комплексного коэффициента усиления (в динамике) системы, особенно на низких частотах, одновременно ухудшая устойчивость, и вызывает поворот векторов исходной АФХ в отрицательном направлении.

§ 9.7. Средства коррекции автоматических систем

Средствами коррекции автоматических систем являются устройства или элементы, позволяющие вводить производные и интеграл в закон управления, т. е. изменяющие динамические свойства систем управления.

Корректирующие устройства весьма разнообразны по принципу действия. К ним относятся различные электрические и механические устройства, выполняющие дифференцирование и интегрирование сигнала, а также технические вспомогательные устройства, обеспечивающие введение обратных связей.

Корректирующие устройства могут быть пассивного и активного типа. Устройство пассивного типа не содержит источников энергии,

и мощность его выходного сигнала меньше мощности на входе. Устройство активного типа содержит усилители и потребляет энергию дополнительных источников питания.

В зависимости от вида электрического сигнала различают корректирующие устройства на постоянном и переменном токе.

При коррекции следует рассматривать также способы включения корректирующих устройств в автоматических системах, а также применение демпферов (успокоителей).

В качестве успокоителей иногда применяют воздушные или масляные демпферы (катаракты). Если, например, динамика звена описывается уравнением

$$(T^2 p^2 + 1) x_{\text{вых}} = k x_{\text{вх}},$$

то его свободное движение представляет собой незатухающие колебания.

Успокоитель, оказывающий при движении сопротивление, пропорциональное скорости, позволяет получить уравнение вида

$$(T_1^2 p^2 + T_2 p + 1) x_{\text{вых}} = k x_{\text{вх}},$$

которое соответствует затухающему процессу.

Для механических систем применяют кроме жидкостных магнитные, воздушные и другие успокоители. Существуют успокоители в виде поршней с узким отверстием, помещающихся в стакане, в виде мехов, ветрянок и т. д. Успокоителем магнитного типа является, например, алюминиевый диск, связанный с подвижной частью устройства, вращающийся в магнитном поле постоянного магнита. При вращении диска вследствие вихревых токов возникает момент сопротивления вращению, пропорциональный скорости.

Элементы жесткой обратной связи. По физическим признакам жесткие обратные связи могут быть различными.

Механическая обратная связь. В механических регуляторах наиболее распространена жесткая обратная связь, осуществляемая с помощью жесткого рычага. На рис. 9.8 показан пример использования жесткого рычага ab , осуществляющего дополнительную жесткую обратную связь между поршнем сервомотора и золотником. Благодаря жесткой обратной связи регулятор обеспечивает устойчивость системы при наличии статической ошибки (стрелками на схеме показаны подвод и слив масла).

Можно привести и другие примеры использования механической обратной связи: рычажно-пневматическая, рычажно-гидравлическая, кулачковая, рычажная и др.

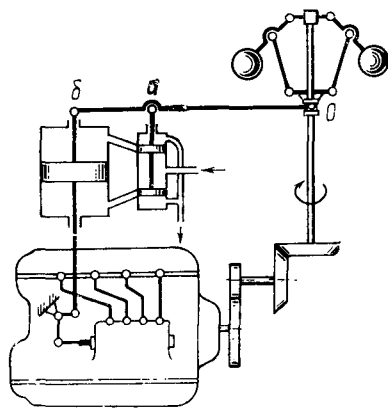


Рис. 9.8

Электромеханическая обратная связь. В электрических системах управления применяют электромеханические и электрические обратные связи.

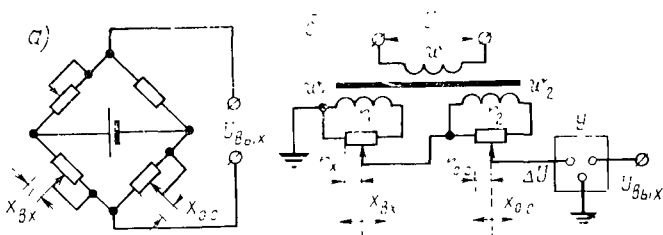


Рис. 9.9

Наиболее широкое распространение имеет мостовая схема, осуществляющая введение электрического сигнала обратной связи в результате механического воздействия на один из элементов моста (рис. 9.9, а).

На рис. 9.9, б представлен другой вариант выполнения электромеханической обратной связи: в результате воздействий на ползунки реостатов r_1 и r_2 изменяется величина электрического сигнала, поступающего на вход усилителя $У$ от вторичных обмоток w_1 и w_2 трансформатора, первичная обмотка w которого питается от сети переменного тока. Изменение знака обратной связи легко достигается переключением концов вторичной обмотки трансформатора.

Иногда для осуществления скоростных обратных связей используется мостовая электрическая связь; вместо сопротивления обратной связи в плечо моста включается якорь тахогенератора, обеспечивающего введение электрического сигнала, пропорционального угловой скорости вращения вала исполнительного двигателя.

Электрическая обратная связь. Электрический сигнал в данном случае подается с выхода какого-либо элемента на вход предшествующего элемента (рис. 9.10). Если применение тахогенератора в скоростных связях нежелательно, то

используется мостиковая обратная связь, где одним из плеч является якорь исполнительного двигателя $Д$ постоянного тока, к которому подводится регулируемое напряжение генератора $Г$ (рис. 9.10, а). Если

мост сбалансирован в заданном режиме работы автоматической системы, то напряжение, подаваемое на вход усилителя M , будет пропорционально угловой скорости. Если же мост не сбалансирован, то напряжение пропорционально скорости и ускорению.

Другим примером электрической связи является подача сигнала с выхода на вход электронных (рис. 9.10, б), магнитных и электромагнитных (рис. 9.10, в) усилителей посредством потенциометров, обмоток управления и пр. На рис. 9.10, в показан пример системы «генератор-двигатель» с электрическими жесткими обратными связями по напряжению возбудителя и по току якоря главной цепи.

Электрическая обратная связь может быть выполнена также в виде нелинейного уравновешенного моста. При колебаниях входного напряжения питания уравновешенного моста изменяется ток, протекающий по его плечам, и в результате нелинейности одного из плеч равновесие моста нарушается. Это приводит к появлению на выходе моста сигнала, определяемого отклонением напряжения на выходе.

В автоматических системах на переменном токе применяются такие устройства жестких обратных связей, которые изменяют величину или фазу выходного сигнала при изменении величины или фазы входного сигнала. Для этого обычно используется выпрямительно-усилительное устройство, преобразующее переменное напряжение в постоянное напряжение с полярностью, определяемой фазой входного напряжения.

Дифференцирующие элементы. Корректирующие устройства, обеспечивающие введение производных в закон управления, подразделяются на электрические, механические и электромеханические. В свою очередь, электрические устройства выполняются на постоянном и переменном токе.

Дифференцирующие элементы могут быть активными и пассивными; осуществляющими преобразование электрических сигналов, угловых и линейных перемещений и пр.

На рис. 9.11 показано использование гидравлического дифференцирующего устройства 2 в цепи рычажной обратной связи системы стабилизации скорости вращения вала двигателя внутреннего сгорания. При движении поршня гидравлического усилителя 1 движется и рычаг обратной связи, так как масло, застоявшееся в гидравлической демпфере 2, не успевает перетекать через небольшое калиброванное отверстие 3. После того как остановится поршень усилителя 1, масло в демпфере под действием пружины медленно протекает через отверстие из одной полости в другую, в результате чего рычаг обратной связи

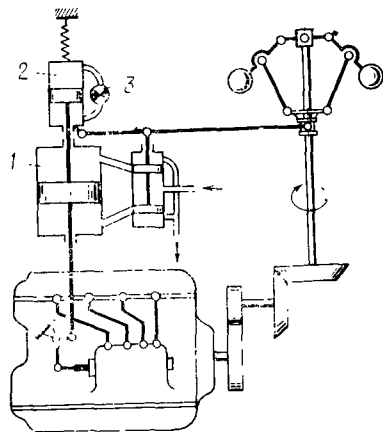


Рис. 9.11

зи переменного тока является системой управления, являющейся астатической, непрямого действия (стрелками на схеме указаны подвод и слив масла).

Если механические дифференцирующие обратные связи воздействуют на параметры электрических устройств (см. рис. 9.9), то эти устройства называются *электромеханическими дифференцирующими*.

Чтобы получить сигналы, пропорциональные производной от входного напряжения, в цепях постоянного тока чаще всего используют пассивные четырехполюсники, составленные из емкостей и омических сопротивлений (контуры RC). Их основными преимуществами являются: простота изготовления и дешевизна, возможность использования стандартных деталей, легкость замены отдельных элементов

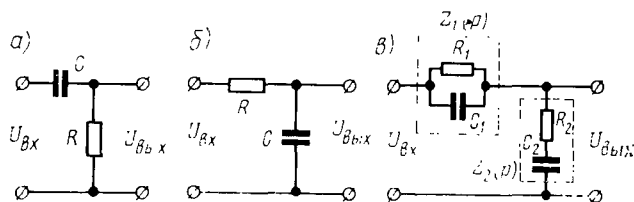


Рис. 9.12

и отсутствие подвижных частей. Простейший дифференцирующий контур RC представлен на рис. 9.12, а. Передаточная функция контура

$$K(p) = Tp(1 + Tp)^{-1},$$

где $T = RC$ — постоянная времени контура.

Дифференцирующие устройства могут быть также выполнены в виде простейших замкнутых автоматических систем (дифференциаторов), в виде электронных моделей и др. Типовые дифференцирующие контуры и их характеристики приведены далее в табл. 11.2.

Интегрирующие элементы. Интегрирующие элементы могут быть представлены пассивными и активными устройствами, преобразующими электрические сигналы, угловые и линейные перемещения и пр. Интегрирующие элементы позволяют вводить интеграл в закон управления.

К механическим интегрирующим элементам относятся электрические, гидравлические и пневматические поршневые двигатели, выходной переменной которых является угол поворота или линейное перемещение. Передаточная функция идеальных интегрирующих элементов

$$K(p) = k_a p.$$

Электромеханические интегрирующие устройства представляют собой сочетания указанных выше двигателей с потенциометрами или трансформаторами, когда вал двигателя имеет механическую связь с ползунком потенциометра или автотрансформатора. В этом случае выходной переменной является напряжение потенциометра или авто-

трансформатора. В некоторых случаях вал двигателя соединяется с ползуном реостата, который в системах непрямого регулирования включается в электрическую цепь входа последующего элемента (см. рис. 2.3).

Могут быть механические интегрирующие элементы с использованием демпферов, пружин и других устройств.

Для интегрирования сигналов в цепях постоянного тока применяется контур, составленный из конденсатора C и сопротивления R (рис. 9.12, б). Интегрирующее действие такого контура основано на том, что напряжение на конденсаторе равно интегралу тока, проходящего через конденсатор. При этом передаточная функция контура

$$K(p) = (1 + T p)^{-1}, \quad (9.27)$$

где $T = RC$ — постоянная времени контура.

Выражение (9.27) соответствует передаточной функции инерционного (апериодического) звена первого порядка. Однако рассматриваемая цепь (см. рис. 9.12, б) на высоких частотах обладает интегрирующим свойством.

Интегрирующие устройства могут быть выполнены в виде простейших замкнутых систем (интеграторов), электронных моделей и т. д. Типовые интегрирующие контуры и их характеристики приведены далее в табл. 11.2.

Интегро-дифференцирующие элементы. Эти устройства обладают свойствами дифференцирующих и интегрирующих элементов, причем на одних частотах устройство является дифференцирующим, на других — интегрирующим.

Механические интегро-дифференцирующие устройства выполняют в результате соединения интегрирующих и дифференцирующих элементов (гидравлические, пневматические, основанные на принципе демпферов, пружин и т. д.).

Комбинированный электрический интегро-дифференцирующий контур представляет собой электрическую цепь, составленную из дифференцирующей $Z_1(p)$ и интегрирующей $Z_2(p)$ частей на базе пассивных элементов R и C (рис. 9.12, в).

Передаточная функция этого контура определяется отношением операторных сопротивлений:

$$Z(p) = Z_1(p) \cdot Z_2(p) = \frac{R_1}{R_1 C_1 p + 1} \cdot \frac{R_2 C_2 p + 1}{C_2 p};$$

$$Z_2(p) = R_2 + \frac{1}{C_2 p} = \frac{R_2 C_2 p + 1}{C_2 p};$$

$$K(p) = \frac{Z_2(p)}{Z(p)} = \frac{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) + T_3 p},$$

где $T_1 = R_1 C_1$; $T_2 = R_2 C_2$; $T_3 = R_1 C_2$.

Интегро-дифференцирующие устройства выполняются в виде электронных моделей, электрических цепей и др. Типовые контуры таких устройств и их характеристики приведены в табл. 11.2.

§ 9.8. Корректирующие устройства на переменном токе

В автоматических системах на переменном токе введение производных в закон управления может быть выполнено с помощью дифференцирующих устройств на постоянном токе, если в цепи прохождения основного сигнала использованы демодулятор 1 и модулятор 2 (рис. 9.13, а). В этом случае сигнал переменного тока преобразуется в постоянное напряжение, величина которого пропорциональна амплитуде, а полярность — фазе сигнала переменного тока, т. е. не используются фазочувствительные устройства. При этом система обладает улучшенными характеристиками относительно стабильности и отсутствия искажений, но технически усложняется, в особенности если

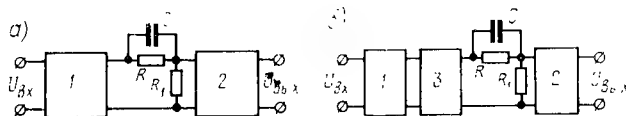


Рис. 9.13

требуется применить предварительный усилитель 3 (рис. 9.13, б).

В ряде автоматических систем используются дифференцирующие устройства на переменном токе. Это позволяет избежать промежуточного выпрямления сигнала.

Контуры на переменном токе реагируют на частоту модуляции (не на частоту изменения сигнала), т. е. на скорость изменения огибающей сигнала переменного тока. Если на вход дифференцирующего устройства переменного тока поступает переменный сигнал с частотой ω_0 , амплитуда которого модулирована по синусоидальному закону с частотой Ω , то мгновенное значение входного сигнала

$$u_{\text{вх}}(t) = U_{\text{вх}}(t) \sin \omega_0 t, \quad (9.28)$$

или

$$u_{\text{вх}}(t) = A \sin \Omega t \sin \omega_0 t,$$

где A — постоянный коэффициент.

Чтобы устройство было дифференцирующим, необходим выходной сигнал, пропорциональный производной от входного сигнала (мгновенное значение) по частоте модуляции, т. е. по огибающей:

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{du_{\text{вх}}}{dt} = A\Omega \cos \Omega t \sin \omega_0 t = U_{\text{вых}}(t) \sin \omega_0 t. \quad (9.29)$$

Следовательно, контур обладает дифференцирующим свойством по отношению к огибающей входного сигнала, если выходное напряжение контура представляет собой переменное напряжение той же частоты ω_0 , модулированное по амплитуде с частотой модуляции Ω , причем модулированная кривая выходного напряжения опережает модулированную кривую входного напряжения на четверть периода

колебаний модулирующего сигнала. Амплитудное значение выходного сигнала $U_{\text{вых}}$ должно линейно зависеть от частоты модуляции Ω .

Для определения частотных и передаточных функций дифференцирующих устройств на переменном токе необходимо рассмотреть способ представления входного и выходного сигналов в форме преобразования Фурье [Л. 39].

Если частота модуляции амплитуды обозначена Ω , то звено с передаточной функцией $K(p)$ будет иметь относительно модулированных сигналов входа и выхода эквивалентную частотную функцию

$$K_{\text{экр}}(j\Omega) = \frac{K[j(\Omega + \omega_0)] + K[j(\Omega - \omega_0)]}{2}. \quad (9.30)$$

Следовательно, чтобы получить эквивалентную частотную функцию $K_{\text{экр}}(j\Omega)$ звена при модулированных сигналах переменного тока, надо в передаточной функции звена $K(p)$ заменить p на $j\omega$. Далее, заменив ω на $(\Omega + \omega_0)$, получим составляющую $K[j(\Omega + \omega_0)]$, а при $\omega = \Omega - \omega_0$ - составляющую $K[j(\Omega - \omega_0)]$. После этого, используя (9.30), найдем $K_{\text{экр}}(j\Omega)$. Если в выражении $K_{\text{экр}}(j\Omega)$ после некоторых преобразований (считая $\Omega/\omega_0 \ll 1$) заменим $j\Omega$ на s , то определим передаточную функцию звена на переменном токе $K(s)$ относительно модулированных сигналов (но огибающей).

Если звено на переменном токе находится в резонансе относительно несущей частоты ω_0 , то эквивалентная частотная функция

$$K_{\text{экр}}(j\Omega) = K[j(\Omega + \omega_0)], \quad (9.31)$$

и задача получения $K(s)$ упрощается.

Если для некоторых звеньев системы, работающей на несущей частоте, не существует резонанса на этой частоте и эквивалентную частотную функцию невозможно определить по (9.30), то следует получить результирующую передаточную функцию нескольких звеньев и в дальнейшем (после определения условия резонанса) найти по (9.30) эквивалентную частотную функцию относительно огибающей [Л. 2].

Рассмотрим частотные характеристики идеального дифференцирующего звена со статизмом, осуществляющего дифференцирование по огибающей сигнала переменного тока. Передаточная функция по огибающей

$$K_{\text{экр}}(s) = k(1 + Ts). \quad (9.32)$$

С учетом (9.31) эквивалентная частотная функция данного звена

$$K[j(\Omega + \omega_0)] = k(1 + j\Omega T). \quad (9.33)$$

Введя для эквивалентной частоты обозначение $\omega_{\text{экр}} = \Omega + \omega_0$ вместо (9.33) можно записать

$$K(j\omega_{\text{экр}}) = k[1 + j(\omega_{\text{экр}} - \omega_0)T]. \quad (9.34)$$

Выражение (9.34) представляет собой эквивалентную частотную функцию идеального дифференцирующего устройства со статизмом

по огибающей, выраженной через разность частот $(\omega_{\text{экр}} - \omega_0)$, поэтому

$$\left. \begin{aligned} A &= |K(j\omega_{\text{экр}})| = k \sqrt{1 + T^2(\omega_{\text{экр}} - \omega_0)^2}; \\ \varphi &= \arctg T(\omega_{\text{экр}} - \omega_0). \end{aligned} \right\} \quad (9.35)$$

На основании (9.35) можно построить амплитудную (рис. 9.14, а) и фазовую (рис. 9.14, б) характеристики идеального дифференцирующего звена со статизмом по огибающей сигнала переменного тока при изменении эквивалентной частоты $\omega_{\text{экр}}$. Поскольку $\omega_0 = \text{const}$, то вид характеристики зависит от частоты огибающей Ω .

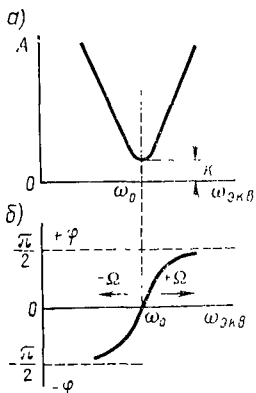


Рис. 9.11

Вид частотных характеристик указывает на резонансные свойства дифференцирующего устройства для несущей частоты ω_0 . Частота Ω огибающей отсчитывается от точки на оси абсцисс, соответствующей ω_0 , и при $\omega_{\text{экр}} = \omega_0$ значение $\Omega = 0$. При $\omega_{\text{экр}} > \omega_0$ частота $\Omega > 0$, а при $\omega_{\text{экр}} < \omega_0$ частота $\Omega < 0$. Следовательно, подобные характеристики должно иметь устройство, осуществляющее дифференцирование сигнала переменного тока по огибающей. Уравнения (9.35) позволяют установить аналогию между частотными характеристиками рассмотренного дифференцирующего звена на постоянном и переменном токе с учетом смещения на уровень несущей частоты. Иначе говоря, амплитудная и

фазовая частотные характеристики рассмотренного звена при переменном токе относительно огибающей могут быть получены из амплитудной и фазовой частотных характеристик звена на постоянном токе путем переноса начала координат вправо на величину несущей частоты [Л. 34].

Указанным выше условиям удовлетворяют Т-образные, мостовые и другие резонансные контуры переменного тока, настроенные на несущую частоту ω_0 .

Некоторые типовые контуры на переменном токе и их характеристики приведены в табл. 11.3.

§ 9.9. Место включения корректирующих устройств

При проектировании автоматических систем большое значение имеют место и способ включения корректирующих устройств. В случае последовательного включения необходимо учитывать мощность звеньев, в случае параллельного включения - предусматривать охват определенного количества звеньев.

Если напряжение на выходе измерительного элемента невелико, то целесообразно включать пассивное электрическое стабилизирующее устройство после измерительного элемента, так как это потребовал

бы применения чувствительного усилителя постоянного тока, обладающего малой стабильностью. Рациональнее включить перед стабилизирующим устройством предварительный усилитель, который компенсирует ослабление сигнала пассивным устройством. При этом в качестве основного усилителя может быть использован менее чувствительный, а следовательно, более стабильный усилитель постоянного тока.

При использовании дополнительных отрицательных обратных связей для стабилизации системы чрезвычайно важно выбрать надлежащее число звеньев, охватываемых этой связью. Исследования [Л. 25] позволяют указать вполне определенные требования, предъявляемые при выборе количества охватываемых звеньев, если известны тип звена обратной связи, количество и передаточные функции звеньев всей системы. Полученная структура автоматической системы дает возможность увеличивать коэффициент усиления разомкнутой системы теоретически до бесконечной величины без нарушения устойчивости. Такая постановка вопроса продиктована практикой создания высокоточных автоматических систем, где коэффициент усиления превышает критическое значение и обычные методы стабилизации не обеспечивают устойчивую работу системы.

Для подтверждения отмеченного рассмотрим автоматическую систему [Л. 25], состоящую из трех звеньев первого порядка с постоянными времени $T_1 = 0,01$ сек; $T_2 = 0,34$ сек; $T_3 = 0,1$ сек и коэффициентами усиления $k_1 = 40$; $k_2 = 1$; $k_3 = 15$. Обычными методами исследования устойчивости установлено, что без стабилизирующих связей такая система неустойчива. Предположим, что для стабилизации этой системы применяется дополнительная дифференцирующая отрицательная обратная связь, передаточная функция которой

$$K_{o.c}(p) = pT_{o.c}(1 + T_{o.c}p)^{-1}. \quad (9.36)$$

Нашо выяснить место включения обратной связи и количество охватываемых звеньев, обеспечивающих устойчивую работу системы. Если стабилизирующее звено включено так, что оно охватывает два первых звена системы, то система с узлом стабилизации [см. (9.36)] неустойчива при любом значении $T_{o.c}$ и заданных параметрах. Включим теперь стабилизирующее звено с передаточной функцией (9.36) так, чтобы обратная связь охватывала только первое звено (с наибольшим k). Убеждаемся, что система устойчива при заданном значении параметров и $T_{o.c} = 0,5$ сек.

Вопрос о месте включения обратной связи имеет важное значение при проектировании и наладке автоматических систем. Целесообразно установить определенные принципы, характеризующие место включения стабилизирующего устройства при любом количестве звеньев и любой передаточной функции стабилизирующего звена для разомкнутых систем с неограниченным увеличением коэффициента усиления.

М. В. Мееровым [Л. 25] получены важные данные, определяющие в общем случае место включения стабилизирующего звена.

1. Если система состоит только из колебательных звеньев, то обратная связь со стабилизирующим звеном типа (9.36) может охва-

тивать только одно колебательное звено; при форсирующей (прямой) связи должно оставаться неохваченным одно колебательное звено.

2. Если охватывается n колебательных звеньев, то используется стабилизирующее звено более сложного типа, степень числителя передаточной функции которого выше степени знаменателя не менее чем на $(2n - 2)$.

3. Если система имеет n интегрирующих звеньев, то $(n - 1)$ из них должны охватываться стабилизирующими звеньями; при этом каждое из $(n - 1)$ интегрирующих звеньев охватывается отрицательной жесткой обратной связью.

Все сказанное может быть применено для стабилизации структурно неустойчивых систем и систем с запаздыванием. Если стабилизирующее звено не охватывает звеньев с запаздыванием, то указанные выводы о стабилизации систем без запаздывания справедливы при неограниченном коэффициенте усиления. Если же стабилизирующее устройство охватывает часть (или все) звенья с запаздыванием, то устойчивая работа системы невозможна при неограниченном увеличении коэффициента усиления.

Следовательно, для получения высококачественной автоматической системы, обладающей незначительной статической ошибкой при неограниченном увеличении коэффициента усиления, надо осторожно выбирать тип стабилизирующего звена, место его включения и количество (а также тип) охватываемых звеньев.

Если требуется обеспечить только устойчивость системы и определить диапазон изменения какого-либо одного параметра, то при расчетах целесообразно использовать, например, метод D -разбиения [Г.Л. 25]. Наряду со стабилизацией неустойчивой автоматической системы обычно бывает необходимо удовлетворить требования, предъявляемые к качеству переходного процесса. Поэтому расчет корректирующих устройств обычно совмещают с решением задачи по обеспечению заданного качества переходного процесса.

Вопросы для самопроверки

1. Какие методы стабилизации применяют при обеспечении устойчивости?
2. Как влияют дополнительные (стабилизирующие) обратные связи на характеристики и параметры типовых звеньев и систем?
3. Как влияет введение производных (или интеграла) в закон управления на динамику системы и на вид ее частотных характеристик?
4. Приведите примеры жестких и гибких обратных связей и устройств, вводящих производные и интеграл в закон управления.
5. Укажите особенность работы и получения передаточной функции корректирующих устройств на переменном токе.
6. Как определить место включения обратных связей и стабилизирующих устройств?

ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ПРОЦЕССА УПРАВЛЕНИЯ

Определение устойчивости системы и ее стабилизация являются первой проблемой, решаемой при создании автоматических систем. Второй, не менее важной проблемой, является обеспечение заданного качества процесса управления.

Качество процесса управления определяется поведением автоматической системы при переходе с одного режима работы на другой. Различают следующие основные показатели качества процесса управления: колебательность переходного процесса, максимальное отклонение (перерегулирование) управляемой переменной от заданного значения, точность, время переходного процесса.

§ 10.1. Классификация внешних воздействий.

Требования, предъявляемые к качеству процесса управления

Изменение режима работы автоматической системы возникает в результате прикладываемых к ней внешних воздействий. При этом возможны различные режимы работы системы в зависимости от заданного закона изменения выходной переменной и внешних возмущающих воздействий.

Внешнее возмущение в виде переменной нагрузки наиболее существенно для систем стабилизации управляемой переменной на заданном уровне. Основная задача при этом состоит в том, чтобы создать систему, которая не реагировала бы на это воздействие (инвариантная задача).

Внешнее воздействие на входе системы наиболее характерно для программных и следящих систем. При этом надо так выбрать параметры и структуру системы, чтобы это воздействие воспроизводилось с минимальной ошибкой (ковариантная задача).

В общем случае все эти воздействия на систему являются сложной функцией времени. При исследовании качества процесса управления обычно принято рассматривать несколько типичных воздействий в виде следующих функций: единичной скачкообразной, импульсной, гармонической и соответствующей изменению сигнала с постоянной скоростью. Наиболее распространенным является воздействие в виде скачкообразной функции.

Современные методы анализа качества процесса управления можно разделить на две основные группы. К первой можно отнести прямые методы оценки качества по кривой переходного процесса (методы интегрирования дифференциальных уравнений автоматической системы), ко второй — косвенные методы (критерии качества). Прямые методы требуют решения дифференциальных уравнений; косвенные методы позволяют, не решая дифференциальных уравнений, определять некоторые показатели качества процесса. В настоящее время приме-

являются следующие косвенные методы: распределение полюсов и нулей; интегральных оценок; частотные.

Существует несколько видов требований, предъявляемых к протеканию процесса управления.

Графически требования, предъявляемые к качественным показателям процесса управления, можно представить в виде некоторой области, за пределы которой управляемая переменная не может выходить ни при каких возможных в реальных условиях воздействиях на систему. Основными параметрами заданной области качества процесса управления являются: время переходного процесса t_p , заданное значение X_H , ошибка δ и максимальное превышение $x_{\max}$ управляе-

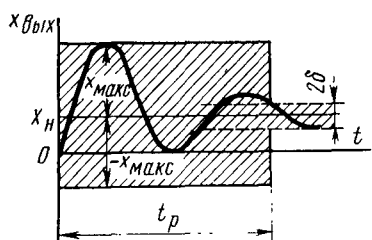


Рис. 10.1

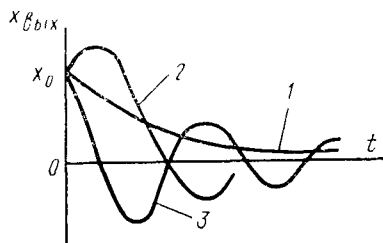


Рис. 10.2

мой переменной. Область заданного качества расположена либо относительно линии заданного значения управляемой переменной при задающем воздействии (рис. 10.1), либо относительно линии ошибки при возмущающем воздействии.

§ 10.2. Характер затухания переходного процесса

В зависимости от характера затухания при скачкообразном воздействии переходный процесс может быть монотонным, аperiodическим или колебательным (рис. 10.2). Процесс является *монотонным*, если отклонение управляемой переменной от нового установившегося значения при $t \rightarrow \infty$ только уменьшается (кривая 1); процесс считается *аperiodическим*, если имеет место не более одного перерегулирования относительно начального и конечного значений управляемой переменной (кривая 2); процесс называется *колебательным*, если управляемая переменная в течение переходного процесса несколько раз отклоняется в обе стороны от конечного установившегося значения (кривая 3).

В некоторых случаях необходимо иметь суждение о скорости затухания переходного процесса. В случае монотонного и аperiodического процессов скорость затухания характеризуется абсолютным значением наименьшего вещественного корня характеристического уравнения данной системы. Для оценки скорости затухания колебательного процесса используют логарифмический декремент затухания,

который равен натуральному логарифму отношения амплитуд двух последовательных экстремумов кривой затухания (рис. 10.3). Если затухание колебательного процесса происходит по закону

$$x_{\text{вых}} = Ae^{-\alpha t} \cos(\omega t + \psi),$$

где α — вещественная часть комплексного корня, то логарифмический декремент затухания

$$d = \ln \frac{X_{1\text{макс}}}{X_{2\text{макс}}} = \ln \frac{A \cos \psi}{A \cos \psi} e^{\alpha T} = \alpha T.$$

Колебания, возникающие в системе, приводят к износу механизмов и часто оказываются нежелательными по техническим соображениям, поэтому число колебаний, возникающих в системе во время переходного процесса, не должно быть слишком велико. В связи с этим вводится понятие о *степени колебательности* μ , которая характеризуется числом колебаний, возникающих в системе за время переходного процесса.

Поскольку колебательность переходного процесса обусловлена наличием комплексного корня

$p_k = -\alpha_k \pm j\omega_k$ в характеристическом уравнении, степень колебательности (для ближайшего к мнимой оси корня)

$$\mu_k = \omega_k / \alpha_k. \quad (10.1)$$

Выражение (10.1) является общим. Например, для вещественного корня $\omega_k = 0$, поэтому $\mu_k = 0$; для чисто мнимого корня $\alpha_k = 0$, поэтому $\mu_k = \infty$.

Значение степени колебательности μ может быть использовано для приближенной оценки перерегулирования $X_{\text{макс}}$. При этом установлено [Л. 35], что между ними существует неравенство

$$X_{\text{макс}} \leq e^{-\pi/\mu},$$

где перерегулирование определено в относительных единицах для случая нулевых начальных условий переходного процесса.

Для оценки колебательности переходного процесса широко используются частотные характеристики.

§ 10.3. Максимальное отклонение управляемой переменной. Перерегулирование. Время переходного процесса

Если управляемая переменная при единичном входном воздействии принимает за время переходного процесса значение, большее установившегося, вводится понятие о максимальном ее отклонении $X_{\text{макс}}$.

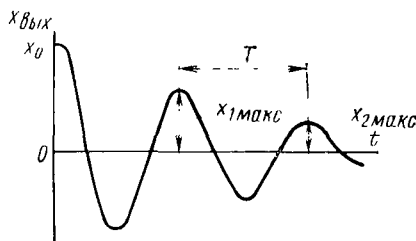


Рис. 10.3

При большом максимальном отклонении могут возникнуть значительные динамические усилия в механической части системы и чрезмерные перенапряжения в электрических элементах. Поэтому значения $X_{\max}$ ограничивают в техническом задании на проектирование. Максимальное отклонение от заданного установившегося значения управляемой переменной выражается в процентах и называется *перерегулированием* σ . Перерегулирование может быть определено по переходной характеристике (рис. 10.4), по частотным характеристикам замкнутой системы, по распределению путей и полюсов.

Быстродействие системы определяется временем переходного процесса t_p . В линейной системе выходная переменная асимптотически приближается к установившемуся значению, поэтому на практике принимают такое время, в течение которого отклонение управляемой переменной не будет превосходить некоторой определенной величины δ (см. рис. 10.1). Часто считают, что переходный процесс заканчивается в тот момент времени, начиная с которого отклонение управляемой переменной от нового установившегося значения не более чем на 5%. Время, в течение которого управляемая переменная впервые достигает

значения, соответствующего новому установившемуся состоянию, называется *временем первого согласования* t_0 (см. кривую 1 на рис. 10.4). В случае обратного отклонения от начального значения управляемой величины момент времени, в который управляемая переменная снова станет равной первоначальному значению, определяет *время задержки* τ (см. кривую 2 на рис. 10.4).

Для приближенной оценки времени переходного процесса используются частотные характеристики замкнутой системы и понятие о степени устойчивости.

§ 10.4. Точность управления. Ошибки системы

Качество процесса оценивается точностью управления, зависящей от величины погрешности, т. е. от отклонения управляемой переменной $x_{\text{вых}}$ от заданного значения X_n :

$$\Delta x_{\text{вых}} = X_n - x_{\text{вых}},$$

или

$$\Delta x_{\text{вых}} = \Delta x_{\text{ст}} + \Delta x_{\text{п}}.$$

Точность управления линейных систем зависит от характера воздействий.

Статические ошибки. Рассмотрим ошибки системы при постоянных ступенчатых воздействиях.

В установившемся режиме, учитывая $X_{\text{вх}}(p) = X_{\text{вх}}/p$, получим

$$x_{\text{вых}}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pW(p) \frac{X_{\text{вх}}}{p} = \frac{K(0)}{1 + K(0)} X_{\text{вх}}; \quad (10.2)$$

$$\Delta x(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pW_{\Delta x}(p) \frac{X_{\text{вх}}}{p} = \frac{1}{1 + K(0)} X_{\text{вх}}. \quad (10.3)$$

Передаточная функция разомкнутой системы определяется звеньями структурной схемы. Для статических систем $K(0) = K$, следовательно,

$$x_{\text{вых}}(t) = X_{\text{вых}} = \frac{K}{1 + K} X_{\text{вх}}; \quad (10.4)$$

$$\Delta x(t) = \Delta X = \frac{1}{1 + K} X_{\text{вх}}, \quad (10.5)$$

где K — общий коэффициент усиления разомкнутой системы.

В статических системах установившееся значение управляемой переменной меньше заданного и всегда имеется статическая ошибка, которая тем меньше, чем больше K .

При возмущающем воздействии, приложенном в какой-либо точке системы, передаточная функция

$$W_z(p) = \frac{K_z(p)}{1 + K(p)} = \frac{\Delta X_{\text{вых}}(p)}{Z(p)},$$

где

$$K(p) = B(p)/A(p); \quad K_z(p) = B_z(p)/A_z(p),$$

или

$$\Delta X_{\text{вых}}(p) = W_z(p) Z(p). \quad (10.6)$$

Аналогично при $Z(p) = Z/p$ можно получить

$$\Delta X_z = \Delta x_{\text{вых}}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pW_z(p) \frac{Z}{p} = \frac{K_z}{1 + K} Z, \quad (10.6a)$$

где K_z — коэффициент усиления цепи звеньев, через которые передается воздействие Z на выход системы.

Так как величина $K_z Z$ равна ошибке Δ_p при отключенном регуляторе, то вместо (10.6a) можно записать

$$\delta_z = \Delta_p (1 + K)^{-1}. \quad (10.7)$$

Для астатических систем характерно наличие интегрирующего звена, поэтому полином $A(p) = A_1(p) \cdot p$ равен нулю при $p = 0$. Следовательно, при постоянном внешнем воздействии на входе

$$x_{\text{вых}}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{B(p)}{A(p) + B(p)} \cdot \frac{X_{\text{вх}}}{p} = X_{\text{вх}},$$

или

$$\begin{aligned} X_{\text{вых}} &= X_{\text{вх}}; \\ \Delta x(t) &= \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{pA_1(p)}{pA_1(p) + B(p)} \cdot \frac{X_{\text{вх}}}{p} = 0. \end{aligned} \quad (10.8)$$

Если интегрирующее звено находится между входами системы и возмущающего воздействия (первый вариант), то

$$\Delta X_z(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} p W_z(p) \frac{Z}{p} = \frac{K_z(0) \cdot A(0)}{A(0) + B(0)} Z = 0, \quad (10.9)$$

или

$$\Delta X_z = 0.$$

Следовательно, ошибка астатической системы относительно постоянных возмущающих воздействий при первом варианте включения интегрирующего звена также равна нулю.

Если интегрирующее звено находится между точкой приложения возмущающего воздействия и выходом системы (второй вариант, характерный для нейтральных объектов), то

$$W_z(0) = \frac{B_z(0)}{B(0)} A_0(0). \quad (10.10)$$

Ошибка управления будет определена с учетом замены

$$B_z(0) = K_z; \quad B(0) = K = k_0 \cdot K_z \quad \text{и} \quad A_0(0) = 1: \quad (10.11)$$

$$\Delta X_z = \frac{K_z}{k_0 K_z} Z = \frac{Z}{k_0}.$$

В этом случае включения интегрирующего звена ошибка системы относительно возмущающего воздействия не равна нулю. Сравнение (10.9) и (10.11) показывает, что для исключения ошибки управления в астатической системе относительно возмущающего воздействия необходимо наличие интегрирующего звена, включенного до точки приложения этого воздействия. В случае нейтрального объекта получим астатическую систему второго порядка.

Коэффициенты ошибок. Чтобы определить ошибки, характеризующие точность работы системы при медленно меняющихся воздействиях, необходимо вычислить коэффициенты ошибок, входящие в разложение функции ошибки $\delta(t)$ в степенной ряд. Для этого следует рассмотреть передаточные функции замкнутой системы относительно ошибок при задающем и при возмущающем воздействиях соответственно

$$\left. \begin{aligned} W_{\Delta x}(p) &= \frac{\Delta X(p)}{X_{\text{вх}}(p)} = \frac{1}{1 + K(p)}; \\ W_z(p) &= \frac{\Delta X_{\text{вых}}(p)}{Z(p)} = \frac{K_z(p)}{1 + K(p)} = W_{\Delta x}(p) \cdot K_z(p). \end{aligned} \right\} \quad (10.12)$$

Можно представить выражения для ошибок в операторной форме:

$$\left. \begin{aligned} \Delta X(p) &= \delta_0(p) = \frac{A(p)}{B(p) + A(p)} X_{\text{вх}}(p); \\ \Delta X_{\text{вых}}(p) &= \delta_z(p) = W_{\Delta x}(p) \frac{B_z(p)}{A_z(p)} Z(p). \end{aligned} \right\} \quad (10.13)$$

Выполнив деление многочленов, в общем виде можно записать ряд по степеням p :

$$\left. \begin{aligned} \delta_0(p) &= \left(c_0 + c_1 p + \frac{c_2}{2!} p^2 + \frac{c_3}{3!} p^3 + \dots \right) X_{\text{вх}}(p); \\ \delta_z(p) &= \left(c'_0 + c'_1 p + \frac{c'_2}{2!} p^2 + \frac{c'_3}{3!} p^3 + \dots \right) Z(p), \end{aligned} \right\} \quad (10.14)$$

где $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ — коэффициенты ошибок в случае задающего воздействия (настройка, управление); $c'_0, c'_1, c'_2, \dots, c'_n$ — коэффициенты ошибок в случае возмущающего воздействия (нагрузка).

Выражения (10.14) можно получить в результате разложения в ряд Маклорена передаточных функций (10.12) или соответственно (10.13) по степеням переменной p .

Установившееся значение ошибки при произвольном воздействии $x_{\text{вх}}(t)$ на основании (10.14) определяется временным рядом

$$\delta_0(t) = \sum_{k=0}^l \frac{c_k}{k!} \frac{d^k x_{\text{вх}}(t)}{dt^k}, \quad (10.15)$$

где $c_k = [d^k W_{\Delta x}(p)/dp^k]_{p=0}$.

Аналогичные выражения можно записать при возмущающем воздействии $z(t)$.

Чем меньше коэффициенты ошибок, тем выше точность системы относительно произвольного сигнала внешнего воздействия. При подсчете коэффициентов ошибок можно ограничиться только первыми тремя коэффициентами. Для систем с астатизмом первого порядка $c_0 = 0$, а с астатизмом второго порядка $c_0 = 0$; $c_1 = 0$.

Произвольные воздействия $x_{\text{вх}}(t)$ обычно рассматриваются в системах автоматического управления (программные и следящие системы). Если задающий сигнал изменяется с постоянной скоростью $x_{\text{вх}}(t) = vt$, то для астатической системы ошибка $\delta_0(t) = c_1 v$ и называется *кинетической ошибкой*. Если задающий сигнал изменяется по гармоническому закону $x_{\text{вх}}(t) = x_{\text{макс}} \sin \omega_{\text{вх}} t$, то ошибка линейной системы будет также изменяться по гармоническому закону $\delta_0(t) = \delta_{\text{макс}} \sin(\omega_{\text{вх}} t + \psi)$. В этом случае на основании (10.12) амплитуда ошибки, называемая *динамической ошибкой*,

$$\delta_{\text{макс}} = x_{\text{макс}} / |1 + K(j\omega_{\text{вх}})|.$$

Поскольку обычно $\delta_{\text{макс}} = x_{\text{макс}}$ и $|K(j\omega_{\text{вх}})| \ll 1$, то

$$\delta_{\text{макс}} = x_{\text{макс}} [K(j\omega_{\text{вх}})] = x_{\text{макс}} / A(\omega_{\text{вх}}).$$

Эта формула обычно используется при расчете следящих систем методом логарифмических характеристик. Для заданных значений $\delta_{\text{макс}}$ и $x_{\text{макс}}$ определяется ордината контрольной точки при частоте $\omega_{\text{вх}}$:

$$G_K = 20 \lg A(\omega_{\text{вх}}) = 20 \lg (x_{\text{макс}} / \delta_{\text{макс}}). \quad (10.16)$$

Пример 10.1. Определим ошибку астатической системы при 1) $x_{вх}(t) = 20 + 2t$; 2) $x_{вх}(t) = 20 + 2t - 0,5 t^2$, если известна передаточная функция

$$W_{\Delta x}(p) = \frac{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2) p + 1}{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2) p + K}.$$

и заданы параметры $K = 100 \text{ сек}$; $T_1 = 0,1 \text{ сек}$; $T_2 = 0,01 \text{ сек}$.

На основании (10.15) находим $c_0 = 0$; $c_1 = 1/K = 0,01$;

$$\frac{c_2}{2} = \frac{(T_1 + T_2)K - 1}{K^2} = \frac{10}{10.000} = 0,001 \text{ сек}^2$$

и определяем ошибки

$$1) \delta_0(t) = 0,02;$$

$$2) \delta_0(t) = 0,01(2 - t) = 0,001 - 0,019 - 0,01 t.$$

Во втором случае данная система не успевает обрабатывать ускоренный сигнал, поэтому ошибка будет безгранично нарастать.

Добротность астатических систем. На основании передаточной функции астатической системы можно ввести понятие о добротности, характеризующейся отношением скорости отработки $\omega_{0,уст}$ в установившемся режиме (производной изменения выходной переменной) к величине ошибки (рассогласованию) на входе:

$$K_{a1}(p) = B(p) / [pA(p)] = X_{вых}(p) / \Delta X(p), \quad (10.16)$$

или

$$pX_{вых}(p) / \Delta X(p) = B(p) / A(p). \quad (10.17)$$

Обозначив $pX_{вых}(p)$ через ω_0 и заменив $B(0)$ на K и $A(0)$ на 1, получим в установившемся режиме (при $t \rightarrow \infty$) выражение для добротности астатической системы первого порядка:

$$D = \omega_{0,уст} / \Delta X(\infty) = K. \quad (10.18)$$

Таким образом, в случае астатизма первого порядка добротность системы равна коэффициенту усиления разомкнутой системы, а установившаяся ошибка при постоянной скорости отработки

$$\Delta X(\infty) = \omega_{0,уст} / K = \omega_{0,уст} / D.$$

Для системы с астатизмом второго порядка

$$K_{a2}(p) = B(p) / [p^2 A(p)] = X_{вых}(p) / \Delta X(p),$$

или

$$pX_{вых}(p) / \Delta X(p) = B(p) / [pA(p)].$$

При астатизме второго порядка добротность равна бесконечности

$$D = \omega_{0,уст} / \Delta X(\infty) = K / 0 = \infty.$$

Следовательно, при постоянной скорости отработки ошибка астатической системы с астатизмом второго порядка равна нулю:

$$\Delta X(\infty) = \omega_{0,уст} / \infty = 0.$$

Метод интегральных оценок позволяет получить в результате вычисления определенных интегралов от некоторых функций управляемой переменной суммарную ошибку за все время процесса управления. Интегральная оценка характеризуется подынтегральной функцией, которая выбирается с таким расчетом, чтобы оценка лучше характеризовала качество переходного процесса и выражалась возможно проще через коэффициенты уравнений исследуемой автоматической системы.

Если внешнее воздействие является единичной скачкообразной функцией, то различие между переходной характеристикой системы и заданным значением X_H в процессе управления можно охарактеризовать интегральной ошибкой, которая равна площади, ограничиваемой кривой и заданным значением (рис. 10.5, а); чем меньше она, тем меньше интегральная ошибка и лучше качество переходного процесса. Величина указанной площади зависит от времени переходного процесса и формы переходной характеристики. Интегральные оценки позволяют вычислить площадь без непосредственного построения переходной характеристики и, следовательно, косвенно оценить качество переходного процесса.

Интегральные оценки одновременно характеризуют две важные стороны процесса: быстроту затухания и размер отклонений управляемой переменной в переходном процессе (не давая ни того, ни другого по отдельности). Такие оценки разрабатывались Л. И. Мандельштамом, А. А. Харкевичем, Б. В. Булгаковым, В. С. Кулебакиным, А. А. Красовским, А. А. Фельдбаумом и др.

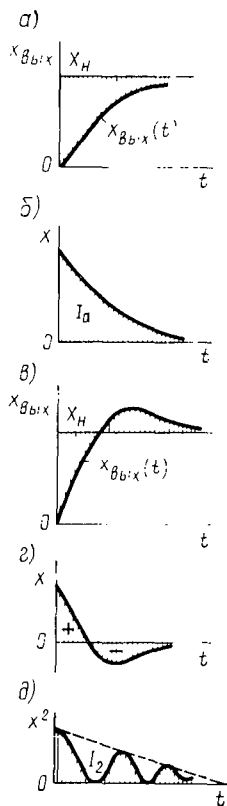


Рис. 10.5

Линейная интегральная оценка $I_0 = \int_0^{\infty} x dt$. В том случае, когда начальные значения и параметры системы удовлетворяют условию монотонного процесса (см. рис. 10.5, а), может быть использована линейная интегральная оценка типа I_0 .

Найдем выражения для оценки I_0 по методу В. С. Кулебакина. Запишем однородное дифференциальное уравнение в виде

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = 0, \quad (10.19)$$

где x - разность между x_H и $x_{\text{внх}}(t)$.

На основании (10.19) можно вычислить площадь (рис. 10.5, б), определяемую интегралом

$$I_0 = \int_0^{\infty} x dt = -\frac{1}{a_n} \int_0^{\infty} \left[a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} \right] dt, \quad (10.20)$$

или

$$I_0 = -\frac{1}{a_n} \left[a_0 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + a_1 \frac{d^{n-2} x}{dt^{n-2}} + \dots + a_{n-1} x \right]_0^{\infty}. \quad (10.21)$$

Предположим, что в общем случае начальные значения равны

$$x(0) = x_0; \quad x'(0) = x_1; \quad x''(0) = x_2; \quad \dots; \quad x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}. \quad (10.22)$$

Тогда для установившегося режима устойчивой системы с учетом

$$x(\infty) = x'(\infty) = x''(\infty) = \dots = x^{(n-1)}(\infty) = 0$$

вместо (10.21) запишем

$$I_0 = -\frac{a_0 x_{n-1}}{a_n} - \frac{a_1 x_{n-2}}{a_n} - \dots - \frac{a_{n-1} x_0}{a_n}. \quad (10.23)$$

Таким образом, для монотонных процессов интегральная оценка I_0 определяется сравнительно просто по коэффициентам дифференциального уравнения и начальным значениям (10.22). Чем меньше величина I_0 , вычисленная по (10.23), тем лучше качество процесса управления.

Однако в случае колебательного или апериодического (рис. 10.5, в) процесса рассматриваемые площади на графике $x(t)$ имеют разные знаки (рис. 10.5, г) и величина интегральной оценки I_0 не соответствует действительному качеству переходного процесса. В этом случае целесообразно применить интегральную оценку I_1 , вычисляемую по абсолютным значениям ошибки $|x'|$, используя интеграл $I_1 = \int_0^{\infty} |x'| dt$.

Однако подсчитать его обычно трудно.

Существуют и другие виды линейных интегральных оценок [Л. 35].

Квадратичная интегральная оценка $I_2 = \int_0^{\infty} x^2 dt$. Для апериодических и колебательных переходных процессов целесообразно применять квадратичную интегральную оценку типа I_2 , представляющую площадь, ограниченную кривой $x^2(t)$ и осью абсцисс (рис. 10.5, д). Вычисление интегральной оценки I_2 по дифференциальному однородному уравнению относительно ошибки x с учетом начальных значений координат было предложено Л. П. Мандельштамом. Идея этого способа заключается в том, что дифференциальное уравнение относительно ошибки умножают поочередно на x , x' , x'' , ..., x^{n-1} . Полученные n уравнений интегрируют поочередно с учетом начальных значений, полагая, что при $t \rightarrow \infty$ все эти переменные равны нулю (устойчивая система).

Для примера рассмотрим уравнение второй степени

$$a_0 x'' + a_1 x' + a_2 x = 0. \quad (10.24)$$

После поочередного умножения на x и x' получим два уравнения, которые почленно интегрируем:

$$a_0 \int_0^\infty x'' x dt + a_1 \int_0^\infty x' x dt + a_2 \int_0^\infty x^2 dt = 0; \quad (10.25)$$

$$(a_0 \int_0^\infty x' x' dt + a_1 \int_0^\infty (x')^2 dt + a_2 \int_0^\infty x x' dt = 0. \quad (10.26)$$

Далее введем обозначения

$$\int_0^\infty x^2 dt = I_2; \quad (10.27)$$

$$\int_0^\infty (x')^2 dt = I_a. \quad (10.28)$$

После интегрирования (10.25) и (10.26) запишем

$$a_2 I_2 - a_0 I_a = -a_0 x_0 x_1 + \frac{1}{2} a_1 x_0^2; \quad (10.29)$$

$$a_1 I_a = -\frac{1}{2} a_0 x_1^2 + \frac{1}{2} a_2 x_0^2. \quad (10.30)$$

Исключив I_a , получим квадратичную интегральную оценку, определяемую коэффициентами a_i и начальными значениями переменной x и ее производных x_i :

$$I_2 = \int_0^\infty x^2 dt = \frac{1}{2a_1 a_2} [(a_0 x_1 + a_1 x_0)^2 + a_0 a_2 x_0^2]. \quad (10.31)$$

Квадратичная интегральная оценка типа I_2 может быть вычислена также по частотным характеристикам (способ Л. А. Харкевича) с использованием преобразования Фурье.

Запишем обратное преобразование Фурье

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (10.32)$$

Так как при $t < 0$ значение $x(t) = 0$, получим прямое преобразование Фурье

$$X(j\omega) = \int_0^\infty x(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (10.33)$$

Выражение для $X(j\omega)$ найдем из $X(p)$, заменив p на $j\omega$. На основании (10.32) вычислим

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} x^2 dt &= \int_0^{\infty} x(t) dt \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) d\omega \int_0^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt.\end{aligned}\quad (10.34)$$

Используя (10.33), вместо (10.34) с учетом знака частоты получим

$$I_2 = \int_0^{\infty} x^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) X(-j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega. \quad (10.35)$$

Формула (10.35) позволяет по известной частотной характеристике $X(j\omega)$ определить площадь, ограничиваемую кривой $|X(j\omega)|^2$ и осью частот.

Так как частотные характеристики симметричны относительно вещественной оси для положительных и отрицательных частот, то вместо (10.35) запишем

$$I_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega. \quad (10.36)$$

Это позволит несколько уменьшить объем вычислительных работ при определении оценки I_2 по частотным характеристикам для систем высокого порядка.

Квадратичная интегральная оценка типа I_2 может быть вычислена также по способу, предложенному А. А. Красовским [Л. 15], с использованием коэффициентов дифференциального уравнения.

Минимизация ошибки при интегральных оценках. Рассмотренные интегральные оценки могут быть использованы для определения параметров и структуры системы, соответствующих минимуму какой-либо интегральной оценки*.

Если необходимо найти значения каких-либо двух параметров системы (например, α и β), когда интегральная оценка имеет минимальное значение, то ее надо записать в функции этих параметров и, взяв частные производные, приравнять их нулю:

$$I = f(\alpha, \beta); \quad (10.37)$$

$$\left. \begin{aligned} \partial I(\alpha, \beta) / \partial \alpha &= 0; \\ \partial I(\alpha, \beta) / \partial \beta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.38)$$

Система (10.38) позволяет определить неизвестные параметры α и β , удовлетворяющие минимуму интегральной оценки.

Однако в некоторых случаях рассмотренные интегральные оценки не имеют минимума по рассматриваемым параметрам. Тогда их при-

* Постановка такой задачи встречается при разработке оптимальных систем (см. гл. 20).

ходится выбирать в результате многократных расчетов по наименьшему значению интегральной оценки внутри области, назначаемой из других соображений (статическая точность, запас устойчивости и т. д.).

Рассмотренные интегральные оценки имеют существенный недостаток: зная величину интеграла, в общем случае нельзя высказать строгое суждение о характере переходного процесса. Более того, нельзя утверждать, что процесс, для которого интегральная оценка меньше, обязательно будет лучше.

Сравним для примера две кривые (см. рис. 10.5, д, сплошная и штриховая). Время переходного процесса их почти одинаково; одна из кривых соответствует монотонному, а другая — колебательному процессу. Монотонный процесс в некоторых случаях более приемлем, чем колебательный, однако величина площади для колебательного процесса меньше, чем для монотонного. Следовательно, выбор параметров по минимальному значению I_2 в данном случае обуславливает колебательный процесс. Выбор параметров, минимизирующих значение I_2 , нередко приводит к резко колебательным процессам в системе. В связи с этим квадратичная интегральная оценка типа I_2 получила ограниченное распространение и вместо нее А. А. Красовским была предложена улучшенная квадратичная интегральная оценка.

Улучшенная квадратичная интегральная оценка I_3 . Для учета влияния скорости переходного процесса на качество управления в улучшенной интегральной оценке введено значение производной $x' = dx/dt$ и коэффициента τ_1 :

$$I_3 = \int_0^{\infty} \left[x^2 + \tau_1^2 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right] dt = \int_0^{\infty} x^2 dt + \tau_1^2 \int_0^{\infty} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 dt. \quad (10.39)$$

Первый член в (10.39) содержит известную квадратичную интегральную оценку I_2 , определяемую по (10.35) или каким-либо другим способом.

Используя преобразование Фурье, в случае нулевых начальных условий и после ряда преобразований выражение (10.39) можно представить в виде

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{\infty} x^2 dt + \tau_1^2 \int_0^{\infty} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega + \\ &+ \frac{\tau_1^2}{\pi} \int_0^{\infty} |X(j\omega)|^2 \omega^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (1 + \tau_1^2 \omega^2) |X(j\omega)|^2 d\omega. \end{aligned} \quad (10.40)$$

Улучшенная интегральная оценка может быть вычислена по коэффициентам дифференциального уравнения. Эту оценку можно использовать для нахождения значений параметров системы по минимуму интеграла I_3 , который представим как

$$I_3 = \int_0^{\infty} \left[x^2 + \tau_1^2 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right] dt = \int_0^{\infty} (x + \tau_1 x')^2 dt = 2\tau_1 \int_0^{\infty} x' x dt. \quad (10.41)$$

Вычисляя последний интеграл в (10.41) и учитывая, что для устойчивой системы $x(\infty) = 0$, а начальное значение ошибки $x(0) = x_0$, получим

$$I_3 = \int_0^{\infty} (x + \tau_1 x')^2 dt + \tau_1 x_0^2. \quad (10.42)$$

В связи с тем что член $\tau_1 x_0^2$ является постоянным, наименьшее значение интеграла I_3 будет определяться только минимальным значением интеграла

$$I_3'' = \int_0^{\infty} (x + \tau_1 x')^2 dt. \quad (10.44)$$

Интеграл I_3'' равен нулю, если

$$x + \tau_1 x' = 0. \quad (10.44)$$

Уравнение (10.44) представляет собой уравнение с разделенными переменными; оно имеет решение

$$x(t) = e^{-t/\tau_1}. \quad (10.45)$$

Полученное выражение соответствует экспоненциальной кривой, называемой в этом случае *экстремалью*.

Особенность минимизации интеграла I_3 состоит в том, что идеальным будет процесс, совпадающий с экспонентой.

Используя математический аппарат вариационного исчисления, можно без построения экстремали $x_0(t)$ сравнить ее с кривой $x(t)$ при выбранных параметрах системы. Для этой цели вводится разность между интегралом I_3 , соответствующим кривой $x(t)$, и интегралом I_{33} , соответствующим экстремали $x_0(t)$. Эта разность, называемая первой вариацией, должна быть равна нулю в случае совпадения $x(t)$ с кривой $x_0(t)$.

В более общем случае используется обобщенная квадратичная интегральная оценка типа I_{3n} . При определении ее величины вводится квадратичная форма $V(t)$ от координаты x и ее производных. На основании $V(t)$ составляется производная $W'(t) = -V(t)$, характеризующая интегральную оценку I_{3n} :

$$I_{3n} = \int_0^{\infty} V(t) dt = \int_0^{\infty} -\frac{dW(t)}{dt} dt = -\int_0^{\infty} dW(t) = W(0). \quad (10.46)$$

Здесь из условий устойчивости принято, что при $t \rightarrow \infty$ значение $W(\infty) = 0$, а $W(0)$ соответствует $t = 0$.

Определение формы $W(t)$, соответствующей квадратичной форме $V(t)$, доказано А. М. Ляпуновым. Такой способ может быть применен для вычисления I_3 и любого другого обобщенного интеграла I_{3n} [Л. 35, 40]. Для минимизации обобщенной интегральной оценки могут быть применены методы вариационного исчисления, позволяющие найти уравнение экстремали для ошибки $x_{3n}(t)$.

§ 10.6. Приближенная оценка качества переходного процесса по методу распределения нулей и полюсов

В связи с тем, что операторное изображение управляемой переменной определяется передаточной функцией системы, целесообразно рассмотреть связь между нулями и полюсами передаточной функции и оригиналом управляемой переменной — переходной характеристикой.

Для известного заданного внешнего воздействия можно записать

$$X_{\text{вых}}(p) = W(p) \cdot X_{\text{вх}}(p), \quad (10.47)$$

где

$$W(p) = B_2(p)/A_2(p);$$

$$X_{\text{вх}}(p) = B_1(p)/A_1(p),$$

или

$$X_{\text{вых}}(p) = \frac{B_2(p)}{A_2(p)} \cdot \frac{B_1(p)}{A_1(p)} = \frac{B_3(p)}{A_3(p)}. \quad (10.48)$$

Корни многочлена числителя (10.48) определяют нули, а корни многочлена знаменателя — полюса изображения выходной переменной (10.48). Следовательно, качество переходного процесса, характеризующее переходной характеристикой, в общем случае зависит от нулей и полюсов выражения (10.48).

В случае единичного скачкообразного воздействия на входе системы вместо (10.48) получим

$$X_{\text{вых}}(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{B_2(p)}{A_2(p)}. \quad (10.49)$$

Для точного определения переходной характеристики надо знать расположение нулей и полюсов на комплексной плоскости. Как уже отмечалось, для устойчивых систем все полюса находятся в левой полуплоскости, а для минимально-фазовых систем и все нули расположены в левой полуплоскости.

На основании (10.49) можно установить, что при единичном внешнем воздействии и нулевых начальных условиях переходная характеристика определяется нулями и полюсами передаточной функции замкнутой автоматической системы $W(p)$.

Многочлен знаменателя в (10.49) является характеристическим уравнением замкнутой системы. Для некоторых одноконтурных автоматических систем полином числителя (10.49) представлен постоянным числом в виде коэффициента усиления разомкнутой системы, т. е. изображение (10.49) не будет иметь нулей.

Только в том случае, когда передаточная функция $W(p)$ не имеет нулей, т. е. когда ее числитель представляет собой постоянную величину, не зависящую от оператора p , качество переходного процесса можно оценивать по распределению корней характеристического уравнения замкнутой системы. Далее это делается для одноконтурной замкнутой системы, переходный процесс которой вызван единичным

задающим воздействием при нулевых начальных условиях. Для приближенной оценки при этом достаточно найти на комплексной плоскости область, внутри которой расположены полюса передаточной функции (рис. 10.6). В ряде случаев таким путем удастся приближенно определить такие показатели качества, как время переходного процесса и колебательность. Указанную область находят по коэффициентам полинома знаменателя передаточной функции, т. е. по характеристическому уравнению замкнутой системы. Для заданного характеристического уравнения с положительными коэффициентами

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0 \quad (10.50)$$

модули корней $|\alpha|$ будут заключены между наибольшим (M) и наименьшим (m) из отношений следующего по индексу коэффициента к предыдущему:

$$0 < m < \frac{a_k}{a_{k-1}} < M; \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (10.51)$$

откуда

$$m \leq |\alpha| \leq M.$$

На основании (10.51) можно выделить кольцо модулей на комплексной плоскости корней. Для устойчивых систем корни будут расположены в полукольце модулей только в левой полуплоскости.

Рассмотренный способ построения области расположения корней дает слишком расширенные границы, и при точных расчетах пользоваться им нецелесообразно, несмотря на всю его простоту. Для оценки качества переходного процесса по корням уравнения (10.50) вычисляют среднее геометрическое значение модулей корней, являющееся относительной мерой быстродействия:

$$\omega_0 = |\sqrt[n]{a_n/a_0}|.$$

Упрощение характеристического уравнения. Так как переходные процессы составляющих с относительно большими абсолютными значениями по модулю корней характеристического уравнения затухают быстрее переходных процессов других составляющих с малыми значениями корней по модулю, то при приближенной оценке быстродействия первыми составляющими можно пренебречь.

Коэффициенты уравнения (10.50) зависят от постоянных времени, поэтому коэффициенты, определяемые малыми постоянными, будут достаточно малы. Если коэффициенты одного или нескольких членов характеристического уравнения устойчивой системы, начиная с члена со старшей степенью, на порядок меньше коэффициентов первой и второй производных, то ими можно пренебречь. Это позволит понизить порядок характеристического уравнения и упростить расчеты по определению быстродействия устойчивой системы*.

* Указанное упрощение может быть сделано, если при отбрасывании малых параметров устойчивость системы не нарушается.

Пример 10.2. Пусть имеется характеристическое уравнение замкнутой системы

$$p^3 + 151 p^2 + 5410 p + 5400 = 0. \quad (10.52)$$

Корни этого уравнения равны: $p_1 = -1$; $p_2 = -60$; $p_3 = -90$.

Если пренебречь первыми двумя членами, то характеристическое уравнение упростится и после деления на 5400 будет иметь вид

$$1,002 p + 1 = 0.$$

Здесь единственный корень $p_1 = -0,99$ определяет длительность переходного процесса, а отброшенные члены определяют корни, составляющие переходных процессов которых затухают в 60 и 90 раз быстрее всего процесса.

Расстояние до ближайшего к мнимой оси корня, характеризующего длительность переходного процесса, называется *степенью устойчивости* α_0 .

Определение и выбор степени устойчивости. Если ближайший к мнимой оси корень является вещественным, то степень устойчивости называется *апериодической*, так как процесс определяется апериодической составляющей.

Если ближайший к мнимой оси корень является комплексным, то степень устойчивости называется *колебательной*, так как процесс определяется колебательной составляющей.

Если рассматривать уменьшение основной составляющей переходного процесса, характеризуемой степенью устойчивости, до ε от первоначального значения, равного единице, то можно записать

$$\varepsilon = e^{-\alpha_0 t_p},$$

откуда

$$t_p = -(\ln \varepsilon) / \alpha_0. \quad (10.53)$$

Значение степени устойчивости α_0 используется для приближенного нахождения времени переходного процесса:

$$t_p \approx 3 / \alpha_0. \quad (10.54)$$

Таким образом, степень устойчивости α_0 является косвенной мерой скорости затухания переходного процесса. Величину α_0 можно вычислить различными способами.

Для определения степени устойчивости используется характеристическое уравнение замкнутой системы (10.50), преобразованное путем замены переменной p на $(\lambda - \alpha)$:

$$\begin{aligned} F(\lambda - \alpha) = & a_0 (\lambda - \alpha)^n + a_1 (\lambda - \alpha)^{n-1} + \dots \\ & \dots + a_{n-1} (\lambda - \alpha) + a_n = 0. \end{aligned} \quad (10.55)$$

Это равносильно смещению влево мнимой оси на величину α .

Раскрыв скобки и проводя преобразования, получим с м е щ е н и е уравнение

$$F(\lambda - \alpha) = b_0 \lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + \dots + b_{n-1} \lambda + b_n = 0. \quad (10.56)$$

Функцию $F(\lambda - \alpha)$ можно разложить в ряд Тейлора по степеням λ :

$$F(\lambda - \alpha) = \sum_{i=0}^n \frac{F^{(n-i)}(-\alpha)}{(n-i)!} \lambda^{n-i}. \quad (10.57)$$

Сравнивая (10.57) с (10.56), устанавливаем, что коэффициенты b_i определяются по формулам

$$b_i = \frac{F^{(n-i)}(-\alpha)}{(n-i)!} - \frac{1}{(n-i)!} \left[\frac{d^{(n-i)} F(p)}{dp^{(n-i)}} \right]_{p=-\alpha}, \quad (10.58)$$

при этом учитываем, что $(n-i)! = 1$.

Определив b_i , можно составить смещенное уравнение (10.56) и найти степень устойчивости.

Определение степени устойчивости по критерию Гурвица. При $\alpha = 0$ все корни уравнения (10.56) для устойчивой системы расположены в левой полуплоскости корней, так как $F(\lambda \rightarrow 0) = F(p)$ и все миноры определителя Гурвица, составленного из коэффициентов уравнения (10.56), будут положительными. Будем теперь увеличивать α до тех пор, пока один из миноров определителя Гурвица не обратится в нуль. Найденное значение α_0 , соответствующее этому случаю, будет равно искомой степени устойчивости. С ростом значения α , определяющего коэффициенты (10.58) смещенного уравнения (10.56), первым всегда обращается в нуль старший минор Δ_n :

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} b_n. \quad (10.59)$$

Обращение в нуль (10.59) при α_0 возможно в двух случаях: когда коэффициент $b_n = 0$ и когда предпоследний минор определителя $\Delta_{n-1} = 0$.

В первом случае получаем один корень уравнения (10.56), равный нулю. При этом степень устойчивости будет аperiodической, так как ближайшим к мнимой оси был вещественный корень уравнения (10.50), который в результате смещения мнимой оси влево на величину α_0 стал равным нулю.

Во втором случае получаем два корня уравнения (10.56), расположенных на мнимой оси. При этом степень устойчивости будет колебательной, так как ближайшей к мнимой оси была пара сопряженных комплексных корней уравнения (10.50), которые в результате смещения мнимой оси влево на величину α_0 оказались на мнимой оси.

Определение степени устойчивости в общем случае является такой же трудоемкой задачей, как и нахождение корней исходного характеристического уравнения (10.50).

После того как определена степень устойчивости, можно на графике переходной характеристики построить ограничивающие кривые. Действительно, если условно положить, что все корни уравнения (10.50) являются вещественными кратными и равны степени устойчивости α_0 , то процесс будет наиболее длительным; кривая $v(t)$ при этом называется *мажорантой* и определяется уравнением

$$v(t) = e^{-\alpha_0 t} \left[1 + \alpha_0 t + \frac{(\alpha_0 t)^2}{2!} + \frac{(\alpha_0 t)^3}{3!} + \dots \right]. \quad (10.60)$$

Если же положить, что уравнение (10.50) имеет один корень, равный степени устойчивости α_0 , и пренебречь остальными корнями, находящимися на значительном расстоянии слева от него, то процесс будет наиболее быстрым; кривая $u(t)$ при этом называется *минорантой* и определяется уравнением

$$u(t) = e^{-\alpha_0 t}. \quad (10.61)$$

Действительная кривая $x(t)$ будет расположена между мажорантой и минорантой, поэтому они используются для оценки качества переходного процесса [Л. 34]. Графики мажоранты и миноранты могут быть уточнены, если учесть наиболее удаленный корень и показатель колебательности.

Связь степени устойчивости со значениями постоянных времени звеньев. Применяя данные о структурно неустойчивых системах, можно установить связь между степенью устойчивости и постоянными времени звеньев. Рассмотрим два основных класса автоматических систем — астатические и статические одноконтурные системы [Л. 1], для которых α_0 определяется очень просто.

Для астатической одноконтурной системы, содержащей одно интегрирующее и несколько инерционных звеньев первого порядка, характеристическое уравнение замкнутой системы можно записать в виде

$$p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) \dots (T_n p + 1) + K = 0. \quad (10.62)$$

Произведя замену переменной p на $(\lambda - \alpha)$, получим следующее смещенное уравнение

$$(\lambda - \alpha)(T_1 \lambda + 1 - \alpha T_1)(T_2 \lambda + 1 - \alpha T_2) \dots \\ \dots (T_n \lambda + 1 - \alpha T_n) + K = 0. \quad (10.62a)$$

Допустим, что звенья пронумерованы по убывающим величинам постоянных времени так, что

$$T_1 > T_2 > T_3 > \dots > T_n,$$

или

$$\frac{1}{T_1} < \frac{1}{T_2} < \frac{1}{T_3} < \dots < \frac{1}{T_n}.$$

При увеличении α от нуля до некоторого значения $\alpha_0 = 1/T_1$ член $\alpha_0 T_1 = 1$ [см. (10.62a)], т. е. свободный член компенсируется. Если и дальше увеличивать α , то получим $\alpha_i T_1 > 1$, т. е. свободный член во второй скобке будет отрицательным. Так как первая скобка содержит отрицательный свободный член и при $\alpha_i > \alpha_0$ вторая скобка также содержит отрицательный свободный член, то можно полагать, что в системе с характеристическим уравнением (10.62a) при смещении на α_i будут иметь место два неустойчивых звена, определяющих структурную неустойчивость. Следовательно, в рассматриваемой системе степень устойчивости не может быть больше $1/T_1$, т. е. сте-

вены устойчивости одноконтурной астатической системы не превосходит величины, обратной большей постоянной времени аperiodического звена.

Для статической системы, состоящей только из аperiodических звеньев, запишем характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$\prod_{i=1}^n (T_i p + 1) + K = 0. \quad (10.63)$$

Произведя замену переменной p на $(\lambda - \alpha)$, получим вместо (10.63) следующее смещенное уравнение

$$\prod_{i=1}^n [T_i \lambda + (1 - T_i \alpha)] + K = 0. \quad (10.63a)$$

По мере увеличения α сначала становится неустойчивым звено с наибольшей постоянной времени T_1 , но это не нарушает структурной устойчивости системы. При дальнейшем увеличении α (когда $\alpha_1 > \alpha_a = 1/T_1$) получается второе неустойчивое звено, и система с уравнением (10.63) при $\alpha_1 > \alpha_a$ становится структурно неустойчивой. Следовательно, в данном случае степень устойчивости не превышает 1 T_1 , где T_1 — вторая по величине постоянная времени аperiodического звена.

Значение T_2 обычно значительно меньше T_1 , поэтому в статической системе может быть достигнуто большее быстродействие, чем в астатической.

Аналогично можно установить зависимость величины α_0 от постоянных времени систем, содержащих колебательные, дифференцирующие и другие звенья.

Построение линий равных значений степени устойчивости и степени колебательности. При выборе параметров системы по заданной степени устойчивости удобно иметь график, на котором внутри области устойчивости на плоскости каких-нибудь двух параметров нанесены линии равных значений степени устойчивости. Для систем третьего порядка эти линии построены в виде допущения диаграммы Вышнеградского. Так как построение выполнялось по нормированному уравнению в форме Вышнеградского, степень устойчивости на диаграмме получена также в нормированном виде, следовательно,

$$\alpha_0 = \frac{1}{(a_0/a_3)} \alpha_{норм}, \quad (10.64)$$

где α_0 — действительная степень устойчивости; $\alpha_{норм}$ — нормированная степень устойчивости; a_0 и a_3 — коэффициенты исходного характеристического уравнения (до приведения к форме Вышнеградского).

Построение производится по уравнению, определяемому критерием Вышнеградского для смещенного уравнения, с учетом возможных двух видов степени устойчивости — аperiodической ($b_3 = 0$) или колебательной ($\Delta_2 = 0$).

Нормированное уравнение в фо

$$F(z) - z^3 - Kz^2$$

Соответственно смещенное уравнение на $(\lambda - \alpha_{норм})$ запишется как

$$F(\lambda - \alpha_{норм}) - \lambda^3 - b_1$$

Найдем выражения для коэффици

$$b_1 = -\frac{1}{(3-1)!} \left[\frac{d^{3-1} F(z)}{dz^{3-1}} \right]_{z = -\alpha_{норм}} = -6\alpha$$

$$b_2 = -\frac{1}{(3-2)!} \left[\frac{d^{3-2} F(z)}{dz^{3-2}} \right]_{z = -\alpha_{норм}} = -Y =$$

$$b_3 = -\frac{1}{(3-3)!} \left[\frac{d^{3-3} F(z)}{dz^{3-3}} \right]_{z = -\alpha_{норм}} = F(-\alpha_{норм}) = K\alpha_{норм}^3 - \alpha_{норм}^3$$

Для построения линий равных степени устойчивости применяется

$$b_3 = 1 - Y\alpha_{норм}^3 = K\alpha$$

откуда находится зависимость между Вышнеградского:

$$Y = \frac{1}{\alpha_{норм}} = K\alpha$$

Для построения линий равных степени устойчивости применяется

$$\Delta_2 = 0 = b_1$$

Подставляя в него значения (10.64) симость между обобщенными координ

$$Y = \frac{1}{X - 2\alpha_{норм}} = 2\alpha_1$$

По уравнениям (10.67) и (10.68) с степени устойчивости, являющиеся графического [21, 35].

Точки сопряжения линий, соответствующие разделению области аperiodического и колебательного (см. рис. 8.9).

Для построения линий равных можно воспользоваться формулами В. эффициенты уравнения. Рассмотрим э степени, представленного в форме

Винниградского имеет вид

$$1 - 0. \quad (10.65)$$

после замены z в (10.41)

$$\lambda_2 \lambda_1 - b_3 = 0.$$

в b_i по (10.58):

$$\left. \begin{aligned} -2X - X - 3\alpha_{\text{норм}} \\ \mu - 3\alpha_{\text{норм}}^2 \\ \mu - 1 - Y\alpha_{\text{норм}} \end{aligned} \right\} \quad (10.66)$$

й аperiodической
ение

$$-\alpha_{\text{норм}}^2 = 0,$$

общенными координатами

$$-\alpha_{\text{норм}}^2. \quad (10.67)$$

ий колебательной
ение

з

преобразуя, находим зави-
и Винниградского:

$$X - 2\alpha_{\text{норм}}. \quad (10.68)$$

ся линии равных значений
ением диаграммы Вышне-

ующих уравнениям (10.67)
аммы Винниградского на
эго переходных процессов

ий степени колебательности
связывающими корни и ко-
примере уравнения третьей
ниградского (10.65).

Допустим, что корнями уравнения (10.65) будут

$$z_1 = -\alpha_1 \pm j\omega_1; \quad z_2 = -\alpha_1 - j\omega_1; \quad z_3 = -\alpha_2. \quad (10.69)$$

Используя свойства корней кубического уравнения, получим, что с учетом (10.69) для уравнения (10.65)

$$2\alpha_1 = -\alpha_2, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda. \quad (10.70)$$

$$2\omega_1^2 = \alpha_2^2 - \alpha_1^2(1 - \mu^2) = 1. \quad (10.71)$$

$$\alpha_1^2 \alpha_2^2 (1 - \mu^2) = 1. \quad (10.72)$$

где $\mu = \omega_1/\alpha_1$ — степень колебательности.

Исключая α_1 и α_2 , найдем аналитическое выражение, определяющее семейство кривых равных значений колебательности на диаграмме Вышнеградского [П. 34].

Условия аperiodичности и монотонности процесса. Часто требуется знать только характер переходного процесса. Для выявления его существуют так называемые условия аperiodичности и монотонности [П. 35].

Условие аperiodичности процесса при отсутствии нулей передаточной функции $W(p)$ для нулевых начальных значений требует, чтобы все вещественные корни характеристического уравнения замкнутой системы были отрицательными.

Для убывающего монотонного процесса, когда начальное значение $x(0) = x_0 > 0$, скорость изменения управляемой переменной $x'(t)$ должна быть отрицательной во всем интервале времени $0 \leq t \leq \infty$. Для возрастающего монотонного процесса должно быть $x'(t) \geq 0$ во всем интервале времени $0 \leq t \leq \infty$.

При кратных вещественных корнях уравнения (10.50) обычно имеется перерегулирование, поэтому неизменным условием монотонного процесса является отсутствие кратных вещественных корней.

При нулевых начальных условиях переходный процесс будет монотонным, если выполняется условие аperiodичности. Процесс может быть монотонным и в том случае, когда имеется комплексный корень, расположенный относительно мнимой оси не ближе ближайшего вещественного корня. Для уравнения третьего порядка это было показано Вышнеградским. Однако вид переходной характеристики существенно зависит от начальной скорости переходного процесса. Если начальные условия являются ненулевыми, то условие монотонности может быть выражено через производные и коэффициенты уравнения [П. 38].

Влияние нулей на переходный процесс. При наличии нулей у передаточной функции, когда полином $B_2(p)$ содержит оператор p в выражении (10.49), вывод о решающем влиянии степени устойчивости α_0 на длительность и характер переходного процесса теряет силу. В общем случае при наличии нулей и ненулевых начальных значений, а также при произвольном внешнем воздействии переходный процесс

будет характеризоваться как полюсами, так и нулями выражения

$$X_{\text{вых}}(p) = \frac{B_2(p)}{A_1(p)} \cdot \frac{B_1(p)}{A_2(p)}$$

где $B_1(p)$ и $A_1(p)$ — полиномы, определяющие воздействие; $B_2(p)$ и $A_2(p)$ — полиномы, определяющие замкнутую систему относительно входной переменной; $B_{\text{вых}}(p)$ и $A_{\text{вых}}(p)$ — полиномы, определяющие нулевые начальные значения.

Наличие нулей в выражении (10.73) способствует перерегулированию, что можно установить, решив его.

В том случае, когда $B_{\text{вых}}(p) = 0$ и воздействие прикладывается в виде единичного скачка, операторное уравнение имеет вид:

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) X_{\text{вых}}(p) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m) \frac{1}{p}. \quad (10.74)$$

Если при отсутствии нулей $(b_0 = b_1 = \dots = b_{m-1} = 0)$ обозначить $X_{\text{вых}}(t)$ через $h_0(t)$, считая $h_0(\infty) = 1$, то на основании (10.74) можно записать

$$x_{\text{вых}}(t) = h(t) - \frac{b_{m-1}}{a_n} h_0(t) + \dots + \frac{b_0}{a_n} h_0(t)$$

В качестве примера на рис. 10.7 характеристики $h(t)$ для аperiodических [П. 16]:

$$W(p) = \frac{b_0 p}{a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p^2 + a_3}$$

когда коэффициенты соответствуют $b_1 = a_3, a_0 = 1$.

На основании (10.76) при $\epsilon_{\text{мин}} = 1$

$$h(t) = \frac{b_1}{a_n} h_0(t) + \frac{b_0}{a_n} h_0(t)$$

где

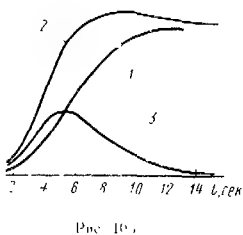
$$h_0(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{p^3 + a_1 p^2 + a_2 p^2 + a_3} \right\}$$

Характеристика $h_0(t)$ в случае $b_1 = 0$ (кривая 1), однако при $b_1 \neq 0$ кривая

так и нулями операторного

$$\frac{B_{n,n}(p)}{A_2(p)}, \quad (10.73)$$

емле характером внешнего юмы передаточной функции ематриваемых воздействий юином, характеризующий ри положительных коэффи-



$$I) \dots \frac{h_n}{a_n} h_0^{(n)}(t). \quad (10.75)$$

ия 2) приведена переходная стема с передаточной функ-

$$\frac{1}{a_4 p^2 + a_5 p + a_6}. \quad (10.76)$$

ху шестой кратности при зном воздействии

$$h(t) = \frac{h_0}{h} h_0'(t). \quad (10.77)$$

$$p^3 + a_5 p + a_6 \left| \frac{1}{p} \right| \quad (10.78)$$

е имеет переступивания стное значение в (10.77),

определяющее кривую 3, обусловило перерегулирование $h(t)$, которое тем больше (кривая 2), чем больше b_0 , т. е. чем меньше абсолютное значение нуля передаточной функции $W(p)$.

Аналогично можно проследить влияние большего числа нулей. Наличие нулей передаточной функции приводит к тому, что при всех вещественных полюсах (корнях характеристического уравнения) переходная характеристика совершает несколько колебаний относительно установившегося значения, вплоть до числа n , равного степени характеристического уравнения. Таким образом, наличие нулей нарушает условие апериодичности и монотонности.

В общем случае, при ненулевых начальных условиях кривая $h(t)$ может еще больше отличаться от кривой $h_0(t)$.

На основании исследований [Л. 35] установлены некоторые положения, которые используются при выборе нулей и полюсов передаточной функции в общем случае [см. (10.47)], что позволяет обеспечить удовлетворительное качество переходного процесса.

§ 10.7. Основы частотного метода анализа качества процесса управления

Математической основой частотного метода анализа качества автоматических систем является преобразование Фурье. Этот метод сочетает аналитические вычисления и графические построения.

Так как при анализе качества процесса управления применяются те же частотные характеристики, что и при исследовании устойчивости, то частотный метод представляет собой единый метод анализа динамики автоматических систем. При этом используется аналитическая зависимость между переходной и частотной функциями замкнутой системы.

Аналитические зависимости между переходной и частотной функциями. Изображения управляемой переменной в форме Лапласа для замкнутой системы относительно задающего и возмущающего воздействий автоматической системы соответственно имеют вид:

$$X_{\text{вых}}(p) = W(p) X_{\text{вх}}(p) = \Phi(p); \quad (10.79)$$

$$X_{\text{вых}}(p) = W_z(p) Z(p) = \Phi_z(p). \quad (10.80)$$

Оригиналы от этих изображений определяются по формуле обратного преобразования Лапласа. Например, для задающего воздействия

$$x_{\text{вх}}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} \Phi(p) e^{pt} dp. \quad (10.81)$$

Аналогичное выражение можно записать и для возмущающего воздействия.

Исчезающее внешнее воздействие. Если функции воздействий удовлетворяют условиям

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_{\text{вх}}(t) = 0; \quad (10.82)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0, \quad (10.83)$$

т. е. являются «исчезающими» (импульсный толчок), ограничены и непрерывны при $t \geq 0$, то для них существуют изображения Фурье.

Аналогично можно представить выражение для возмущающего воздействия.

Частотная функция $\Phi(j\omega) = W(j\omega) \cdot X_{\text{вх}}(j\omega)$, определяемая произведением частотных функций замкнутой системы и внешнего воздействия, называется *обобщенной частотной функцией*, соответствующей произвольному исчезающему воздействию. Представим $\Phi(j\omega)$ в виде

$$\left. \begin{aligned} \Phi(j\omega) &= R(\omega) + jS(\omega); \\ X_{\text{вх}}(j\omega) &= \int_0^{\infty} x_{\text{вх}}(t) e^{-j\omega t} dt; \\ Z(j\omega) &= \int_0^{\infty} z(t) e^{-j\omega t} dt. \end{aligned} \right\} \quad (10.84)$$

При указанных выше условиях, используя интеграл обратного преобразования Фурье, вместо (10.81) можно записать

$$x_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega) X_{\text{вх}}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (10.85)$$

где

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t. \quad (10.86)$$

Тогда вместо (10.85) получим

$$\begin{aligned} x_{\text{вых}}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [R(\omega) \cos \omega t - S(\omega) \sin \omega t] d\omega + \\ &+ j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [R(\omega) \sin \omega t + S(\omega) \cos \omega t] d\omega. \end{aligned} \quad (10.87)$$

Второй интеграл в (10.87) равен нулю, поскольку функция $x_{\text{вых}}(t)$ является действительной (мнимая часть отсутствует). Следовательно,

$$x_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [R(\omega) \cos \omega t - S(\omega) \sin \omega t] d\omega. \quad (10.88)$$

Поскольку начальные условия нулевые, то, заменив t на $-t$, запишем:

$$x_{\text{вых}}(0) = 0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [R(\omega) \cos \omega t + S(\omega) \sin \omega t] d\omega. \quad (10.89)$$

Сложив (10.88) и (10.89), получим

$$x_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\omega) \cos \omega t d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R(\omega) \cos \omega t d\omega. \quad (10.90)$$

Интеграл (10.90) определяет функцию $x_{\text{вых}}(t)$ через действительную часть обобщенной частотной функции.

Вычтя из (10.88) выражение (10.89), найдем [с учетом четности функции $S(\omega) \sin \omega t$]

$$x_{\text{вых}}(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \sin \omega t d\omega = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) \sin \omega t d\omega. \quad (10.91)$$

Интеграл (10.91) определяет функцию $x_{\text{вых}}(t)$ через мнимую часть обобщенной частотной функции.

Аналогичные выражения можно получить для случая возмущающего воздействия, когда действительная $R_z(\omega)$ и мнимая $S_z(\omega)$ части характеризуются произведением $W_z(j\omega)$ и $Z(j\omega)$.

Внешнее воздействие в виде скачкообразной функции. Для этой функции условия (10.82) и (10.83) не выполняются, поэтому изображения Фурье (10.84) не имеют конечного значения. В этом случае нельзя пользоваться непосредственно выражением (10.85). Здесь справедливо только преобразование Лапласа:

$$x_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} W(p) \frac{X_{\text{вх}}}{p} e^{pt} dp.$$

Приводя к единичному задающему воздействию путем деления этого выражения на $X_{\text{вх}}$, получим нормированную характеристику

$$h(t) = \frac{x_{\text{вых}}(t)}{X_{\text{вх}}} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{W(p)}{p} e^{pt} dp. \quad (10.92)$$

Аналогично для возмущающего воздействия

$$h_z(t) = \frac{x_{\text{вых}}(t)}{Z} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{W_z(p)}{p} e^{pt} dp. \quad (10.93)$$

Чтобы установить зависимость переходной функции от частотной функции замкнутой системы при скачкообразном воздействии, иногда

используют конечное значение интеграла Фурье для единичной функции в виде [Л. 35]:

$$1(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (10.94)$$

Аналогичный результат можно получить, если вести рассуждение относительно ошибки управления, используя теорему о конечном значении функции

$$\Delta x(t) = x_{\text{вых}}(t) - X_{\text{вых}}(\infty), \quad (10.95)$$

где

$$x_{\text{вых}}(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x_{\text{вых}}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pW(p) \frac{X_{\text{вх}}}{p} = W(0) X_{\text{вх}}. \quad (10.96)$$

При этом получим

$$\Delta x(t) = x_{\text{вых}}(t) - W(0) X_{\text{вх}}; \quad \Delta X(p) = X_{\text{вых}}(p) - \frac{W(0) X_{\text{вх}}}{p}. \quad (10.97)$$

На основании (10.92) и (10.97) запишем

$$\begin{aligned} x_{\text{вых}}(t) - W(0) X_{\text{вх}} &= L^{-1} \left[\frac{W(p)}{p} X_{\text{вх}} - \frac{W(0)}{p} X_{\text{вх}} \right] = \\ &= \frac{X_{\text{вх}}}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} \frac{W(p) - W(0)}{p} e^{pt} dp. \end{aligned}$$

Поскольку функция $\Delta x(t)$ является исчезающей, то можно перейти к преобразованию Фурье:

$$h(t) - W(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W(j\omega) - W(0)}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega. \quad (10.98)$$

Представим частотную функцию замкнутой системы в виде суммы вещественной $P(\omega)$ и мнимой $Q(\omega)$ частей:

$$\left. \begin{aligned} W(j\omega) &= P(\omega) + jQ(\omega); \\ W(0) &= P(0) + j0. \end{aligned} \right\} \quad (10.99)$$

Учитывая (10.99) и формулу Эйлера (10.86), вместо (10.98) запишем

$$\begin{aligned} h(t) &= P(0) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\omega) \cos \omega t + [P(\omega) - P(0)] \sin \omega t}{\omega} d\omega - \\ &- j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[P(\omega) - P(0)] \cos \omega t - Q(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega. \end{aligned} \quad (10.100)$$

Эта функция является вещественной, поэтому последний интеграл в (10.100) равен нулю. Учитывая четность подынтегральной функции, вместо (10.100) запишем

$$h(t) = P(0) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q(\omega) \cos \omega t}{\omega} d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega - \frac{P(0)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (10.101)$$

Последний интеграл в (10.101) равен $\pi/2$. Следовательно,

$$h(t) = \frac{P(0)}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q(\omega) \cos \omega t}{\omega} d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (10.102)$$

При нулевых начальных условиях $h(-t) = 0$, поэтому, заменив t на $-t$, получим

$$0 = \frac{P(0)}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q(\omega) \cos \omega t}{\omega} d\omega - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (10.103)$$

Вычтя из (10.102) выражение (10.103), найдем

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (10.104)$$

Интеграл (10.104) устанавливает аналитическую зависимость между переходной функцией $h(t)$ выходной переменной системы (в относительных единицах) и вещественной частотной характеристикой $P(\omega)$ замкнутой системы при скачкообразном задающем воздействии $X_{вх}$.

Аналогично для единичного возмущающего воздействия

$$h_z(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P_z(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega, \quad (10.105)$$

где $P_z(\omega)$ — вещественная частотная характеристика замкнутой системы относительно возмущающего воздействия.

Сложив выражения (10.102) и (10.103), получим

$$h(t) = P(0) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q(\omega) \cos \omega t}{\omega} d\omega. \quad (10.106)$$

Интеграл (10.106) определяет зависимость между переходной функцией $h(t)$ и мнимой частотной характеристикой $Q(\omega)$ замкнутой системы.

Для единичного возмущающего воздействия

$$h_z(t) = P_z(0) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q_z(\omega) \cos \omega t}{\omega} d\omega. \quad (10.107)$$

Следовательно, на основании выражений (10.104) ÷ (10.107) о качестве переходного процесса можно судить по частотным характеристикам замкнутой системы, если начальные условия нулевые и имеет место скачкообразное внешнее воздействие. Необходимо подчеркнуть, что при этом исследовании учитывается влияние нулей передаточной функции $W(p)$ замкнутой системы.

§ 10.8. Анализ качества переходного процесса по амплитудно-частотным характеристикам замкнутой системы

При анализе качества переходного процесса могут быть использованы амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) замкнутой системы. Если система неустойчива, то амплитуда колебаний на выходе системы достигнет бесконечно большой величины. В этом случае амплитудно-частотная характеристика замкнутой системы $A_z(p)$ терпит разрыв (рис. 10.8, а).

Амплитудная характеристика устойчивой замкнутой системы либо имеет пик, либо является убывающей функцией частоты в зависимости от соотношений параметров (кривые 1—4, рис. 10.8, а).

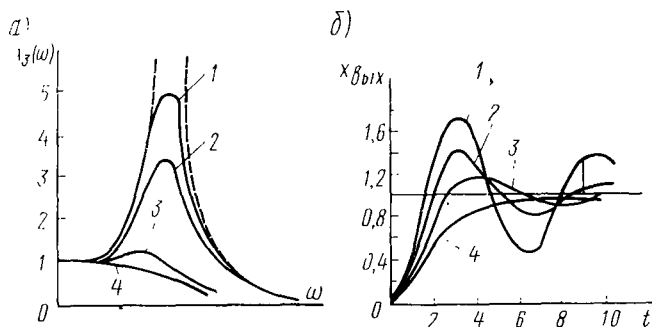


Рис. 10.8

Уменьшение пика характеризует снижение амплитуды и числа колебаний, совершаемых системой в переходном режиме. Если характеристика $A_z(\omega)$ имеет несколько пиков, то наибольшее влияние на переходный процесс оказывает первый пик при низкой частоте. На рис. 10.8, б показаны переходные характеристики автоматической системы при различных соотношениях параметров в соответствии с амплитудными характеристиками $A_z(\omega)$. Анализируя кривые, имеющие одинаковые номера, устанавливаем, что с уменьшением максимума $A_z(\omega)$ процесс затухает быстрее. При невозрастающей характе-

ристике (кривая 4) переходный процесс является монотонным без перерегулирований.

Следовательно, пик характеристики $A_3(\omega)$ может служить косвенной оценкой величины перерегулирования и колебательности процесса. При этом отношение максимума характеристики $A_3(\omega)$ к значению амплитуды при $\omega = 0$ называется *показателем колебательности* M . Обычно принимается, что при $\omega = 0$ значение амплитудной характеристики замкнутой системы $A(0) = 1$ (рис. 10.9). Тогда показатель колебательности определяется в относительных единицах.

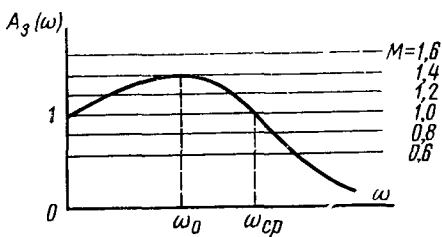


Рис. 10.9

Частота, при которой $A_3(\omega)$ имеет максимум, называется *собственной частотой* ω_0 .

Если характеристика $A_3(\omega)$ имеет пик, то точка пересечения кривой с линией $A(0)$ определяет частоту среза ω_{cp} замкнутой системы. Эта частота косвенным путем характеризует время

переходного процесса. Чем больше частота ω_{cp} , тем меньше время t_p . При этом время переходного процесса системы

$$t_p \approx \pi / \omega_{cp}. \quad (10.108)$$

Можно напомнить, что амплитудная характеристика безынерционного звена имеет вид линии, параллельной оси частот, в связи с чем $\omega_{cp} = \infty$, а $t_p = 0$.

По характеристике $A_3(\omega)$ можно определить также приближенные значения перерегулирования и периода колебаний, используя специальные выражения [Л. 20].

Для обеспечения малой колебательности и большого быстродействия системы желательно выбрать ее структуру и параметры так, чтобы амплитудная характеристика $A_3(\omega)$ имела малый пик и широкую полосу пропускания частот. Однако наличие в системе помех, частота которых обычно велика, делает нецелесообразным стремление к чрезмерному расширению полосы пропускания частот. По техническим требованиям величина M должна выбираться в пределах 1,2–1,5, а ω_{cp} находиться по заданному t_p .

Построение $A_3(\omega)$ по АФХ разомкнутой системы. При единичной обратной связи частотная функция замкнутой системы (для задающего воздействия)

$$W(j\omega) = K(j\omega) / [1 + K(j\omega)].$$

При этом амплитуда, характеризующаяся модулем частотной функции $W(j\omega)$,

$$A_3(\omega) = |W(j\omega)| = |K(j\omega)| / |1 + K(j\omega)|. \quad (10.109)$$

Следовательно, величина $A_3(\omega_i)$ при какой-либо частоте ω_i равна отношению длин двух векторов $K(j\omega_i)$ и $1 + K(j\omega_i)$, определяемых точкой АФХ разомкнутой системы, соответствующей частоте ω_i .

(рис. 10.10, а). На основании формулы (10.109) и графика на комплексной плоскости АФХ можно записать:

$$A_3(\omega_i) = OB/AB.$$

Находя это отношение для других точек АФХ (при других частотах), построим характеристику $A_3(\omega)$. По виду АФХ можно установить, что при малых частотах (точка B') значение $A_3(\omega) \approx 1$, а при больших частотах (точка B'') величина $A_3(\omega) \rightarrow 0$. Чем ближе АФХ расположена к критической точке $(-1; j0)$, тем больше значение $A_3(\omega)$ по сравнению с единицей; для случая прохождения АФХ через критическую точку отрезок $AB \rightarrow 0$, поэтому $A_3(\omega) = \infty$.

В идеальной системе $A_3(\omega) = 1$ для всех частот, а соответствующая этому АФХ имеет вид штрихпунктирной прямой 2 (рис. 10.10, б), проходящей параллельно мнимой оси через точку $-0,5$ на оси абсцисс.

Если АФХ проходит при некоторых частотах левее линии 2 (кривая 1), то кривая $A_3(\omega)$ имеет пик. В этом случае переходный процесс будет колебательным с переуправлением. Точка пересечения этой АФХ с линией 2 определяет частоту среза ω_{cp} .

Если АФХ не заходит левее линии 2, а при всех частотах находится справа от нее (кривая 3), то амплитудная характеристика $A_3(\omega)$ является убывающей функцией, а переходный процесс — монотонным.

Кривая АФХ позволяет построить также фазовую частотную характеристику замкнутой системы (см. рис. 10.10, а):

$$\begin{aligned} \varphi_t = \varphi_3(\omega) &= \arg |W(j\omega)| = \arg \left| \frac{K(j\omega)}{1 + K(j\omega)} \right| = \arg K(j\omega) - \\ &- \arg [1 + K(j\omega)] = \varphi(\omega) - \beta(\omega). \end{aligned} \quad (10.110)$$

Частота ω_0 , для которой $\varphi_3(\omega_0) = 90^\circ$, является резонансной и легко находится графически. Определяя $\varphi_3(\omega_i)$ при различных частотах ω_i непосредственно на графике АФХ как угол между лучами OB и AB , можно построить фазовую характеристику замкнутой системы $\varphi_3(\omega)$.

По длине вектора AB (см. рис. 10.10, а) можно получить также ошибку регулирования для гармонических сигналов различных частот:

$$\Delta X(\omega_i) = 1/[1 + K(j\omega_i)] = 1/(AB).$$

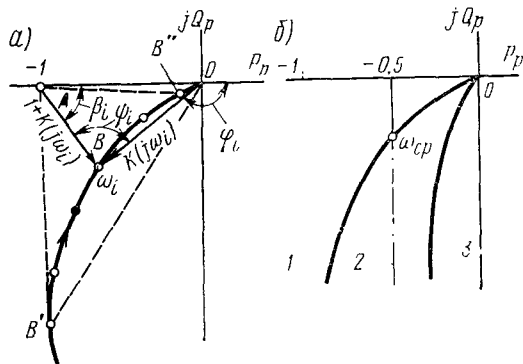


Рис. 10.10

Построение $A_3(\omega)$ по амплитудной круговой диаграмме и АФХ разомкнутой системы. Заменяя в (10.109) частотную функцию разомкнутой системы на сумму:

$$K(j\omega) = P_p(\omega) + jQ_p(\omega),$$

запишем выражение для амплитуды замкнутой системы

$$A_3(\omega) = |W(j\omega)| = \frac{\sqrt{P_p^2(\omega) + Q_p^2(\omega)}}{\sqrt{[1 + P_p(\omega)]^2 + Q_p^2(\omega)}},$$

или

$$A_3^2(\omega) = \frac{P_p^2(\omega) + Q_p^2(\omega)}{[1 + P_p(\omega)]^2 + Q_p^2(\omega)}. \quad (10.111)$$

Равенство (10.111) справедливо для любой точки $A_3(\omega)$, в том числе для точки, соответствующей максимуму (см. рис. 10.9). В этом случае при $A_3(0) = 1$ квадрат показателя колебательности

$$M^2 = \frac{P_p^2(\omega) + Q_p^2(\omega)}{[1 + P_p(\omega)]^2 + Q_p^2(\omega)}. \quad (10.112)$$

На основании (10.112) можно определить аналитическое выражение для линий равных значений M на комплексной плоскости АФХ разомкнутой системы:

$$\frac{M^2}{(1 - M^2)^2} = \left[P_p(\omega) - \frac{M^2}{1 - M^2} \right] + Q_p^2(\omega). \quad (10.113)$$

Выражение (10.113) представляет собой уравнение окружности, радиус которой

$$r = |M^2 / (1 - M^2)|. \quad (10.114)$$

При различных величинах M получим различные окружности. Семейство окружностей равных значений M , показанное на рис. 10.11, называется *амплитудной круговой диаграммой* замкнутой системы.

При $M = 1$ имеем прямую линию, слева от которой находится окружность при $M > 1$, а справа — при $M < 1$.

Поскольку $A_3(\omega)$, M и $K(j\omega)$ зависят от одних и тех же значений $P_p(\omega)$ и $Q_p(\omega)$, соответствующих какой-либо частоте, то амплитудная круговая диаграмма позволяет непосредственно по АФХ разомкнутой системы определить M и $\omega_{ср}$.

Чтобы получить показатель колебательности M и частоту

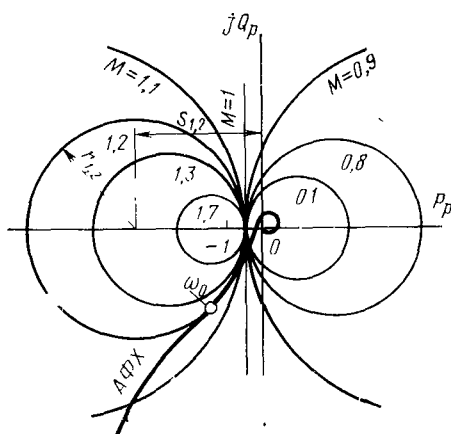


Рис. 10.11

среза $\omega_{ср}$, следует нанести АФХ на амплитудную круговую диаграмму и найти значение показателя M той окружности, которой коснулась АФХ разомкнутой системы ($M = 1,2$ на рис. 10.11).

Для $M = 1$ на круговой диаграмме получаем прямую линию, проходящую параллельно мнимой оси через абсциссу 0,5 (соответственно прямой 2 на рис. 10.10, б). Точка пересечения АФХ разомкнутой системы с линией $M = 1$ соответствует $\omega_{ср}$.

Точки пересечения АФХ с окружностями равных значений будут определять амплитуды замкнутой системы при соответствующих частотах, учитывая, что $A_3(0) = 1$. Следовательно, круговая диаграмма позволяет найти также $A_3(\omega)$.

На основании (10.110) может быть построена фазовая круговая диаграмма [Л. 34].

Используя обратную АФХ разомкнутой системы, можно получить обратную амплитудную круговую диаграмму. Амплитудные круговые диаграммы используются при выборе коэффициента усиления разомкнутой системы по заданному значению показателя колебательности M [Л. 34, 37].

Амплитудно-частотная характеристика замкнутой системы $A_3(\omega)$ может быть также построена на основании кривой D -разбиения по коэффициенту усиления системы [см. (10.129)].

§ 10.9. Оценка качества по вещественным частотным характеристикам замкнутой системы

Известно, что переходный процесс для скачкообразных внешних воздействий $X_{вх}$ и Z при нулевых начальных условиях зависит от вещественной частотной функции замкнутой системы [Л. 35]:

$$h(t) = \frac{x_{вых}(t)}{X_{вх}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega; \quad (10.115)$$

$$h_z(t) = \frac{x_{вых}(t)}{Z} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P_z(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (10.116)$$

Из этих выражений следует, что самые различные системы будут иметь одинаковый переходный процесс, если их вещественные характеристики одинаковы. Более детальное исследование позволяет высказать некоторые предварительные соображения о характере и особенностях переходного процесса без построения переходной характеристики, основанные на свойствах вещественных частотных характеристик [Л. 35].

Рассмотрим основные свойства вещественных частотных характеристик.

1. Свойство линейности. Если вещественная частотная характеристика $P(\omega)$ может быть представлена в виде суммы вещественных частотных характеристик $P_i(\omega)$, то переходная функция $h(t)$ также

может быть представлена в виде суммы соответствующих составляющих $h_i(t)$:

$$\left. \begin{aligned} P(\omega) &= \sum_{i=1}^n P_i(\omega); \\ h_i(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P_i(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega; \\ h(t) &= \sum_{i=1}^n h_i(t). \end{aligned} \right\} \quad (10.117)$$

2. Соответствие масштабов вдоль оси ординат для $P(\omega)$ и $h(t)$. Если изменить масштаб характеристики $P(\omega)$ вдоль оси ординат в n раз (кривые 1 и 2), то масштаб кривой $h(t)$ изменится соответственно в то же число раз (рис. 10.12, а), т. е. левую и правую части (10.115) и (10.116) можно умножить или разделить на одно и то же число.

3. Соответствие масштабов вдоль оси абсцисс для $P(\omega)$ и $h(t)$. Если увеличить (уменьшить) масштаб характеристики $P(\omega)$ по оси абсцисс в n раз, то масштаб кривой $h(t)$ по оси абсцисс соответственно уменьшится (увеличится) в то же число раз (рис. 10.12, б). Данное

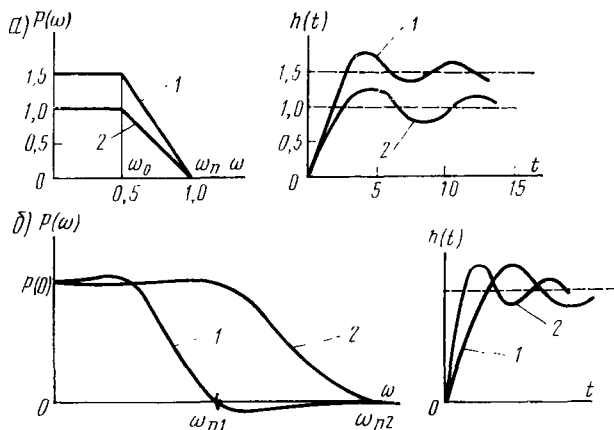


Рис. 10.12

свойство показывает, что чем «шире» вещественная частотная характеристика, тем быстрее протекает переходный процесс при прочих равных условиях. Для безынерционного звена, например, вещественная частотная характеристика представляет собой зону с бесконечной полосой пропускания, а переходный процесс протекает мгновенно.

Интервал частот, в котором значение $P(\omega)$ положительно, называется *интервалом положительности*; крайняя частота этого интервала обозначается через ω_n . Интервал частот, в котором $|P(\omega)| \geq 0,1 P(0)$, называется *интервалом существенных частот* и при $P(\omega) = \text{const} \approx P(0)$ называется *интервалом равномерного пропуска-*

ния частот; крайняя точка интервала обозначается через ω_0 (рис. 10.12, а).

4. Соответствие конечного значения переходной функции начальному значению частотной функции. Используя теорему операторного метода Лапласа о конечном значении переходной функции, можно получить

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{\omega \rightarrow 0} P(\omega) \text{ или } h(\infty) = P(0). \quad (10.118)$$

Это свойство пояснено на рис. 10.13, а, где кривые 1 соответствуют статической, а кривые 2 — астатической системе.

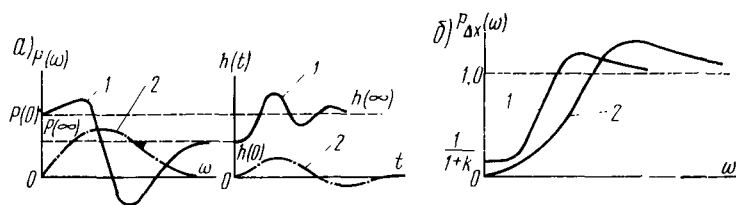


Рис. 10.13

5. Соответствие начального значения переходной функции конечному значению частотной функции. Аналогично предыдущему, если использовать теорему операторного метода Лапласа о начальном значении переходной функции, можно получить

$$\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} P(\omega) \text{ или } h(0) = P(\infty). \quad (10.119)$$

Во всех случаях, когда порядок числителя в выражении $W(j\omega)$ меньше порядка знаменателя, величина $P(\infty) = 0$, поэтому переходный процесс начинается из начала координат. Если же порядок числителя $W(j\omega)$ равен порядку знаменателя, то величина $P(\infty) \neq 0$ и начальное значение функции $h(t)$ отлично от нуля (кривые 1 на рис. 10.13, а). Для передаточной функции замкнутой системы относительно ошибки $W_{\Delta x}(p)$ при задающем воздействии порядок числителя равен порядку знаменателя, поэтому $P_{\Delta x}(\infty) = 1$ (рис. 10.13, б); начальное значение $P_{\Delta x}(0)$ для астатической системы равно нулю, а для статической определяется отношением

$$W_{\Delta x}(0) = P(0) = \frac{1}{1+K}.$$

6. Связь между устойчивостью и непрерывностью вещественной частотной характеристики. Если при некотором значении частоты характеристика $P(\omega)$ имеет разрыв непрерывности и обращается в бесконечность (рис. 10.14, а, кривая 1), то это означает, что система находится на границе устойчивости и в ней происходят незатухающие колебания с частотой ω_i . Если $P(\omega)$ обращается в бесконечность при $\omega = 0$ (кривая 2), то система также находится на границе устойчивости, но является нейтрально устойчивой (без колебаний). Таким образом,

наличие пиков в характеристике $P(\omega)$ свидетельствует о склонности системы к колебаниям.

7. Возможность существования малых перерегулирований. Для того чтобы при единичном воздействии величина перерегулирования σ

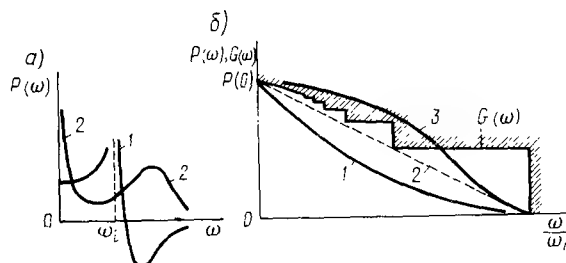


Рис. 10.14

не превышала 18%, $P(\omega)$ должна представлять собой положительную невозрастающую функцию частоты (кривая 3 на рис. 10.14, б):

$$P(\omega) > 0; \frac{dP(\omega)}{d\omega} \leq 0.$$

8. Монотонность переходного процесса. Для того чтобы переходный процесс протекал монотонно, $P(\omega)$ должна быть положительной функцией частоты с отрицательной и убывающей по абсолютной величине производной

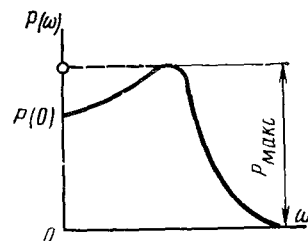


Рис. 10.15

$$P(\omega) > 0; \frac{dP(\omega)}{d\omega} < 0.$$

При этом необходимо соблюдение неравенства

$$P(\omega) < P(0) \cdot G(\omega),$$

где

$$G(\omega) = \cos \frac{\pi}{1 + \omega_n/\omega}.$$

Это условие графически представлено в виде ступенчатой границы, выше которой не должна заходить кривая $P(\omega)$ для монотонного процесса (см. рис. 10.14, б). Кривая 3 расположена выше границы $G(\omega)$, поэтому она не удовлетворяет условию монотонности. Кривые 1 и 2 соответствуют монотонным переходным процессам.

9. Зависимость наибольшего перерегулирования от максимума вещественной частотной характеристики. Если $P(\omega)$ имеет максимум (рис. 10.15), то максимальное $P_{\max}$ и начальное $P(0)$ значения будут определять величину максимально возможного в данном случае перерегулирования:

$$\sigma_{\max} < \frac{1,18 P_{\max} - P(0)}{P(0)}.$$

10. Возможность приближенного определения величины перерегулирования. Для этой цели можно использовать график, учитывающий величину коэффициента наклона κ , если действительную невозрастающую кривую $P(\omega)$ можно заменить эквивалентной трапецией (рис. 10.16, а). По значению $\kappa = \omega_0/\omega_n$ определяется величина $\sigma\%$ (рис. 10.16, б) только для характеристик $P(\omega) \leq P(0)$. Если характеристика $P(\omega)$ имеет максимум, то величина перерегулирования находится из рис. 10.16, в.

11. Возможность оценки времени переходного процесса. В случае невозрастающей непрерывной вещественной частотной характеристики

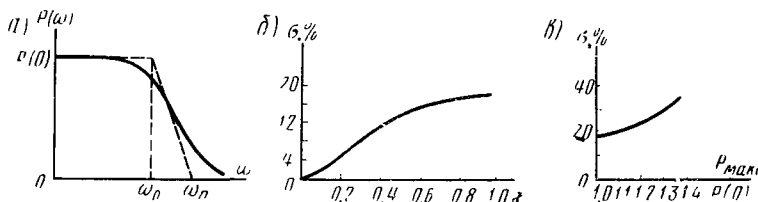


Рис. 10.16

ки $P(\omega)$, которая приближенно может быть заменена трапецией (см. рис. 10.16, а), время переходного процесса заключено в пределах

$$\frac{\pi}{\omega_n} < t_p < \frac{4\pi}{\omega_n}.$$

4. Для приближенной оценки времени переходного процесса может быть использован коэффициент наклона κ и специальный график (рис. 10.17, а).

Если вещественная частотная характеристика имеет максимум, то приближенное значение времени регулирования определяется в зависимости от отношения $P_{\max}/P(0)$ по специальному графику (рис. 10.17, б).

Время регулирования в этом случае заключено в пределах

$$\frac{3\pi}{\omega_n} < t_p < \frac{8\pi}{\omega_n}.$$

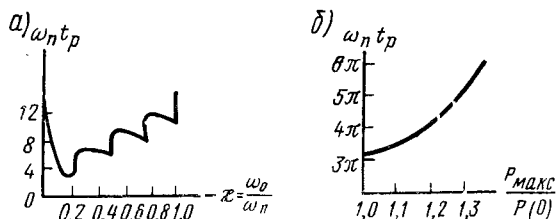


Рис. 10.17

На основании вышеуказанных свойств можно приближенно оценивать качество переходного процесса в замкнутой автоматической системе по виду ее вещественной частотной характеристики относительно единичных воздействий при нулевых начальных условиях.

Построение вещественной частотной характеристики по АФХ разомкнутой системы. Вещественная (мнимая) круговая диаграмма. Рассматривая аналитические выражения для вещественной частотной

функции замкнутой системы и для частотной функции разомкнутой системы, можно установить зависимость между ними. С этой целью на графике АФХ разомкнутой системы наносят сетку кривых одинаковых значений $P(\omega)$, называемую *вещественной круговой диаграммой*. Аналитическое выражение для линий равных значений вещественной частотной функции получим из выражения частотной функции замкнутой системы для задающего воздействия:

$$W(j\omega) = \frac{P_p(\omega) + jQ_p(\omega)}{[1 + P_p(\omega)] + jQ_p(\omega)}. \quad (10.120)$$

Определим в (10.120) вещественную $P(\omega)$ и мнимую $Q(\omega)$ части:

$$\left. \begin{aligned} P(\omega) &= \frac{P_p^2(\omega) + P_p(\omega) + Q_p^2(\omega)}{[1 + P_p(\omega)]^2 + Q_p^2(\omega)}; \\ Q(\omega) &= \frac{Q_p(\omega)}{[1 + P_p(\omega)]^2 + Q_p^2(\omega)}. \end{aligned} \right\} \quad (10.121)$$

В общем случае характеристики $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ иногда рассчитываются аналитически по (10.121). Если рассматривать возмущающее воз-

действие, то также можно рассчитать и построить характеристики $P_z(\omega)$ или $Q_z(\omega)$.

Положив в первом уравнении (10.121) значения $P(\omega) = P_c = \text{const}$, после некоторых аналитических преобразований получим выражение

$$\left[P_p(\omega) + \frac{1 - 2P_c}{2(1 - P_c)} \right]^2 + Q_p^2(\omega) = \frac{1}{4(1 - P_c)^2}, \quad (10.122)$$

являющееся уравнением окружности с радиусом R_p и центром, расположенным на вещественной оси на расстоя-

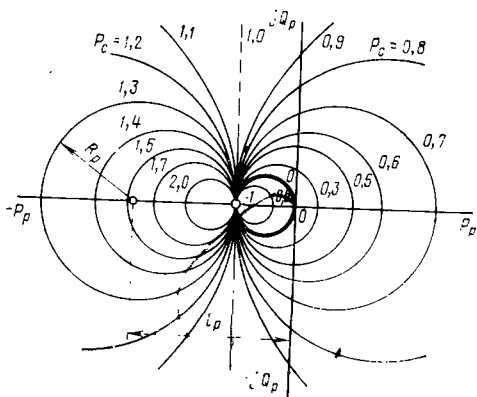


Рис. 10.18

нии l_p от начала координат (рис. 10.18). На основании (10.122) построено семейство окружностей (вещественная круговая диаграмма) для различных значений P_c . Все окружности касаются линии, проходящей вертикально через точку -1 на оси абсцисс, так как всегда сохраняется соотношение

$$l_p - R_p = -\frac{1 - 2P_c}{2(1 - P_c)} - \frac{1}{2(1 - P_c)} = -1.$$

Окружность для $P_c = 0$ проходит через начало координат и точку -1 на оси абсцисс (жирная линия на рис. 10.18); внутри нее заключаются окружности, соответствующие $P_c < 0$. При $P_c \rightarrow \pm \infty$ окружности вырождаются в точку -1 на оси абсцисс.

Чтобы графически получить характеристики $P(\omega)$, на вещественную круговую диаграмму надо нанести АФХ разомкнутой системы. Точки пересечения АФХ с окружностями P_c будут определять ординаты вещественной характеристики $P(\omega)$ при частотах, соответствующих точкам пересечения.

Аналогично может быть построена мнимая круговая диаграмма линий равных значений Q_c (рис. 10.19), аналитическое выражение которых имеет вид

$$[1 + P_p(\omega)]^2 + \left[Q_p(\omega) - \frac{1}{2Q_c} \right]^2 = \frac{1}{4Q_c^2}.$$

Мнимая круговая диаграмма также позволяет по точкам пересечения с АФХ разомкнутой системы, построенной на этом же графике, определить мнимую частотную характеристику $Q(\omega)$ замкнутой системы.

Если рассматривается обратная АФХ разомкнутой системы, то также можно получить уравнения для линий равных значений P_c и Q_c на плоскости обратной АФХ разомкнутой системы. При этом тоже будут получены окружности [Л. 35]. Для вещественной круговой диаграммы при обратных АФХ значения P_c для каждой окружности пересчитываются в соответствии с выражением $(1 - P_c)$, а для мнимой круговой диаграммы изменяется только знак у числа, соответствующего Q_c .

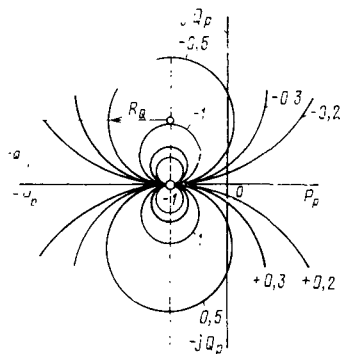


Рис. 10.19

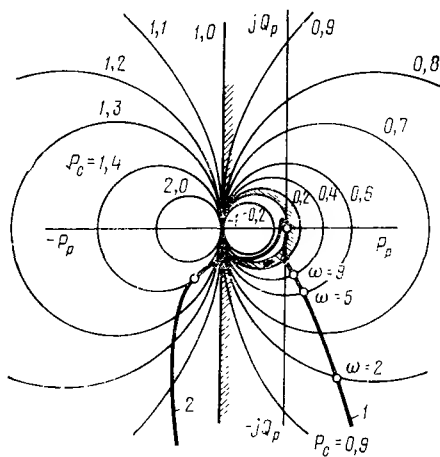


Рис. 10.20

Указанные круговые диаграммы соответствуют только задающему воздействию на входе системы при единичной главной обратной связи.

Свойства вещественной круговой диаграммы, построенной на плоскости АФХ. Совместное рассмотрение АФХ разомкнутой системы и вещественной круговой диаграммы при учете свойств характеристики $P(\omega)$ и АФХ позволяет оценить качество переходного процесса непосредственно по круговой диаграмме и АФХ (рис. 10.20). Укажем основные признаки, необходимые для такой оценки [Л. 35].

1. Если АФХ не выходит из области, ограниченной слева вертикальной прямой, проходящей через точку $(-1; j0)$; на оси абсцисс, и окружностью $P_c = 0$, и только по одному разу пересекает окружности круговой диаграммы, то перерегулирование не превышает 18%.

2. Если АФХ удовлетворяет предыдущему условию и при возрастании частоты последовательно пересекает окружности с убывающими значениями P_c (кривая 1 на рис. 10.20), то перерегулирование в системе отсутствует, а процесс является монотонным.

3. Если при возрастании частоты любая АФХ впервые пересекает окружность при $P_c = 0$, то соответствующая частота равна ω_n (граница интервала положительности), а время переходного процесса определяется неравенством $t_p \omega_n > \pi$.

4. Если при возрастании частоты АФХ пересекает окружности вещественной круговой диаграммы с непрерывно возрастающими значениями P_c до тех пор, пока она не коснется некоторой окружности с $P_{c \text{ макс}}$, а затем, при дальнейшем возрастании частоты, пересекает окружности P_c с убывающими значениями P_c (кривая 2 на рис. 10.20), то перерегулирование удовлетворяет неравенству

$$\sigma \% < (1,18 P_{c \text{ макс}} - 1) 100\%.$$

Определение $P(\omega)$ по логарифмическим частотным характеристикам разомкнутой системы. Если динамика системы рассчитывается по логарифмическим характеристикам, то так же, как было указано выше, можно построить соответствующие диаграммы с линиями равных значений P_c (или Q_c) на плоскости логарифмической АФХ разомкнутой системы [Л. 35] и определить вещественную или мнимую частотные характеристики замкнутой системы.

Если частотную функцию разомкнутой системы представить в виде

$$K(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = A(\omega) \cos \varphi(\omega) + jA(\omega) \sin \varphi(\omega),$$

то для замкнутой системы относительно задающего воздействия получим

$$W(j\omega) = \frac{K(j\omega)}{1 + K(j\omega)} = \frac{A(\omega) \cos \varphi(\omega) + jA(\omega) \sin \varphi(\omega)}{1 + A(\omega) \cos \varphi(\omega) + jA(\omega) \sin \varphi(\omega)}. \quad (10.123)$$

Геометрическое место точек для линий равных значений $P_c = \text{const}$ и $Q_c = \text{const}$ на основании (10.123) будет определяться уравнениями:

$$P_c = \frac{A^2(\omega) + A(\omega) \cos \varphi(\omega)}{A^2(\omega) + 2A(\omega) \cos \varphi(\omega) + 1}; \quad (10.124)$$

$$Q_c = \frac{A(\omega) \sin \varphi(\omega)}{A^2(\omega) + 2A(\omega) \cos \varphi(\omega) + 1}. \quad (10.125)$$

По этим уравнениям соответственно построены номограммы (рис. 10.21, а и б), позволяющие находить вещественную или мнимую частотные характеристики замкнутой системы.

Если по известным ЛАХ и ЛФХ (для точек одинаковых частот) построить логарифмическую амплитудно-фазовую частотную характеристику разомкнутой системы, указывая на ней частоты, то точки

пересечения этой АФХ с кривыми номограммы позволяет определить вещественную (или мнимую) частотную характеристику замкнутой системы. На рис. 10.21 представлены диаграммы только для отрицательных фазовых углов до -180° , так как для углов от -180° до -360° кривые будут являться зеркальным отображением указанных относительно оси ординат.

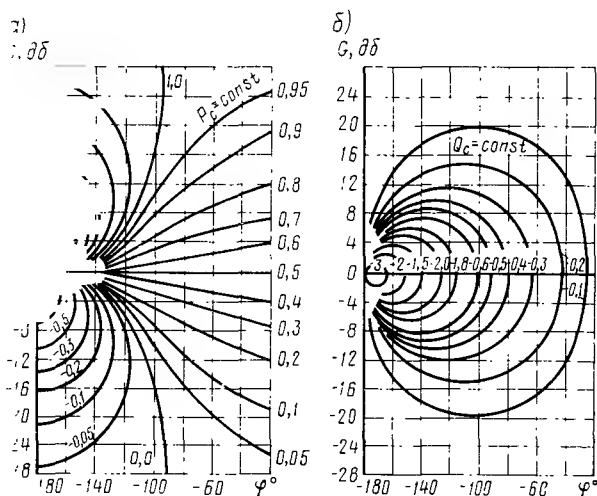


Рис. 10.21

построение вещественной частотной характеристики $P(\omega)$ по кривой D -разбиения для коэффициента усиления системы. Рассмотрим частотную функцию замкнутой системы:

$$W(j\omega) = K(j\omega) / [1 + K(j\omega)]. \quad (10.126)$$

Выделив в выражении $K(j\omega)$ коэффициент K и произведя преобразования, получим

$$W(j\omega) = \frac{K}{1/K(j\omega) + 1}. \quad (10.127)$$

Так как знаменатель (10.127) представляет собой характеристическое уравнение замкнутой системы, то уравнение кривой D -разбиения относительно коэффициента усиления можно записать как

$$1 + K K(j\omega) = 0, \quad (10.128)$$

или

$$K = -1/K(j\omega).$$

Кривая границы D -разбиения представлена на рис. 10.22, где вектор, определяемый (10.128) при частоте ω_i , равен отрезку OC . Если точка B соответствует заданному значению коэффициента усиления системы K , то знаменатель (10.127) будет представлен вектором CB .

Следовательно, частное от деления отрезков OB - K и CB будет представлять собой амплитуду частотной функции замкнутой системы

$$A_a(\omega_i) = |W(j\omega)| = OB/CB. \quad (10.129)$$

Выражение (10.129) позволяет построить амплитудную частотную характеристику замкнутой системы по кривой D -разбиения для коэффициентов усиления системы.

Аргумент частотной функции замкнутой системы для частоты ω_i на основании (10.127) будет равен углу OBC :

$$\psi_i = \varphi_a(\omega_i) = \arg K - \arg \left| \frac{1}{K(j\omega)} + K \right| = 0^\circ - \beta^\circ(\omega_i) = -\beta^\circ(\omega_i).$$

Если из точки O опустить перпендикуляр на луч CB , то отрезок BD позволит найти значение вещественной частотной функции при данной частоте:

$$P(\omega_i) = |W(j\omega)| \cos \varphi_{ai} = A_a(\omega_i) \cos \varphi_{ai},$$

где

$$\cos \varphi_{ai} = BD/OB,$$

или с учетом (10.129) получим

$$P(\omega_i) = (OB/CB) \cdot (BD/OB) = BD/CB. \quad (10.130)$$

На основании (10.130) можно построить $P(\omega)$.

Аналогично находится выражение для мнимой частотной функции в виде отношения отрезков:

$$Q(\omega_i) = -OD/CB. \quad (10.131)$$

Рассматривая вместо (10.126) частотную функцию замкнутой системы относительно ошибки для задающего воздействия, можно доказать [Л. 25], что вещественная частотная функция для ошибки будет определяться отношением отрезков DC и CB :

$$P_{\Delta x}(\omega_i) = DC/CB. \quad (10.132)$$

Графический способ можно применить и для построения характеристики $P(\omega)$ по кривой D -разбиения относительно любого параметра [Л. 25].

Используя полученные результаты, устанавливающие связь между кривой D -разбиения и характеристикой $P(\omega)$, а также свойства вещественных частотных характеристик, можно косвенно оценить качество переходного процесса [Л. 25].

§ 10.10. Оценка качества переходного процесса по логарифмическим частотным характеристикам разомкнутой системы

Используя свойства вещественной круговой диаграммы, построенной на плоскости АФХ разомкнутой системы, можно по виду АФХ косвенно оценивать качество переходного процесса.

Целесообразно рассмотреть основные свойства ЛАХ, также позволяющие косвенно оценить качество переходного процесса.

Для получения основных выводов, характеризующих свойства ЛАХ и используемых в последующем анализе качества и расчетах параметров корректирующих устройств, рассмотрим для примера связь между переходными характеристиками и ЛАХ для систем первого и второго порядка.

Пример 10.3. Система состоит из интегрирующего звена, охваченного жесткой отрицательной обратной связью (рис. 10.23, а). Элементарная замкнутая система в этом случае представляет собой инерционное звено первого порядка. Разомкнув обратную связь, являющуюся в этом случае главной для элементарной замкнутой системы, можно построить ЛАХ разомкнутой системы:

$$G = 20 \lg |K(j\omega)| = 20 \lg K - 20 \lg \omega. \quad (10.133)$$

При $\omega = 1$ значение $G = 20 \lg K$, а при $\omega = K = \omega_{ср}$ получаем $G = 0$, что показано на рис. 10.23, б.

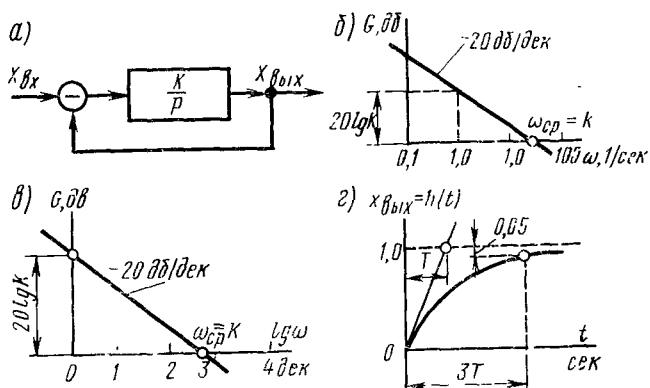


Рис. 10.23

Если по оси абсцисс откладывается логарифм частоты при начальной частоте, равной единице, то ЛАХ интегрирующего звена будет пересекать ось ординат на высоте $20 \lg K$ (рис. 10.23, в). В данном случае для точки пересечения ЛАХ с осью частот

$$20 \lg K = 20 \lg \omega_{ср}, \text{ или } \omega_{ср} = K. \quad (10.134)$$

Следовательно, передаточная функция замкнутой системы с одним интегрирующим звеном представляет собой передаточную функцию инерционного звена первого порядка

$$W(p) = -K(p)[1 + K(p)]^{-1} = (1 + Tp)^{-1}, \quad (10.135)$$

где

$$K(p) = K/p; \quad T = 1/K = 1/\omega_{ср}.$$

Переходная характеристика элементарной замкнутой системы для единичного входного воздействия на основании (10.135) определяется переходной характеристикой инерционного звена в виде экспоненты (рис. 10.23, г). Время переходного процесса для экспоненциальной кривой обычно принимается равным $3T$, поэтому время процесса для замкнутой системы

$$t_p = 3T = 3/\omega_{\text{ср}}. \quad (10.136)$$

На основании (10.136) заключаем, что время переходного процесса замкнутой системы первого порядка определяется частотой среза $\omega_{\text{ср}}$ разомкнутой системы. Система в данном случае является минимально-фазовой, поэтому фаза не превышает $\pi/2$.

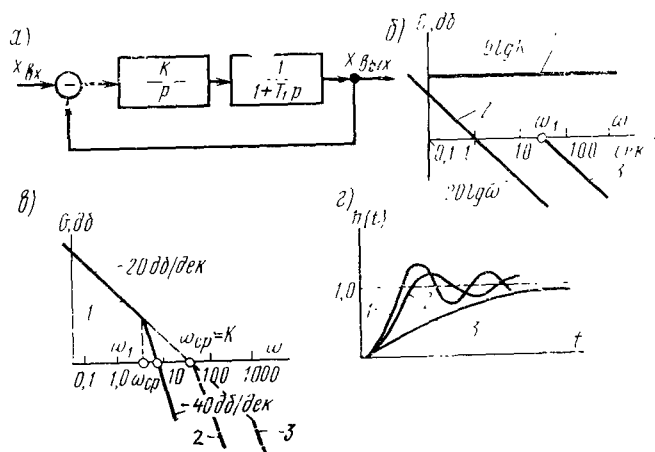


Рис. 10.24

Пример 10.4. Для системы второго порядка, содержащей интегрирующее и инерционное звенья (рис. 10.24, а), передаточная функция разомкнутой системы

$$K(p) = K/[p(1+T_1p)]. \quad (10.137)$$

На рис. 10.24, б показаны ЛАХ соответственно (10.137) для случая логарифмической сетки по оси частот:

$$G = 20 \lg K - 20 \lg \omega - 20 \lg (1 + \omega^2 T_1^2)^{1/2}. \quad (10.138)$$

Здесь имеются три составляющие — безынерционного 1, простейшего интегрирующего 2 и простейшего инерционного 3 звеньев. При различном соотношении параметров звеньев результирующая ЛАХ разомкнутой системы будет иметь различный вид (характеристики 1, 2 и 3 на рис. 10.24, б) с учетом значений

$$1/T_1 = \omega_1; \quad \omega_{\text{ср}} = K \text{ (для 2 и 3)}.$$

С учетом (10.137) передаточная функция элементарной замкнутой системы второго порядка

$$W(p) = \frac{K(p)}{1+K(p)} = \frac{K}{p(1+T_1p)+K} = \frac{1}{TT_1 p^2 + Tp + 1}, \quad (10.139)$$

где $T = 1/K$ — постоянная времени.

Передачная функция (10.139) может быть выражена через коэффициент демпфирования ρ и через собственную частоту колебаний ω_0 [см. гл. 6]:

$$W(p) = \frac{1}{TT_1 p^2 + T\rho + 1} = \frac{\omega_0^2}{p^2 + 2\rho\omega_0 p + \omega_0^2}, \quad (10.140)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{TT_1}} = \sqrt{\frac{K}{T_1}} = \sqrt{\omega_1 \omega_{\text{ср}}}; \\ \rho &= \frac{T}{2\sqrt{TT_1}} = 0,5 \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_{\text{ср}}}} = \frac{0,5}{\sqrt{T_1 K}}. \end{aligned} \right\} \quad (10.141)$$

Чем меньше T_1 (больше ω_1), тем больше значение коэффициента демпфирования ρ , что соответствует различным переходным процессам колебательного звена, являющегося эквивалентным рассматриваемой элементарной замкнутой системе второго порядка. Для различных соотношений частот ω_1 и $\omega_{\text{ср}}$ соответственно виду ЛАХ (см. рис. 10.24, в), переходные характеристики замкнутой системы при $x_{\text{вх}} = 1(t)$ представлены на рис. 10.24, г. В случае $T_1 \rightarrow 0$ ($\omega_1 = \infty$) вместо (10.139) получим выражение, аналогичное (10.135), когда переходный процесс в системе является аperiodическим.

Практически установлено, что если $\omega_1 \geq 2\omega_{\text{ср}}$, то переходный процесс замкнутой системы второго порядка будет без перерегулирования, а его время может приближенно определяться равенством (10.136).

Таким образом, анализируя вид ЛАХ разомкнутой системы второго порядка (см. рис. 10.24, в), заключаем, что для исключения колебательности при единичном входном воздействии необходимо, чтобы частота среза $\omega_{\text{ср}}$ соответствовала участку ЛАХ разомкнутой системы с наклоном -20 дб/дек .

В результате исследования автоматических систем с различным видом ЛАХ установлено, что колебательность переходного процесса будет наименьшей, если частота среза $\omega_{\text{ср}}$ разомкнутой системы находится на участке ЛАХ с наклоном -20 дб/дек . Следовательно, второй основной вывод распространяется также на системы, порядок которых выше второго. Для систем высокого порядка при этом время переходного процесса определяется неравенством

$$t_p \geq \pi / \omega_{\text{ср}}. \quad (10.142)$$

Чем шире участок ЛАХ с наклоном -20 дб/дек , пересекающий ось абсцисс, тем ближе переходная характеристика к экспоненте и тем меньше время t_p . Этот участок следует выбирать при расчете параметров системы в соответствии с заданными показателями качества.

В общем случае ЛАХ разомкнутой системы имеет произвольный вид. Однако, как показали исследования [Л. 15, 35], вид участка ЛАХ

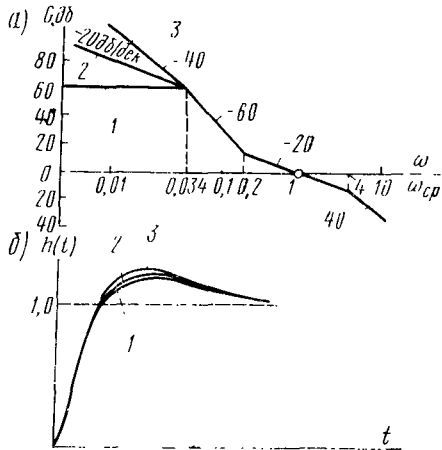


Рис. 10.25

при низких частотах мало влияет на характер переходного процесса. На рис. 10.25, а показаны ЛАХ системы с различным наклоном (1, 2 и 3) при низких частотах, которым соответствуют переходные характеристики (рис. 10.25, б) при единичном входном воздействии. Следовательно, при оценке переходного процесса по ЛАХ разомкнутой системы низкочастотный участок можно не учитывать*. Аналогичный вывод можно получить относительно участка ЛАХ, соответствующего высоким частотам.

Для астатических систем с астатизмом первого порядка

добротность равна коэффициенту усиления, поэтому точка пересечения начальной линии ЛАХ (или ее продолжения) с осью ординат, когда частота откладывается в логарифмическом масштабе или с вертикалью, проходящей через абсциссу $\omega = 1$, определяет добротность следящей системы.

Вопросы для самопроверки

1. В чем состоит особенность исследования качества процесса управления по сравнению с исследованием устойчивости?
2. Назовите основные показатели качества и сформулируйте требования, предъявляемые к качеству процесса управления.
3. Приведите классификацию типовых внешних воздействий.
4. Какие методы могут быть использованы для определения качества процесса управления?
5. В чем состоит особенность косвенной оценки показателей качества?
6. Как определить точность управления и коэффициенты ошибок? Чем характеризуется добротность астатических систем?
7. В каких случаях справедлива оценка качества переходного процесса по степени устойчивости и колебательности и в чем сущность этого метода?
8. Какие типы интегральных оценок используются при аperiodических и колебательных процессах?
9. Какова аналитическая связь между переходной характеристикой и частотными характеристиками?
10. Как оценить качество с помощью амплитудной и вещественной круговых диаграмм?
11. Каковы свойства вещественной частотной характеристики и как ее построить?
12. Назовите основные свойства ЛАХ и их связь с переходным процессом.
13. Как производится оценка качества по кривой переходного процесса?
14. Как определить показатель колебательности по кривой переходного процесса, по колебательной степени устойчивости, по ЛЧХ замкнутой системы?

* Низкочастотный участок ЛАХ характеризует ошибку автоматических систем.

ОБЕСПЕЧЕНИЕ ЗАДАННОГО КАЧЕСТВА ПРОЦЕССА УПРАВЛЕНИЯ

Если автоматическая система не удовлетворяет условиям заданного качества процесса управления, надо ввести дополнительные корректирующие устройства, позволяющие изменять вид частотных характеристик, расположение нулей и полюсов и т. д.

Для получения высоких данных качества процесса управления необходимо рационально выбрать схему и параметры корректирующих устройств. В настоящее время существует несколько методов расчета параметров корректирующих устройств: частотный, корневого годографа, стандартных передаточных функций и нормированных переходных характеристик и др.

Выбор схемы и расчет параметров корректирующих устройств в общем случае относятся к задаче синтеза автоматических систем.

§ 11.1. Повышение точности управления

В гл. 10 была получена зависимость ошибки управления от параметров системы и от характера внешнего воздействия, представленная в виде ряда коэффициентов ошибок. Для повышения точности управления необходимо уменьшать значения коэффициентов ошибок; это может быть достигнуто в результате использования положительных обратных связей и введения интеграла в закон управления.

Коррекция входного переменного сигнала. В тех случаях, когда переменный входной сигнал имеет малый уровень помех, точность его воспроизведения может быть повышена введением дополнительного форсирующего* звена $K_f(p)$ на входе системы (рис. 11.1). В качестве форсирующих применяются дифференцирующие звенья.

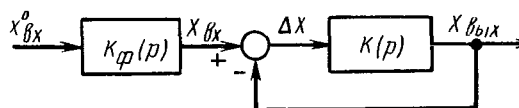


Рис. 11.1

Использование форсирующего звена на входе позволяет уменьшить ошибку управления, что подобно введению интегрирующего звена в замкнутый контур. При таком косвенном повышении астатизма не ухудшаются условия устойчивости и не требуются стабилизирующие устройства.

Использование в качестве форсирующего звена идеального дифференцирующего звена первого порядка подобно в отношении ошибки увеличению астатизма замкнутой системы на один порядок. Если применено дифференцирующее звено второго порядка, то это эквивалентно повышению астатизма на два порядка.

* Звено $K_f(p)$ называют также входным фильтром.

Ошибка при наличии форсирующего звена (см. рис. 11.1):

$$\Delta X^0(p) = X_{\text{вх}}^0(p) - X_{\text{вых}}(p) = X_{\text{вх}}^0(p) - \frac{K_{\text{ф}}(p) K(p)}{1 + K(p)} X_{\text{вх}}^0(p) =$$

$$= \frac{1 + K(p) [1 - K_{\text{ф}}(p)]}{1 + K(p)} X_{\text{вх}}^0(p).$$

При наличии форсирующего звена передаточная функция системы относительно условной ошибки Δx :

$$K_{\Delta x}^0(p) = \frac{\Delta X^0(p)}{X_{\text{вх}}^0(p)} = \frac{1 + K(p) [1 - K_{\text{ф}}(p)]}{1 + K(p)}. \quad (11.1)$$

Выбирая параметры системы, можно обеспечить наличие сигнала $\Delta x(t)$, пропорционального заданной производной от входного сигнала $x_{\text{вх}}^0(t)$. При этом за счет действия сигнала $x_{\text{вх}}(t) - x_{\text{вых}}(t) = \Delta x(t)$ ошибка $\Delta x^0(t) = x_{\text{вх}}^0(t) - x_{\text{вых}}(t) = 0$, что эквивалентно соответствующему астатизму системы. Звено $K_{\text{ф}}(p)$ не входит в характеристическое уравнение замкнутой системы и повышение точности при данном способе не влияет на условия устойчивости.

Если, например, в (11.1) передаточные функции имеют вид

$$K(p) = \frac{K}{p(a_0 p^2 + a_1 p + 1)}; \quad (11.2)$$

$$K_{\text{ф}}(p) = (T_1 p + 1)(T_2 p + 1)^{-1}, \quad (11.2a)$$

где $T_1 > T_2$, то после преобразований получим

$$K_{\Delta x}^0(p) = \frac{(a_0 p^2 + a_1 p^2 + 1) (T_2 p + 1) - K (T_1 - T_2) p}{(a_0 p^3 + a_1 p^2 + p + K) (T_2 p + 1)}. \quad (11.3)$$

Выбрав $K(T_1 - T_2) = 1$, можно в числителе (11.3) вынести за скобки p^2 , что эквивалентно наличию в (11.2) астатизма второго

порядка. Следовательно, введение звена с передаточной функцией $K_{\text{ф}}(p)$ оказалось эквивалентным включению интегрирующего звена и повышению порядка астатизма системы на единицу.

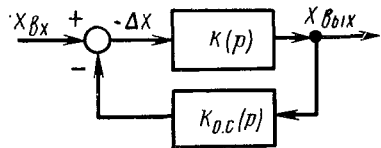


Рис. 11.2

Применение неединичных главных обратных связей.

Неединичные обратные связи используются для уменьшения ошибки, вызванной управляющим воздействием в автоматической системе. Вместо фильтра $K_{\text{ф}}(p)$ можно применить главную обратную связь с передаточной функцией $K_{\text{о.с}}(p) \neq 1$ (рис. 11.2), выполняющую также функции корректирующего устройства.

В этом случае передаточная функция замкнутой системы

$$W(p) = \frac{K(p)}{1 + K_{\text{о.с}}(p) K(p)}. \quad (11.4)$$

Для того чтобы сигнал $x_{\text{вх}}(t)$ воспроизводился без ошибки, необходимо обеспечить условие $W(p) \rightarrow 1$. При этом

$$K_{0.c}(p) \rightarrow 1 \rightarrow K^{-1}(p). \quad (11.5)$$

После разложения (11.5) в степенной ряд получим

$$K_{0.c}(p) \rightarrow k_{0.c} = (T_{0.c1} p + T_{0.c2} p^2 + T_{0.c3} p^3 + \dots). \quad (11.6)$$

Следовательно, для исключения ошибки относительно задающего сигнала необходимо использовать главную обратную связь с коэффициентом $k_{0.c}$ (для астатических систем $k_{0.c} = 1$) и дополнительно ввести сигналы по производным от выходной переменной системы. Однако из-за трудности получения высших производных и обеспечения устойчивости неединичную обратную связь выполняют несколько проще, чем указано. Если, например, для статической системы выбрать $K_{0.c}(p) = 1 - 1/K$, то получим подобно астатической системе при $K(0) = K$ значение $x_{\text{вых}} = x_{\text{вх}}$.

Компенсация возмущающего воздействия (обеспечение инвариантности). Попытки устранить влияние возмущающих воздействий, предпринимаемые в замкнутой системе на базе измерения отклонения выходной переменной, обязательно связаны с трудностями обеспечения устойчивости системы и надлежащего качества переходных процессов из-за необходимости увеличения коэффициента усиления системы. В связи с этим, кроме принципа управления по отклонению, следует применить принцип управления по возмущению. В этом случае системы управления называются *комбинированными*. Их можно построить, если возмущение $f(t)$ доступно измерению. Сигнал $f(t)$ через устройство с передаточной функцией $K_f(p)$ подается на вход регулятора (или другого элемента).

Одно из направлений теории автоматического управления связано с отысканием принципов построения автоматических систем, предусматривающих полную или частичную компенсацию внешних возмущений. В математической трактовке этот принцип называется *принципом инвариантности*, или независимости управляемых переменных от внешних возмущений. Автоматические системы, в которых осуществлен принцип инвариантности и управляемая переменная не зависит от действующих на систему возмущений, называются *инвариантными автоматическими системами*.

Основное значение вопросы инвариантности имеют для систем стабилизации заданной величины выходной переменной.

Большую роль в развитии теории инвариантности и ее практическом применении сыграли первоначальные работы Г. В. Шипанова и академиков Н. Н. Лузина, В. С. Кулебакина, Б. Н. Петрова, А. Ю. Ишлинского и других советских ученых.

Операторное уравнение для отклонений выходной переменной замкнутой системы относительно возмущающего воздействия можно представить в виде

$$\Delta X_{\text{вых}}(p) = W_z(p) \cdot f(p),$$

где $W_z(p)$ — передаточная функция замкнутой системы относительно возмущающего воздействия и регулируемой переменной;

$f(p)$ — изображение функции возмущающего воздействия.

Абсолютно инвариантной системой называется такая система, у которой значение $X_{вых}(p)$ тождественно равно нулю при нулевых начальных условиях. Отклонение выходной переменной будет равно нулю, если выполняется равенство

$$W_z(p)f(p) = 0.$$

В зависимости от способов достижения этого равенства различают четыре формы инвариантности:

Первая форма инвариантности систем заключается в том, что исключается непосредственно внешнее воздействие $|f(p) = 0|$:

$$W_z(p) \neq 0.$$

Это означает, что конструктивно система выполнена таким образом и помещена в такое место, что действие на нее внешних возмущений исключено. Например, различные авиационные автоматические системы, точность работы которых зависит от давления и температуры, часто размещают в специальных герметических отсеках, где поддерживаются постоянное давление и температура.

Вторая форма инвариантности систем заключается в том, что структура системы исключает прохождение сигнала внешних возмущений на выход системы при $f(p) \neq 0$:

$$W_z(p) = 0.$$

Эта форма инвариантности по своей практической значимости является наиболее важной; осуществить ее можно различными путями.

Передаточная функция замкнутой системы относительно возмущения является обычно дробно-рациональной функцией

$$W_z(p) = B_z(p)/A_z(p).$$

Следовательно, можно указать два варианта второй формы инвариантности, соответствующих $W_z(p) = 0$: 1) когда $B_z(p) = 0$; 2) когда $A_z(p) = \infty$.

Оператор воздействия $B_z(p)$ в общем случае определяется свойствами каналов передачи возмущающего воздействия $f(p)$. Если имеется всего один канал, то первый вариант $B_z(p) = 0$ физически означает, что канала не существует. Если же имеется несколько каналов передачи воздействия $f(p)$, то

$$W_z(p) = \sum_{i=1}^k B_{iz}(p)/A_z(p),$$

где k — число каналов передачи воздействия.

Каждое из слагаемых B_{iz} не равно нулю, однако можно подобрать параметры каналов так, что выполняется условие

$$\sum_{i=1}^k B_{iz}(p) = 0.$$

Таким образом, для осуществления п е р в о г о в а р и а н т а второй формы инвариантности необходимо иметь не менее двух каналов передачи воздействия возмущений на систему. Это условие было сформулировано акад. Б. Н. Петровым.

Условие многоканальности естественно выполняется в многоконтурных системах. В одноконтурных системах для осуществления условия многоканальности следует искусственно создавать дополнительные каналы. Практически это означает, что необходимо иметь возможность непосредственного либо косвенного измерения возмущающего воздействия.

Рассматривая характеристическое уравнение замкнутой системы, можно установить, что в т о р о й в а р и а н т второй формы инвариантности

$$A_z(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0$$

возможен только в том случае, если $a_n = 0$. Свободный член a_n зависит от коэффициента усиления разомкнутой системы K . Таким образом, второй вариант второй формы инвариантности выполним при коэффициенте усиления разомкнутой системы, равном бесконечности.

Т р е т ь я ф о р м а инвариантности систем заключается в том, что в установившемся режиме

$$W_z(p) f(p) = 0, \quad (11.7)$$

где $W_z(p) \neq 0$ и $f(p) \neq 0$.

Указанное условие (11.7) выполняется в том случае, если передаточная функция в качестве сомножителя имеет знаменатель изображения по Лапласу возмущающего воздействия. Например, если задано

$$f(p) = M(p)/N(p),$$

то передаточная функция замкнутой системы относительно возмущения должна быть:

$$W_z(p) = \frac{B_z(p)}{A_z(p)} = \frac{B_z^0(p)}{A_z(p)} N(p),$$

где $B_z(p) = B_z^0(p) N(p)$.

Следует отметить два варианта третьей формы инвариантности:

1) селективная инвариантность — обеспечивается только по отношению к определенному заранее известному по характеру возмущающему воздействию;

2) инвариантность до переходной составляющей — выполняется только для установившихся процессов изменения возмущений.

Рассмотрим пример, когда воздействие $f(t) = 1(t)$ в установившемся режиме постоянно. В этом случае $f(p) = 1/p$; $N(p) = p$;

$$W_z(p) = \frac{B_z^0(p)}{A_z(p)} p,$$

откуда

$$A_z(p) X_{в.м.х.}(p) = B_z^0(p) L[dl/dt] = 0,$$

поскольку производная от постоянной величины равна нулю.

Четвертая форма инвариантности систем предусматривает наличие компенсирующего воздействия в системе $g(t)$, при котором

$$X_{\text{вых}}(p) = W_z(p)f(p) - W_g(p)g(p). \quad (11.8)$$

Из (11.8) можно определить требование, которому должно удовлетворять компенсирующее воздействие

$$g(p) = \frac{W_z(p)}{W_g(p)}f(p).$$

Следовательно, компенсирующее воздействие зависит от характера возмущающего воздействия, поэтому в системе должно предусматриваться определение возмущения в процессе эксплуатации.

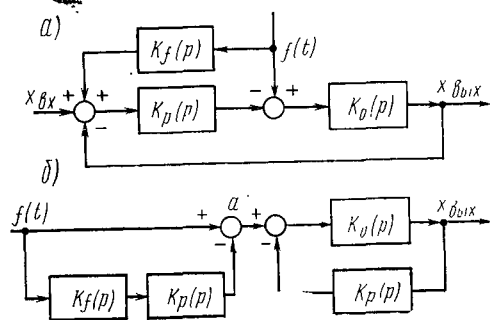


Рис. 11.3

Указанные формы инвариантности используются при построении высококачественных автоматических систем, структура, принцип действия и особенность выполнения которых могут быть весьма разнообразными [Л. 17]. При этом в ряде случаев ограничиваются реализацией части инвариантности*,

когда основные условия указанных форм инвариантности осуществляются с точностью до малой величины ε .

Рассмотрим пример, когда возмущение $f(t)$ подается на вход объекта (рис. 11.3, а). Для компенсации его действия на вход регулятора должен подаваться сигнал, противоположный действию возмущения на объект.

С учетом цепи компенсации $K_f(p)$ передаточная функция разомкнутой системы (рис. 11.3, б) представится в виде

$$W_f(p) = [1 - K_f(p)K_p(p)] \frac{K_o(p)}{1 + K_p(p)K_o(p)}. \quad (11.9)$$

Полная компенсация возмущающего воздействия и получение $W_f(p) = 0$ возможны, если выполняется условие

$$1 - K_f(p)K_p(p) = 0,$$

т. е. когда

$$K_f(p) = K_p^{-1}(p).$$

При этом результирующий сигнал в узле а (рис. 11.3, б) равен нулю и система управления не реагирует на возмущение $f(t)$, т. е. является инвариантной по отношению к возмущению $f(t)$.

* Получение абсолютной инвариантности связано с большой трудностью реализации требуемого регулятора. Для реализуемости абсолютно инвариантных систем необходимо и достаточно, чтобы главный определитель разомкнутой системы не был равен нулю и чтобы степень числителя передаточной функции регулятора не превышала степень знаменателя.

За счет цепи компенсации $K_f(p)$ можно повысить точность в установившемся режиме или порядок астатизма по отношению к возмущению $f(t)$.

Предположим, что передаточная функция регулятора

$$K_p(p) = \frac{k_p}{p} \cdot \frac{(T_1 p + 1)}{(T_2 p + 1)}$$

Тогда, выбрав передаточную функцию устройства цепи компенсации

$$K_f(p) = k_f p (T_f p + 1)^{-1},$$

получим передаточную функцию соответственно (11.9):

$$W_f(p) = \frac{K_o(p)}{1 + K_p(p) K_o(p)} \left[\frac{T_2 T_f p^2 + (T_2 + T_f) p + 1 - k_p k_f T_1 p - k_p k_f}{(T_2 p + 1)(T_f p + 1)} \right].$$

Если $k_f = 1/k_p$, то в передаточной функции $W_f(p)$ можно выделить идеальное дифференцирующее звено, которое создает форсирующее действие по сигналу $f(t)$ и увеличивает точность управления, т. е. применение устройства компенсации равноценно введению интегрирующего звена в цепи регулятора.

В случае выполнения условий $k_f = 1/k_p$ и $T_2 + T_f = k_p k_f T_1$ система в отношении точности будет эквивалентна астатической системе с астатизмом второго порядка.

Таким образом, изменением настройки корректирующего устройства по возмущению $K_f(p)$ можно полностью ликвидировать установившиеся ошибки при различных видах возмущающих воздействий. Для каждого вида $f(t)$ должна быть установлена соответствующая настройка. Устойчивость системы при этом не меняется, так как $K_f(p)$ не входит в характеристическое уравнение замкнутой системы.

Корректирующее устройство по возмущению $K_f(p)$ надо специально строить на наиболее опасную, часто встречающуюся, или какую-то средневзвешенную форму возмущающего воздействия, чтобы его влияние устранялось наиболее полно и при этом достаточно хорошо гасились отклонения управляемой переменной, появляющиеся также при других (возможных) формах возмущающих воздействий. Это устройство устраняет влияние какого-либо одного внешнего воздействия, например нагрузки. Кроме этого возмущающего воздействия в автоматической системе могут быть и другие, например, колебания скорости вращения генератора, электромашинных регуляторов, а также отклонения некоторых величин, обычно принимаемых неизменными.

Вообще говоря, если в системе имеется два или несколько сильных источников возмущения, то нужно ставить два или несколько корректирующих устройств по возмущению.

Обычно корректирующее устройство по возмущению берет на себя главную часть задачи по поддержанию заданного значения управляемой переменной, существенно облегчая работу устройства управления по отклонению.

§ 11.2. Об обеспечении заданного качества переходного процесса

Заданный характер переходного процесса автоматической системы может быть обеспечен соответствующим выбором параметров отдельных звеньев и введением корректирующих устройств. С помощью корректирующих устройств можно изменить, например, частотные характеристики так, чтобы они соответствовали заданному характеру переходного процесса. С этой целью на плоскости частотных характеристик по заданному переходному процессу могут быть построены запретные области, в которых не должны располагаться частотные характеристики системы.

Выбор параметров звеньев системы по заданному переходному процессу методом нормированных переходных характеристик и стандартных передаточных функций. Для некоторых автоматических систем

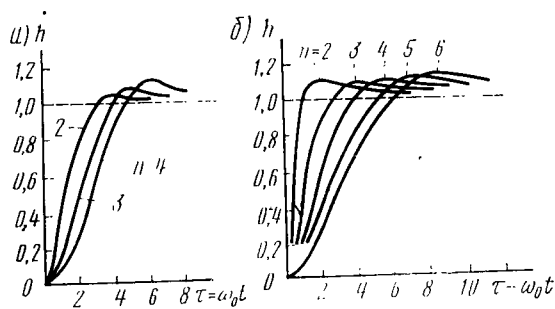


Рис. 11.4

составлены стандартные передаточные функции разомкнутых систем, выраженные через параметр ω_0 , определяющий быстродействие системы (табл. 11.1). По этим стандартным передаточным функциям построены нормированные кривые переходных процессов для единичных задающих воздействий (рис. 11.4). Рис. 11.4, а

соответствует астатизму первого порядка, а рис. 11.4, б — второго порядка.

Если заданы время переходного процесса t_p и перерегулирование $\sigma\%$, то по таблице можно найти соответствующую стандартную пере-

соответствует астатизму первого порядка, а рис. 11.4, б — второго порядка.

Таблица 11.1

Стандартные передаточные функции

Степень астатизма	Порядок уравнения n	Перерегулирование $\sigma\%$	Коэффициент усиления K	Передаточная функция $K(p)$
1	2	5	$\frac{\omega_0}{1,4}$	$\frac{\omega_0^2}{p^2 + 1,4\omega_0 p}$
	3	8	$\frac{\omega_0}{2}$	$\frac{\omega_0^3}{p^3 + 2\omega_0 p^2 + 2\omega_0^2 p}$
	4	10	$\frac{\omega_0}{2,6}$	$\frac{\omega_0^4}{p^4 + 2,6\omega_0 p^3 + 3,4\omega_0^2 p^2 + 2,6\omega_0^3 p}$
2	2	10	ω_0	$\frac{2,5\omega_0 p + \omega_0^2}{p^2}$
	3	10	$\frac{\omega_0^2}{5,1}$	$\frac{6,3\omega_0^2 p + \omega_0^3}{p^3 + 5,1\omega_0 p^2}$
	4	10	$\frac{\omega_0^2}{16}$	$\frac{12\omega_0^3 p + \omega_0^4}{p^4 + 7,2\omega_0 p^3 + 16\omega_0^2 p^2}$
	5	10	$\frac{\omega_0^2}{38}$	$\frac{18\omega_0^4 p + \omega_0^5}{p^5 + 9\omega_0 p^4 + 29\omega_0^2 p^3 + 38\omega_0^3 p^2}$
	6	10	$\frac{\omega_0^2}{73}$	$\frac{25\omega_0^5 p + \omega_0^6}{p^6 + 11\omega_0 p^5 + 43\omega_0^2 p^4 + 83\omega_0^3 p^3 + 73\omega_0^4 p^2}$

даточною. функцию и для нее из графика нормированных кривых (см. рис. 11.4) определить относительное время переходного процесса $\tau = \omega_0 t$. Далее по значению τ и стандартной передаточной функции разомкнутой системы можно получить искомые параметры звеньев системы.

Пример 11.1. Определим параметры системы методом стандартных передаточных функций.

Пусть заданы $t_p < 1,5$ сек, $\sigma \leq 10\%$ и

$$K(p) = \frac{K(1 \nrightarrow T_1 p)}{p^2(1 \nrightarrow T_2 p)}. \quad (11.10)$$

При этом соответствующая стандартная передаточная функция (см. табл. 11.1)

$$K(p) = \frac{6,3\omega_0^2 p \nrightarrow \omega_0^3}{p^3 \nrightarrow 5,1\omega_0 p^2} = \frac{\frac{\omega_0^2}{5,1} \left(1 \nrightarrow \frac{6,3}{\omega_0} p\right)}{p^2 \left(1 \nrightarrow \frac{1}{5,1\omega_0} p\right)}. \quad (11.11)$$

Приравнявая (11.10) и (11.11), получим условия для выбора параметров:

$$\left. \begin{aligned} K &= \omega_0^2/5,1; \\ T_1 &= 6,3/\omega_0; \\ T_2 &= 1/5,1\omega_0. \end{aligned} \right\} \quad (11.12)$$

По кривой 3 (см. рис. 11.4, б) при $h = 1,05$ находим время переходного процесса $\tau = \omega_0 t = 9$; это позволяет по заданному $t_p = 1,5$ сек найти

$$\omega_0 = \tau/t_p = 9/1,5 = 6 \text{ 1/сек}.$$

Подставив значение $\omega_0 = 6 \text{ 1/сек}$ в (11.12), получим $K = 7,05 \text{ 1/сек}^2$; $T_1 = 1,05 \text{ сек}$; $T_2 = 0,0326 \text{ сек}$. Следовательно, передаточная функция разомкнутой системы

$$K(p) = \frac{7,05(1 \nrightarrow 1,05p)}{p^2(1 \nrightarrow 0,0326p)}.$$

При этом замкнутая система будет иметь $t_p = 1,5 \text{ сек}$, $\sigma \approx 10\%$, а переходная характеристика — соответствовать кривой 3 (см. рис. 11.4, б).

Построение запретной области по заданному показателю колебательности. При рассмотрении амплитудных круговых диаграмм на плоскости АФХ разомкнутой системы область, ограниченную кругом соответственно заданному показателю колебательности M , можно заштриховать и считать запретной (в нее не должна заходить АФХ разомкнутой проектируемой системы).

Рассмотрим наиболее распространенный способ построения запретной области на плоскости логарифмических частотных характеристик по заданному показателю колебательности.

Для некоторого M круговую диаграмму можно представить как геометрическое место концов радиуса вектора R , проведенного из начала координат и отклоняющегося от отрицательной вещественной полуоси на угол $\pm \eta$ (рис. 11.5, а). При $\eta_{\max}$ радиус-вектор имеет

длину R_0 ; при $\eta = 0$ он достигает минимальной или максимальной длины, соответственно минимальный и максимальный радиусы:

$$\left. \begin{aligned} R_{\max} &= M/(M-1); \\ R_{\min} &= M/(M+1). \end{aligned} \right\} \quad (11.13)$$

Величины $\eta_{\max}$, $R_{\max}$, $R_{\min}$ характеризуют крайние границы запретной области, соответствующей данному показателю колебательности, и используются при определении показателя колебательности по логарифмическим частотным характеристикам.

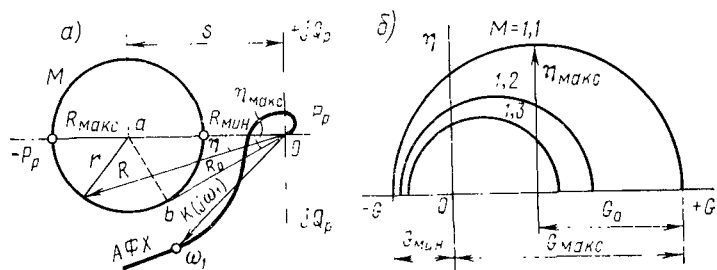


Рис. 11.5

Применяя теорему косинусов для угла η , по треугольнику, образованному радиусом r и расстояниями s и R , определяем

$$\cos \eta = \frac{R^2 + s^2 - r^2}{2Rs}, \quad (11.14)$$

или

$$\eta = \arccos \frac{R^2 + s^2 - r^2}{2Rs}. \quad (11.15)$$

Для значения R_0 , соответствующего $\eta_{\max}$, из прямоугольного треугольника Oab получим

$$R_0 = \sqrt{s^2 - r^2} = s \cos \eta_{\max}, \quad (11.16)$$

где

$$s = M^2/(M^2 - 1); \quad r = M/(M^2 - 1).$$

Учитывая, что $s^2 - r^2 = s$, на основании (11.16) запишем

$$\eta_{\max} = \arccos \frac{R_0}{s} = \arccos \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M}. \quad (11.17)$$

Выразим значения радиуса-вектора в децибелах:

$$\left. \begin{aligned} G_{\max} &= 20 \lg R_{\max}; & G_{\min} &= 20 \lg R_{\min}; \\ G_{\max} &> 0; & G_{\min} &< 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.18)$$

Введем среднее значение логарифма модуля в децибелах:

$$G_0 = \frac{|G_{\max}| + |G_{\min}|}{2}. \quad (11.19)$$

Полученные соотношения позволяют для каждого M построить вспомогательный график $\eta = f(G)$, где $G = 20 \lg R$. Выберем масштабы так, чтобы $\eta_{\max} = G_0$, тогда $\eta = f(G)$ будет иметь вид окружности (рис. 11.5, б).

Для обеспечения заданного показателя колебательности необходимо, чтобы запас по фазе был не меньше значения η , соответствующего радиусу-вектору R и ограниченному на графике ЛАХ по модулю. С этой целью в диапазоне от $G_{\max}$ до $G_{\min}$ на плоскости логарифмических частотных характеристик строим кривую $\eta = f(G)$, которая ограничивает запретную область. В эту область не должна заходить логарифмическая фазовая характеристика системы.

Запретную область $\eta = f(G)$ для заданного M на плоскости логарифмических частотных характеристик можно определить следующим образом (рис. 11.6):

- построить ЛАХ и ЛФХ;
- на оси амплитуд G отложить значения $G_{\min}$ и $G_{\max}$, вычисленные по (11.18) и (11.13) для заданного M ;
- на отрезке $(G_{\max} - G_{\min})$ оси ординат, как на диаметре, построить полуокружность;
- по формуле (11.17) определить $\eta_{\max}$;
- из точки O_1 центра полуокружности провести горизонталь до полуокружности (точка a) и до ЛАХ (точка b);
- из точки b опустить перпендикуляр до пересечения с ординатой $\varphi = -180^\circ$ (точка c);
- от точки c отложить в масштабе фазы угол $\eta_{\max}$ (точка d);
- через точку d провести горизонталь влево до пересечения с вертикалью, проведенной через точку a (точка e), и от точки $\varphi = -180^\circ$ на оси ординат через точку e провести вспомогательный луч $ВЛ$;
- задаваясь значением G в пределах от $G_{\max}$ до $G_{\min}$ по ЛАХ, вспомогательной полуокружности и вспомогательному лучу построить кривую, ограничивающую запретную область для ЛФХ (один цикл построения обозначен цифрами 1-2-3-4-5 и указан стрелками).

На рис. 11.6 кривая ЛФХ системы не заходит в запретную область, построенную для $M = 1,3$, поэтому система будет иметь показатель колебательности $M < 1,3$.

Значения η , используемые для построения, можно вычислить также аналитически [гл. 6] по формуле (11.15).

Построение желаемой ЛАХ. Переходный процесс, вызванный скачкообразным воздействием, является оптимальным, если он имеет минимально возможное время с учетом определенных ограничений. Оптимальный переходный процесс может быть реализован с помощью нелинейных обратных связей (см. гл. 20).

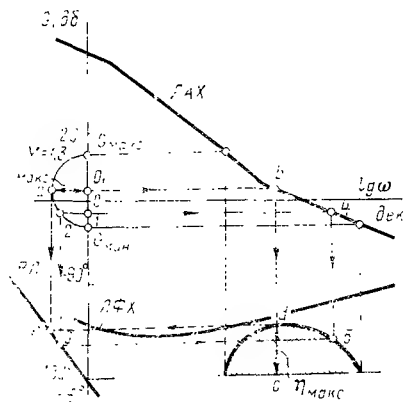


Рис. 11.6

Далеко не всегда требуются оптимальные переходные процессы, поэтому при синтезе линейных корректирующих устройств предусматривается получение некоторого заданного процесса, отличающегося от оптимального. Для этого определяют требуемые (желаемые) частотные характеристики, которые находят из условия обеспечения переходного процесса с заданным временем t_p и перерегулированием σ . Для минимально-фазовых систем существует однозначная зависимость между ЛАХ и ЛФХ, поэтому достаточно построить только желаемую ЛАХ.

Желаемая ЛАХ разбивается на три участка: низкочастотный, среднечастотный и высокочастотный.

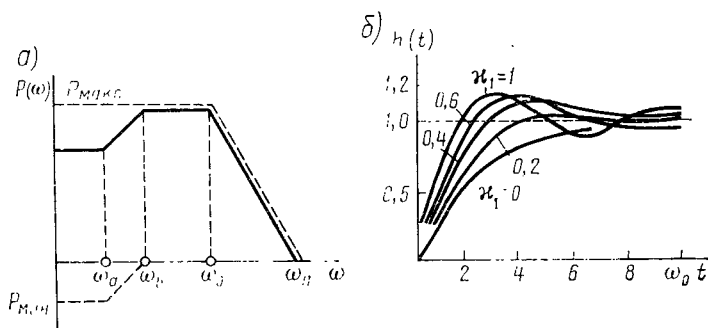


Рис. 11.7

Низкочастотный участок строится из условий заданной точности работы системы в установившихся режимах. Для статических систем он должен быть горизонтальным до первой точки сопряжения и с учетом заданной статической ошибки должен отстоять от оси частот на величину $20 \lg K$ (величина K соответствует заданной ошибке). Для астатических систем наклон ЛАХ и низкочастотного участка равен $- \nu \cdot 20 \text{ дБ/дек}$ (ν — степень астатизма); этот участок должен быть расположен выше контрольной точки, определяемой по заданной динамической ошибке [см. (10.16)].

Среднечастотный участок ЛАХ, пересекающий ось частот, выбирается по заданному времени переходного процесса и по величине перерегулирования. В основу построения среднечастотного участка положены типовые вещественные частотные характеристики (рис. 11.7).

Вещественную характеристику в большинстве случаев можно представить разностью двух типовых трапеций с высотами $P_{\text{макс}}$ и $P_{\text{мин}}$ и определить тремя параметрами (рис. 11.7, а):

$$\kappa_1 = \omega_0/\omega_n; \quad \kappa_2 = \omega_a/\omega_b; \quad \lambda = \omega_b/\omega_n.$$

Для некоторых типовых вещественных частотных характеристик построены кривые переходных процессов (для различных κ_1) при единичном воздействии и нулевых начальных условиях (рис. 11.7, б). Наилучший переходный процесс получается при $\kappa_1 = 0,2 \div 0,25$. При этом величина t_p минимальна, а перерегулирование $\sigma \approx 4\%$.

Приближенно величина $\sigma\%$ и максимальное время $T_{\text{макс}}$ в зависимости от $P_{\text{макс}}$ могут быть получены из графика (рис. 11.8, а), построенного в результате расчетов для $\kappa_1 < 0,8$; $\lambda \geq 0,5$ и $\kappa_2 \geq 0,4$.

Этот график позволяет по заданной величине $\sigma\%$ определить $P_{\text{макс}}$ и далее по кривой для $T_{\text{макс}}$ и заданному t_p найти частоту среза $\omega_{\text{ср}}$ разомкнутой системы:

$$T_{\text{макс}} = k\pi/\omega_{\text{ср}},$$

или

$$\omega_{\text{ср}} = k\pi/T_{\text{макс}} = k\pi/t_p, \quad (11.20)$$

где $T_{\text{макс}} = t_p$ — заданное время.

На рис. 11.8, а для заданного $\sigma = 30\%$ показано определение $T_{\text{макс}}$ и по заданному $t_p = 0,5$ сек получено $\omega_{\text{ср}} = 23,8$ 1/сек. Через точку, соответствующую частоте $\omega_{\text{ср}}$, проводим среднечастотный участок желаемой ЛАХ с наклоном -20 дБ/дек.

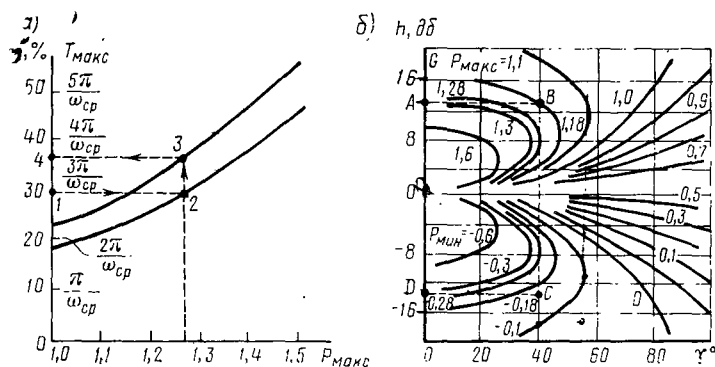


Рис. 11.8

Среднечастотный участок желаемой ЛАХ ограничиваем условиями необходимого запаса по фазе и по модулю в децибелах. Для этого используем специальную номограмму постоянных P_c на плоскости h и γ (рис. 11.8, б). По значению $P_{\text{макс}}$ (см. рис. 11.8, а), определяемому для данного $\sigma\%$, находим

$$P_{\text{мин}} = 1 - P_{\text{макс}}. \quad (11.21)$$

На графике номограммы P_c строим прямоугольник $ABCD$, определяемый касательными к линиям $P_{\text{макс}}$ и $P_{\text{мин}}$. По оси ординат отчитываем значение запаса по модулю $h = G_1$, равное половине высоты штрихового прямоугольника, а по оси абсцисс — запас по фазе γ_1 , равный половине основания этого прямоугольника, если используется полная номограмма. Для $P_{\text{макс}} = 1,28$; $P_{\text{мин}} = -0,28$ согласно рис. 11.8, б, построенному для одной половины номограммы, получим $\gamma_1 = 13$ дБ и $\gamma_1 = 40^\circ$. Величина G_1 ограничивает среднечастотный участок слева, а величина $G_2 = -G_1$ — справа.

Имея низкочастотный и среднечастотный участки желаемой ЛАХ, надо произвести их сопряжение. Желательно, чтобы участок такого сопряжения состоял из одного отрезка, наклон которого отличается от наклона низкочастотного участка на 20 *дб/дек*. После этого следует проверить действительный запас по фазе для желаемой ЛАХ на участке сопряжения.

Высокочастотный участок желаемой ЛАХ ограничивается частотой $\omega_k \leq (6 \div 10)\omega_{ср}$ и может иметь любой наклон. Этот участок не влияет существенно на переходный процесс, поэтому во внимание не принимается.

Сопряжения высокочастотного и среднечастотного участков желаемой ЛАХ производят так, чтобы получить отрезок с наклоном на 20 *дб/дек* большим, чем наклон среднечастотного участка. После этого проверяют действительный запас по фазе на участке сопряжения желаемой ЛАХ.

Построенная указанным способом желаемая ЛАХ соответствует заданному переходному процессу. Далее необходимо выбрать звенья и параметры системы так, чтобы ЛАХ совпадала с желаемой. Ниже показано, как можно скорректировать действительную ЛАХ системы и получить желаемую ЛАХ для заданного переходного процесса. При этом низкочастотный, высокочастотный участки и участки сопряжения со среднечастотным участком желаемой ЛАХ строятся в зависимости от действительной ЛАХ нескорректированной системы.

Фазо-частотная характеристика скорректированной системы не должна заходить в запретную область, построенную для заданного показателя колебательности (см. рис. 11.6).

В некоторых случаях желаемая ЛАХ уточняется с помощью типовых ЛАХ и номограмм показателей качества [Л. 35].

§ 11.3. Синтез корректирующих устройств при помощи ЛАХ

Используя ЛАХ нескорректированной системы и желаемую ЛАХ, соответствующую заданному переходному процессу, определяют тип и параметры корректирующего устройства. При этом расчет корректирующего устройства зависит от способа его включения (последовательно или параллельно). Типовые корректирующие устройства приведены в табл. 11.2 (для постоянного тока) и 11.3 (для переменного тока).

Последовательные корректирующие устройства. Последовательные корректирующие устройства включают непосредственно в цепь прохождения основного сигнала последовательно с основными звеньями. При этом передаточная функция скорректированной системы, соответствующая желаемой ЛАХ,

$$K_{ср}(p) = K_{ис}(p) K_K(p), \quad (11.22)$$

где $K_K(p)$, $K_{ср}(p)$ и $K_{ис}(p)$ - передаточные функции корректирующего устройства, скорректированной и нескорректированной систем соответственно.

Следовательно, получим

$$K_{\kappa}(p) = K_{\text{сн}}(p) / K_{\text{нс}}(p), \quad (11.23)$$

или в логарифмической форме

$$20 \lg |K_{\kappa}(p)| = 20 \lg |K_{\text{сн}}(p)| - 20 \lg |K_{\text{нс}}(p)|. \quad (11.24)$$

Таким образом,

$$G_{\kappa} = G_{\text{сн}} - G_{\text{нс}},$$

где G_{κ} , $G_{\text{сн}}$, $G_{\text{нс}}$ — ЛАХ корректирующего устройства, скорректированной и нескорректированной систем соответственно.

Тип и параметры последовательного корректирующего устройства при использовании ЛАХ получают следующим образом:

а) определяют ЛАХ нескорректированной (исходной) системы по передаточной функции разомкнутой системы;

б) строят желаемую ЛАХ скорректированной системы по заданным показателям качества;

в) вычитают графически из желаемой ЛАХ ординаты ЛАХ нескорректированной системы и получают ЛАХ последовательного корректирующего устройства;

г) упрощают ЛАХ корректирующего устройства, чтобы можно было легче осуществить это звено; сравнивая с таблицей типовых дифференцирующих, интегрирующих и интегро-дифференцирующих звеньев, определяют тип необходимого корректирующего устройства (см. табл. 11.2 и 11.3);

д) находят по сопрягающим частотам параметры корректирующего устройства.

Пример 11.2. Рассмотрим синтез корректирующего устройства для системы, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии

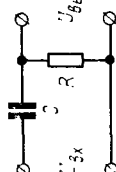
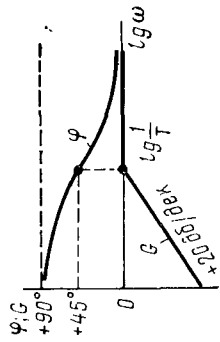
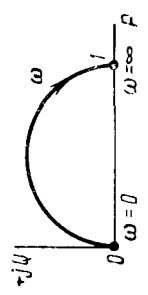
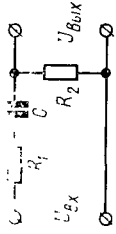
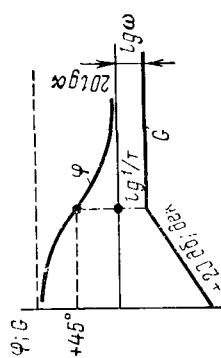
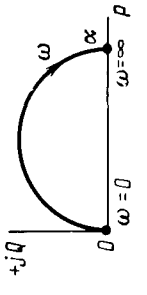
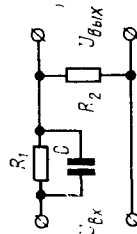
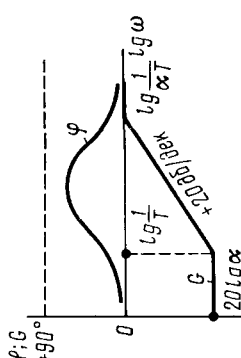
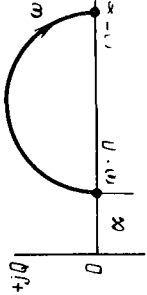
$$K_{\text{нс}}(p) = \frac{6}{(1+p)(1+0,5p)(1+0,2p)(1+0,1p)(1 \mp 0,01p)}.$$

Это выражение определяет ЛАХ $G_{\text{нс}}$ и ЛФХ $\varphi_{\text{нс}}$ нескорректированной системы (рис. 11.9). При этом $\omega_{\text{с1}} = 1$ 1/сек, $\omega_{\text{с2}} = 2$ 1/сек, $\omega_{\text{с3}} = 5$ 1/сек, $\omega_{\text{с4}} = 10$ 1/сек, $\omega_{\text{с5}} = 100$ 1/сек. При $\omega = 1$ 1/сек значение $G_0 = 20 \lg K = 15,68$ дБ. Желаемая ЛАХ строится для заданных $\sigma = 30\%$ и $t_{\text{р}} = 5,8$ сек. По графику (см. рис. 11.8, а) для $\sigma = 30\%$ находим $P_{\text{макс}} = 1,28$; $P_{\text{мин}} = 1 - P_{\text{макс}} = -0,28$; частота $\omega_{\text{ср}} = 2$ 1/сек. По номограмме (см. рис. 11.8, б) определяем запас по модулю $h = G_1 = 13$ дБ и по фазе $\gamma = 40^\circ$ (в некоторых справочниках имеется специальный график для получения непосредственно по $\sigma\%$ значений G_1 и γ).

На рис. 11.9 построена желаемая $G_{\text{сн}}$, где низкочастотный участок ограничен частотой $\omega = 0,32$ 1/сек; низкочастотный участок сопрягается со среднечастотным участком из условия разницы в наклонах на 20 дБ/дек при частоте ω_1 , когда $G_1 = 15,6$ дБ (вместо 13 дБ по расчету). Это сделано для упрощения корректирующего устройства и получения одного отрезка на участке сопряжения. Высокочастотный участок начинается при $\omega = 5,2$ 1/сек и сопрягается со среднечастотным участком при $G_2 = -7,5$ дБ.

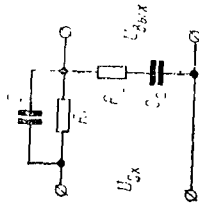
После вычитания из характеристики $G_{\text{сн}}$ ординат $G_{\text{нс}}$ получим ЛАХ корректирующего устройства G_{κ} . Она подобна ЛАХ интегро-дифференцирующего устройства, которое и выбираем в качестве последовательного корректирующего устройства (см. табл. 11.2).

Корректирующие цепи постоянного тока

Схемы корректирующих пассивных контуров	Передающие функции	Логарифмические частотные характеристики	Амплитудно-фазовые характеристики
1 	$K(p) = \frac{Tp}{Tp + 1},$ где $T = CR$		
2 	$K(p) = \alpha \frac{Tp}{Tp + 1},$ где $\alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2};$ $T = (R_1 + R_2)C$		
3 	$K(p) = \alpha \frac{Tp + 1}{\alpha Tp + 1},$ где $\alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2};$ $T = R_1 C$		

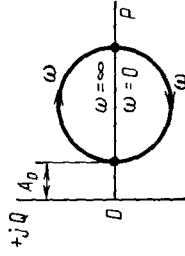
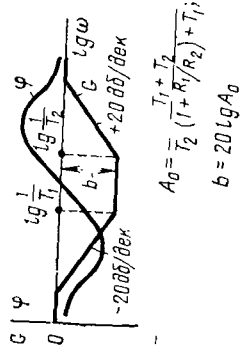
	$\alpha = \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3},$ $T_1 = R_2 C;$ $T_2 = \frac{R_1 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3} T_1$			
5		$K(p) = \frac{1}{Tp + 1},$ где $T = RC$		
6		$K(p) = \frac{T_2 p + 1}{T_1 p + 1},$ где $T_1 = (R_1 + R_2) C;$ $T_2 = R_2 C$		
7		$K(p) = \alpha \frac{T_2 p + 1}{T_1 p + 1},$ где $\alpha = \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3};$ $T_1 = \frac{R_3 R_1}{R_3 + R_1} C;$ $T_2 = R_2 C$		

8

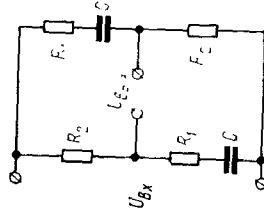


$$K(p) = \frac{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}{(\tau_1 p + 1)(\tau_2 p + 1)},$$

где $T_1 = R_1 C_1$;
 $T_2 = R_2 C_2$

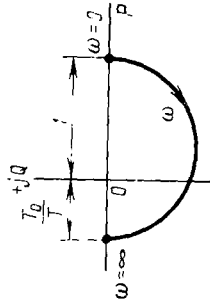
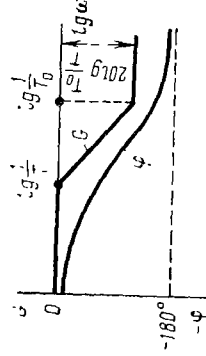


9

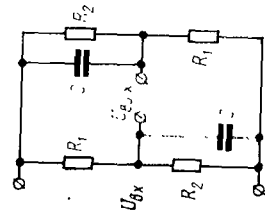


$$K(p) = \frac{1 - T_0 p}{1 + T p},$$

где $T_0 = (R_2 - R_1) C$;
 $T = (R_1 + R_2) C$;
 $R_2 > R_1$; $T_0 < T$



10



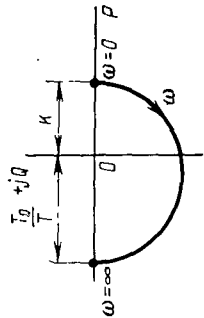
$$\Lambda(\omega) = \frac{1}{1 + T p}$$

$$k = \frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2}$$

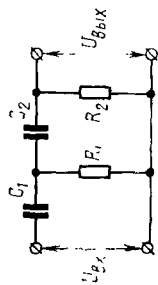
$$T_0 = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} C;$$

$$T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C;$$

$$T_0 > T; R_2 > R_1$$



11

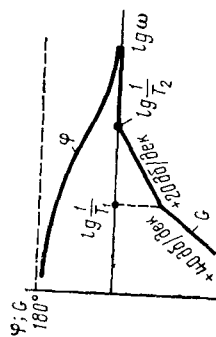


$$K(p) = \frac{T_1 T_2 p^2 + 1}{T_1 T_2 p^2 + 1}$$

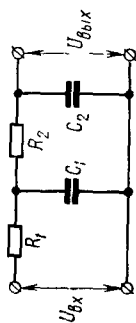
$$T_1 = R_1 C_1;$$

$$T_2 = R_2 C_2;$$

$$T_{12} = R_1 C_2$$



12

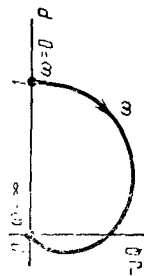


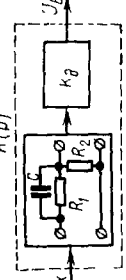
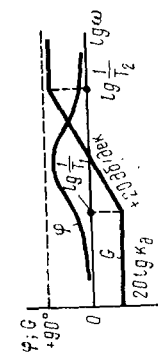
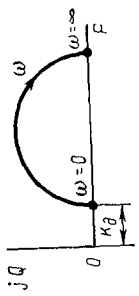
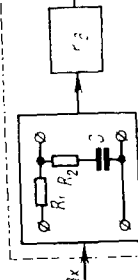
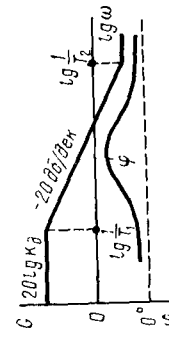
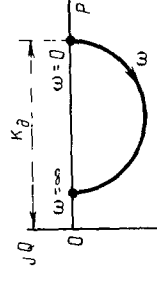
$$K(p) = \frac{1}{T_1 T_2 p^2 + 1}$$

$$T_1 = R_1 C_1;$$

$$T_2 = R_2 C_2;$$

$$T_{12} = R_1 C_2$$



Номер схем	Схемы корректирующих пассивных контуров	Передающие функции	Логарифмические частотные характеристики	Амплитудно-фазовые характеристики
13		$K(p) = \frac{k_d(1 + T_1 p)}{1 + T_2 p}$ где $T_1 = R_1 C$; $T_2 = \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}$		
14		$K(p) = \frac{k_d(1 + T_2 p)}{1 + T_1 p}$ где $T_1 = R_2 C$; $T_2 = R_2 C$		

По частотам сопряжения характеристики G_K (рис. 11.9) определим постоянные времени интегро-дифференцирующего устройства и запишем передаточную функцию

$$K_K(p) = \frac{(1 \mp T_1 p)(1 \mp T_2 p)}{(1 \mp \tau_1 p)(1 \mp \tau_2 p)} = \frac{(1+p)(1 \mp 0,5p)}{(1+3,13p)(1 \mp 0,192p)},$$

где $T_1 = 1/1,0 = 1,0$ сек; $T_2 = 1/2 = 0,5$ сек; $\tau_1 = 1/0,32 = 3,13$ сек; $\tau_2 = 1/5,2 = 0,192$ сек.

На основании схемы этого устройства получим

$$T_1 = R_1 C_1 = 1 \text{ сек};$$

$$T_2 = R_2 C_2 = 0,5 \text{ сек}.$$

Выбирая емкости $C_1 = C_2 = 1$ мкф, найдем $R_1 = 1$ ком и $R_2 = 0,5$ ком.

Определив параметры корректирующего устройства, построим ЛФХ $\varphi_{СК}$ и кривую переходного процесса, уточняя запасы по фазе и модулю, а также показатели качества процесса управления для единичного входного воздействия при нулевых начальных условиях (см. гл. 12). Фазовая характеристика $\varphi_{СК}$ нескорректированной системы на рис. 11.9 показана штриховой линией. На основании $G_{СК}$ и $\varphi_{СК}$ по точкам А и Б найдем запасы по модулю $h = 16$ дб и по фазе $\gamma = 67^\circ$ (требуемые значения $h = 13$ дб и $\gamma = 40^\circ$).

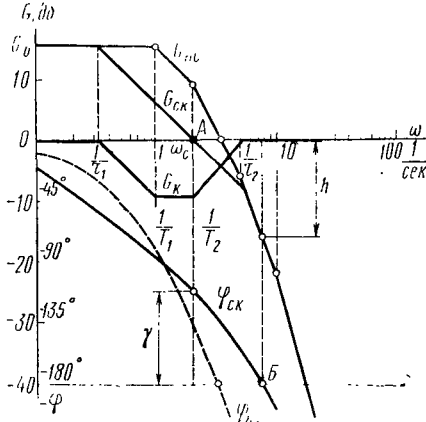


Рис. 11.9

Параллельные корректирующие устройства. Параллельные корректирующие устройства включаются в виде обратных связей, охватывающих часть основных звеньев системы (рис. 11.10). При этом аналогично предыдущему сначала строятся ЛАХ нескорректированной системы и желаемая ЛАХ. В этом случае передаточная функция разомкнутой системы

$$K_{СК}(p) = \frac{K_{ПС}(p)}{1 \mp K_{ОХВ}(p) K_{О.С}(p)}, \quad (11.25)$$

где $K_{ОХВ}(p)$ — передаточная функция участка, охваченного параллельным корректирующим устройством; $K_{О.С}$ — передаточная функция параллельного корректирующего устройства.

В интервале частот, для которого справедливо неравенство

$$K_{ОХВ}(p) K_{О.С}(p) \gg 1, \quad (11.26)$$

вместо (11.25) можно приближенно записать

$$K_{СК}(p) \approx K_{ПС}(p) / [K_{ОХВ}(p) K_{О.С}(p)]. \quad (11.27)$$

Логарифмируя (11.27) и производя преобразования, получим

$$20 \lg |K_{О.С}(p)| - 20 \lg |K_{ПС}(p)| - 20 \lg |K_{СК}(p)| - 20 \lg |K_{ОХВ}(p)|. \quad (11.28)$$

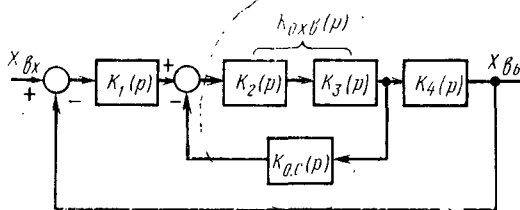
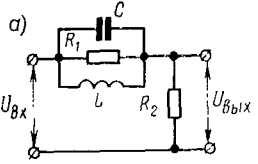
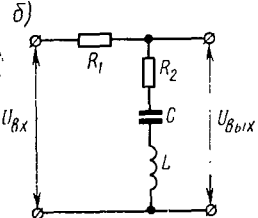
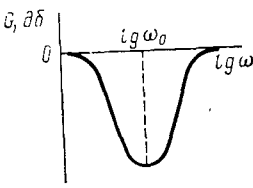
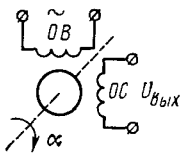
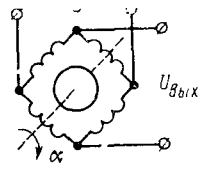
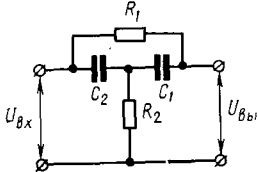
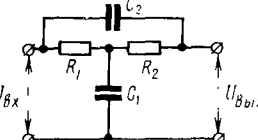
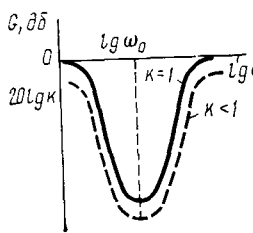


Рис. 11.10

Схема	Передаточная функция для сигналов постоянного тока	ЛАХ для сигналов постоянного тока
а)  б) 	$K(p) = \frac{T_1 T_2 p^2 + T_2 p + 1}{T_1 T_2 p^2 + \alpha T_2 p + 1},$ где а) $T_1 = R_1 C;$ $T_2 = L/R_1;$ $\alpha = \frac{R_1 + R_2}{R_2};$ б) $T_1 = L/R_2;$ $T_2 = R_2 C;$ $\alpha = \frac{R_1 + R_2}{R_2}$	
 	—	—
 	$K(p) = \frac{T_1 T_2 p^2 + a T_2 p + 1}{T_1 T_2 p^2 + b T_2 p + 1} k,$ где $T_1 = R_1 C_1;$ $T_2 = R_2 C_2;$ $a = \frac{R_1 + R_2}{R_2};$ $b = 1 + \frac{T_1}{T_2} \left(1 + \frac{C_2}{C_1} \right)$	

переменного тока

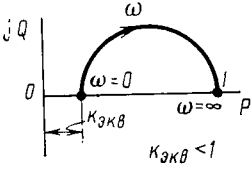
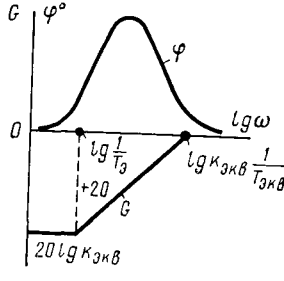
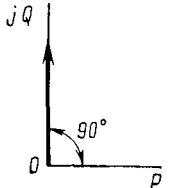
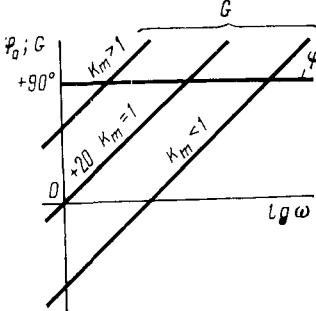
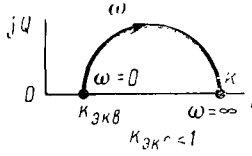
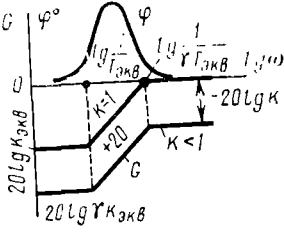
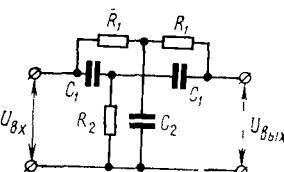
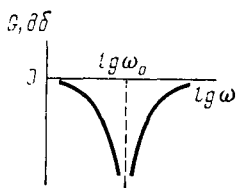
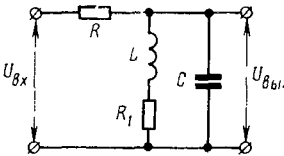
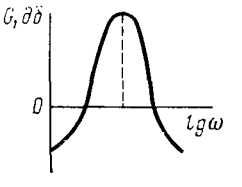
Передаточная функция для огибающей переменного тока	АФХ для огибающей	ЛАХ и ЛФХ для огибающей
$K(s) = k_{\text{ЭКВ}} \times \frac{1 + T_{\text{ЭКВ}} s}{1 + k_{\text{ЭКВ}} T_{\text{ЭКВ}} s},$ где а) $k_{\text{ЭКВ}} = \frac{R_1}{R_1 + R_2};$ $T_{\text{ЭКВ}} = 2R_1 C;$ б) $k_{\text{ЭКВ}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2};$ $T_{\text{ЭКВ}} = \frac{2L}{R_2}$	 ω $\omega=0$ $\omega=\infty$ $k_{\text{ЭКВ}}$ $k_{\text{ЭКВ}} < 1$	 φ° $\lg \omega$ $\lg \frac{1}{T_{\text{ЭКВ}}}$ $\lg k_{\text{ЭКВ}} \frac{1}{T_{\text{ЭКВ}}}$ $+20$ $20 \lg k_{\text{ЭКВ}}$
$K(s) = k_m s;$ $k_m = U_{\text{ВЫХ}} / \alpha$	 jQ 90° P	 φ, G $+90^\circ$ $k_m > 1$ $k_m = 1$ $k_m < 1$ $+20$ $\lg \omega$
$K(s) = k_{\text{ЭКВ}} \times \frac{1 + T_{\text{ЭКВ}} s}{1 + \gamma T_{\text{ЭКВ}} s},$ где $k_{\text{ЭКВ}} = k\gamma;$ $\gamma = \frac{a}{b} < 1$	 ω $\omega=0$ $\omega=\infty$ $k_{\text{ЭКВ}}$ $k_{\text{ЭКВ}} < 1$	 φ° $\lg \omega$ $\lg \frac{1}{T_{\text{ЭКВ}}}$ $\lg \frac{1}{\gamma T_{\text{ЭКВ}}}$ $+20$ $-20 \lg \gamma$ $20 \lg k_{\text{ЭКВ}}$ $20 \lg \gamma k_{\text{ЭКВ}}$

Схема	Передаточная функция для сигналов постоянного тока	ЛАХ для сигналов постоянного тока
	$K(p) = \frac{T_1^2 T_2 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + 1}{T_1^2 T_2 p^3 + a_1 p^2 + a_2 (1 + b_1) p + 1}$ где $T_1 = R_1 C_1$; $T_2 = R_2 C_2$; $a_1 = 2T_1 T_2$; $a_2 = 2T_2$; $b_1 = \frac{1}{2T_2} (2T_1 + T_2)$; $b_2 = \frac{1}{2T_2} (2T_2 + T_1)$	
	$K(p) = k \frac{1 + T_1 p}{k T_1 T_2 p^2 + k(T_1 + T_2)p + 1}$ где $k = \frac{R_1}{R_1 + R}$; $T_1 = L/R_1$; $T_2 = RC$	

Так как $K_{сн}(p)$ определяет желаемую ЛАХ, то на основании (11.24) можно в (11.28) ввести эквивалентное последовательное корректирующее устройство с передаточной функцией $K_K(p)$:

$$20 \lg |K_{о.с}(p)| = -20 \lg |K_K(p)| - 20 \lg |K_{о.хв}(p)|. \quad (11.29)$$

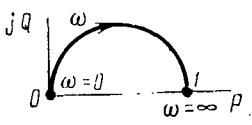
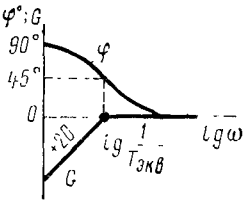
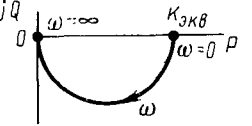
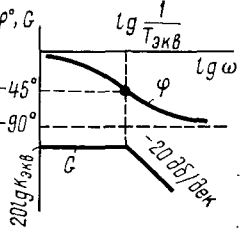
В некоторых случаях ЛАХ параллельного корректирующего устройства $G_{о.с}$ на основании (11.28) находят по выражению

$$20 \lg |K_{о.с}(p)| = 20 \lg |K_{н.о.хв}(p)| - 20 \lg |K_{сн}(p)|, \quad (11.30)$$

где $K_{н.о.хв}(p)$ — передаточная функция неохваченных звеньев.

При таком способе определения $G_{о.с}$ необходимо построить $G_{н.о.хв}$ и графически вычесть ординаты $G_{сн}$ желаемой ЛАХ: $G_{о.с} = G_{н.о.хв} - G_{сн}$.

На основании (11.29), например, расчет ЛАХ параллельного корректирующего устройства ($G_{о.с} = -G_K - G_{о.хв}$) заключается в следующем:

Передаточная функция для огибающей переменного тока	АФХ для огибающей	ЛАХ и ЛФХ для огибающей
$K(s) = \frac{T_{\text{ЭКВ}} s}{1 + T_{\text{ЭКВ}} s}$		
$K(s) = \frac{k_{\text{ЭКВ}}}{1 + T_{\text{ЭКВ}} s},$ где $k_{\text{ЭКВ}} = \frac{T_1}{T_1 + T_2};$ $T_{\text{ЭКВ}} = \frac{2T_1 T_2}{T_1 + T_2}$		

а) наносится ЛАХ нескорректированной разомкнутой системы $G_{\text{н.с.}}$;

б) строится желаемая ЛАХ $G_{\text{с.к.}}$;

в) после вычитания из желаемой ЛАХ ординат ЛАХ нескорректированной системы определяется ЛАХ эквивалентного последовательного корректирующего устройства $G_{\text{к.}}$;

г) строится ЛАХ звеньев, охваченных параллельным корректирующим устройством $G_{\text{о.хв.}}$;

д) графически суммируются ординаты ЛАХ охваченных звеньев и эквивалентного последовательного корректирующего устройства;

е) строится ЛАХ, обратная по знаку полученной в п. д; она является характеристикой параллельного корректирующего устройства $G_{\text{о.с.}}$.

Далее, независимо от способа, примененного при построении $G_{\text{о.с.}}$, необходимо:

1) проверить устойчивость внутреннего замкнутого контура после построения фазо-частотной характеристики $(\varphi_{\text{о.с.}} + \varphi_{\text{о.хв.}})$ и ЛАХ в виде $(G_{\text{о.с.}} + G_{\text{о.хв.}})$;

2) определить ЛАХ внутреннего замкнутого контура $G_{з.к.}$, используя номограммы замыкания (см. рис. 7.5);

3) получить уточненную ЛАХ скорректированной системы $G'_{ск}$ и построить ЛФХ скорректированной системы $\Phi_{ск}$;

4) уточнить запасы по модулю, по фазе и определить показатели качества переходного процесса;

5) по виду ЛАХ параллельного корректирующего устройства (п. е) из справочных таблиц выбрать тип корректирующего устройства и по частотам сопряжения найти его параметры.

Для сохранения порядка астатизма системы при введении параллельного корректирующего устройства необходимо, чтобы порядок нуля его передаточной функции $K_{о.с}(p)$ при $p = 0$ был не ниже порядка полюса передаточной функции охваченных звеньев $K_{охв}(p)$ при $p = 0$.

Для системы с перекрещивающимися обратными связями необходимо предварительно преобразовать структурную схему к виду системы с неперекрещивающимися обратными связями; однако при этом решение задачи очень усложняется. В некоторых случаях для приближенного определения ЛАХ скорректированной системы $G_{ск}$ в интервале существенных частот можно воспользоваться равенством [учитывая (11.26)]:

$$W_{охв}(p) = K_{охв}(p) / [K_{охв}(p) K_{о.с}(p) + 1], \quad (11.31)$$

или

$$W_{охв}(p) \approx 1 / K_{о.с}(p), \quad (11.32)$$

где $W_{охв}(p)$ — передаточная функция замкнутого внутреннего контура.

На основании (11.32) характеристика $G_{з.к.}$ для внутреннего контура определяется по п. д ($G_{з.к.} \approx -G_{о.с.}$).

Пример 11.3. Рассмотрим синтез параметров параллельного корректирующего устройства (обратной связи) для системы (см. рис. 11.10) с передаточной функцией при разомкнутом состоянии [Л.2]:

$$K_{ис}(p) = \frac{k_1 k_2 k_3 k_4}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p) T_4 p},$$

где $k_1 = 3$; $k_2 = 20$; $k_3 = 8$; $k_4 = 1$; $T_1 = 0,015$; $T_2 = 0,003$; $T_3 = 0,1$; $T_4 = 0,5$ сек.

Скорректированная система должна иметь следующие показатели качества при единичном задающем воздействии: перерегулирование $\sigma = 25\%$; время переходного процесса $t_p = 0,7$ сек. После подстановки значений параметров получим

$$K_{ис}(p) = \frac{960}{p(1 + 0,015p)(1 + 0,003p)(1 + 0,1p)}. \quad (11.33)$$

Чтобы построить ЛАХ нескорректированной системы $G_{ис}$ по (11.33), определим частоты сопряжения

$$\omega_{с1} = \frac{1}{0,1} = 10 \text{ 1/сек}; \quad \omega_{с2} = \frac{1}{0,015} = 66,5 \text{ 1/сек}; \quad \omega_{с3} = \frac{1}{0,003} = 333 \text{ 1/сек}.$$

На рис. 11.11 по указанным значениям частот сопряжения построена ЛАХ нескорректированной системы с учетом того, что при $\omega = 1$ 1/сек ордината равна $20 \lg 960 = 20.2,982 = 59,64$ дб.

Далее строим желаемую ЛАХ скорректированной системы по заданным $\sigma\%$ и t_p . По рис. 11.8, а для $\sigma = 25\%$ и указанным ранее формулам находим

$$T_{\max} = 2,8\pi/\omega_{cp}; \quad \omega_{cp} = 2,8\pi/0,7 = 12,5 \text{ 1/сек}.$$

Пользуясь номограммой (см. рис. 11.8, б), определяем запасы по амплитуде и по фазе $h = G_1 - G_2 = 16$ дб; $\gamma = 45^\circ$.

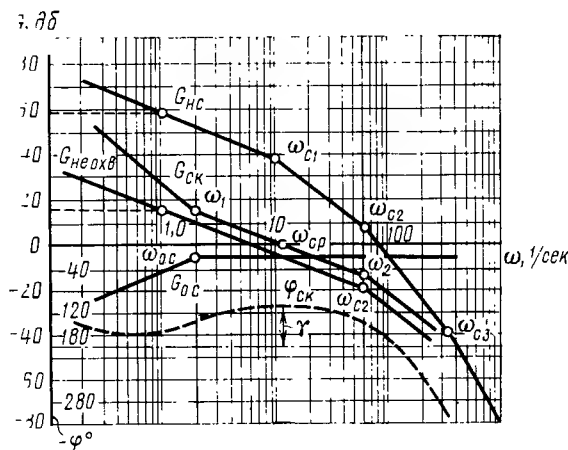


Рис. 11.11

На рис. 11.11 построена желаемая ЛАХ скорректированной системы $G_{ск}$, проходящая через точку $\omega_{cp} = 12,5$ 1/сек с наклоном -20 дб/дек и удовлетворяющая условию

$$-16 \text{ дб} < G_{ск}(\omega) < 16 \text{ дб} \text{ для } \omega_1 = 2 \text{ 1/сек, } \omega_2 = 66,5 \text{ 1/сек}.$$

При этом $\varphi_{ск}(\omega_{cp}) = -(180^\circ - \gamma^\circ) = -135^\circ$.

На этом же рисунке построена ЛАХ неохваченных звеньев:

$$K_{неохв}(p) = \frac{k_1}{T_4 p (1 + T_1 p)} = \frac{6}{p (1 + 0,015 p)}.$$

Определяем контрольные точки для ЛАХ неохваченных звеньев $G_{неохв}$: при $\omega = 1$ 1/сек амплитуда равна $20 \lg 6 = 20.0,778 = 15,6$ дб; частота сопряжения $\omega'_{c1} = 1/0,015 = 66,5$ 1/сек $\approx \omega_{c2}$.

Наклон $G_{неохв}$ на участке до ω'_{c1} равен -20 дб/дек и на участке $\omega > \omega'_{c1}$ равен -40 дб/дек.

На основании (11.30) определяем $G_{ос}$, вычитая ординаты $G_{ск}$ из ординат $G_{неохв}$ (см. рис. 11.11).

Для проверки устойчивости внутреннего замкнутого контура строим $G_{охв}$ и суммируем с $G_{ос}$ (рис. 11.12). При этом для охваченных звеньев

$$K_{охв}(p) = \frac{k_2 k_3}{(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)} = \frac{20.8}{(1 + 0,003 p)(1 + 0,1 p)},$$

откуда находим контрольные точки ЛАХ охваченных звеньев $G_0 = 20 \lg 160 = 20.2,04 = 40,8$ дб;

$$\omega_{c1} = \frac{1}{0,1} = 10 \text{ 1/сек}; \quad \omega_{c3} = \frac{1}{0,003} = 333 \text{ 1/сек}.$$

После суммирования $G_{охв}$ и $G_{о.с}$ получаем $(G_{охв} + G_{о.с})$ для разомкнутого внутреннего контура (рис. 11.12) и убеждаемся, что он устойчив при замкнутой внутренней обратной связи, так как фаза $\varphi_{вн}(\omega) = \varphi_{о.с}(\omega) + \varphi_{охв}(\omega)$ не превышает значения -180° .

Построив ЛАХ и ЛФХ для внутреннего замкнутого контура и просуммировав с ЛАХ и ЛФХ неохваченных звеньев, получим уточненную ЛАХ и ЛФХ скорректированной системы и уточним запасы по амплитуде и по фазе. Далее построим переходную характеристику скорректированной системы и уточним показатели качества.

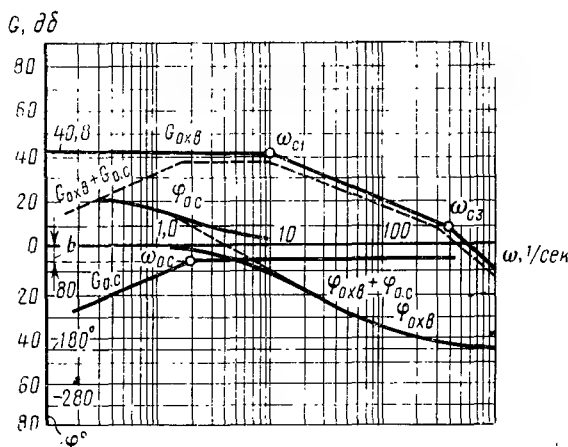


Рис. 11.12

Реализовать полученное параллельное корректирующее устройство по $G_{о.с}$ (см. рис. 11.11) можно в случае электрических звеньев $K_2(p)$ и $K_3(p)$ системы (см. рис. 11.10) с помощью пассивной электрической цепи RC с передаточной функцией (см. табл. 11.2):

$$K_{о.с}(p) = \alpha_{о.с} T_{о.с} p / (1 + T_{о.с} p),$$

где $T_{о.с} = 1/\omega_{о.с}$; $20 \lg \alpha_{о.с} = b$.

На основании рис. 11.12 находим $\omega_{о.с} = 2 \text{ 1/сек}$; $b = 6 \text{ дБ}$, поэтому

$$\left. \begin{aligned} T_{о.с} &= 0,5 \text{ сек} = (R_1 + R_2) C; \\ \alpha_{о.с} &= 0,5 = R_2 / (R_1 + R_2). \end{aligned} \right\} \quad (11.34)$$

Используя (11.34), можно при выбранном значении C , например, определить сопротивления R_2 и R_1 .

Для облегчения выбора типа корректирующего устройства по известной ЛАХ звена обратной связи в справочниках и задачниках [Л. 33, 35] приведены таблицы схем корректирующих цепей и соответствующие им характеристики.

Аналогично можно выбирать тип и параметры параллельного согласно включенного корректирующего устройства (прямая дополнительная связь).

Если неравенство (11.26) несправедливо, то параметры обратной связи рассчитываются при помощи ЛФХ [Л. 2, 38].

§ 11.4. Синтез корректирующих устройств при помощи амплитудно-фазовых характеристик

В данном методе, предложенном проф. А. В. Фатеевым, действие корректирующего устройства на систему выявляется при сопоставлении амплитудно-фазовых характеристик нескорректированной и скор-

ректированной систем [Л. 2, 38]. Прежде чем определять параметры корректирующего устройства, необходимо построить АФХ $K_{ск}(j\omega)$ скорректированной системы. Это построение может быть выполнено по вещественной частотной характеристике замкнутой системы, отвечающей заданным показателям качества, т. е. запасу устойчивости по фазе γ и по модулю h , величине перерегулирования $\sigma_{\max}$ и времени переходного процесса t_p .

На рис. 10.18 приведена вещественная круговая диаграмма, по которой можно установить зависимость минимальной ординаты вещественной частотной характеристики $P_{\min}$ от заданного запаса устойчивости.

Чтобы ординаты характеристики $P(\omega)$ не превосходили по абсолютному значению $P_{\min}$, АФХ не должна заходить внутрь круга диаграммы с отметкой $P_{\min}$ (рис. 11.13). При этом заданные запасы устойчивости по амплитуде h (точка B) и по фазе γ (угол, образованный касательной в точке A к окружности $P_{\min}$) определяют область, в которую не должна заходить АФХ скорректированной системы.

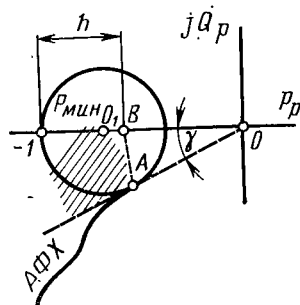


Рис. 11.13

Величины $P_{\min}$ и $P_{\max}$ связаны выражением (11.21) и совместно с коэффициентами формы вещественной частотной характеристики влияют на характер переходного процесса.

Известная АФХ нескорректированной системы $K_{нс}(j\omega)$ и полученная АФХ скорректированной системы $K_{ск}(j\omega)$ используются для выбора типа и параметров корректирующего устройства. На решение задачи влияет способ включения корректирующего устройства (последовательное или параллельное).

Последовательное корректирующее устройство. При включении последовательного корректирующего устройства частотная функция, определяющая АФХ скорректированной системы,

$$\{ K_{ск}(j\omega) = K_{нс}(j\omega) K_R(j\omega) \quad (11.35)$$

или

$$K_R(j\omega) = \frac{K_{ск}(j\omega)}{K_{нс}(j\omega)} = \frac{R_{ск}(\omega)}{R_{нс}(\omega)} e^{j[\varphi_{ск}(\omega) - \varphi_{нс}(\omega)]}. \quad (11.36)$$

Расчетным участком по формуле (11.36) является участок средних частот. Для определения АФХ корректирующих устройств на АФХ скорректированной и нескорректированной систем выбирают точки, отвечающие одной и той же частоте, например ω_1 на рис. 11.14. Находят модули $R_{ск}(\omega_1)$ и $R_{нс}(\omega_1)$, а также фазы $\varphi_{ск}(\omega_1)$ и $\varphi_{нс}(\omega_1)$. Подставляя эти значения в (11.36) и определяют модуль $R_R(\omega_1)$ и фазу $\varphi_R(\omega_1)$ корректирующего устройства при данной частоте ω_1 .

Подобным способом могут быть определены R_R и φ_R при других частотах и построена АФХ последовательного корректирующего устройства. По этой характеристике, используя табл. 11.2 [Л. 38],

где A_n и φ_n — амплитуда и фаза частотной функции изменяемой части системы; A_{nn} и φ_{nn} — амплитуда и фаза частотной функции неизменяемой части системы.

Вместо уравнения (11.45) имеем

$$K_{nn}(j\omega_0) = -1/K_n(j\omega_0). \quad (11.48)$$

В этом случае границы устойчивости будут соответствовать равенства

$$A_{nn}(\omega_0) = A_n^{-1}(\omega_0); \quad (11.49)$$

$$\varphi_{nn}(\omega_0) = \varphi_n^{-1}(\omega_0) = -\pi, \quad (11.50)$$

где $A_n^{-1}(\omega_0)$ и $\varphi_n^{-1}(\omega_0)$ — модуль и фаза отрицательной обратной АФХ изменяемой части системы.

Для неустойчивых систем и систем, не обеспечивающих заданные показатели качества, в некоторых случаях можно выполнить синтез корректирующих устройств по методу разделения частотных характеристик.

Частота среза $\omega_{ср}$ в этом случае рассчитывается обычным способом по заданным показателям качества (по перерегулированию $\sigma\%$, времени переходного процесса t_p) и специальным графикам (см. рис. 11.8, а), как и при использовании логарифмических частотных характеристик (см. § 11.4).

Расчет корректирующего устройства выполняется на основании следующих равенств, составленных по (11.49) и (11.50) с учетом запасов устойчивости, для частоты среза:

$$\varphi_{nn}(\omega_{ср}) - \varphi_n^{-1}(\omega_{ср}) = -(180^\circ - \gamma); \quad (11.51)$$

$$A_{nn}(\omega_{ср}) = h A_n^{-1}(\omega_{ср}), \quad (11.52)$$

где γ — запас устойчивости по фазе, который определяется по специальной номограмме (см. рис. 11.8) или задается, град;

h — запас по модулю ($h = 0,5$).

На основании выражений (11.51) и (11.52) и заданных частотных характеристик неизменяемой и изменяемой частей нескорректированной системы предварительно строятся соответствующие желаемые характеристики изменяемой части системы. Далее по исходным характеристикам и полученным характеристикам изменяемой части системы выбирается тип и определяются параметры корректирующего устройства.

Синтез последовательного корректирующего устройства. Для синтеза последовательного корректирующего устройства используем выражение

$$K_K(j\omega_{ср}) K_n(j\omega_{ср}) K_{nn}(j\omega_{ср}) = -1, \quad (11.53)$$

или

$$K_{n-k}(j\omega_{ср}) K_{nn}(j\omega_{ср}) = -1, \quad (11.54)$$

где

$$K_{n-k}(j\omega) = K_K(j\omega) K_n(j\omega). \quad (11.55)$$

На основании (11.54) запишем равенство

$$K_{н.к}(j\omega_{ср}) = -\frac{1}{K_{ни}(j\omega_{ср})} = -K_{ни}^{-1}(j\omega_{ср}). \quad (11.56)$$

Если $K_{к}(j\omega) = 1$, то $K_{н.к} = K_{н}(j\omega)$, поэтому сначала построим амплитудно-фазовые характеристики $-K_{ни}^{-1}(j\omega)$ и $K_{н}(j\omega)$.

На рис. 11.16 показаны $K_{н}(j\omega)$ и $-K_{ни}^{-1}(j\omega)$, из которых по соотношению модулей векторов $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ при частоте ω_0 устанавливаем, что требуется применить корректирующее устройство.

Сначала по заданным $\sigma\%$ и t_p определяем $\omega_{ср}$ и находим вектор $-K_{ни}^{-1}(j\omega_{ср})$. Этот вектор $\overline{OC}$ на основании (11.51) поворачиваем

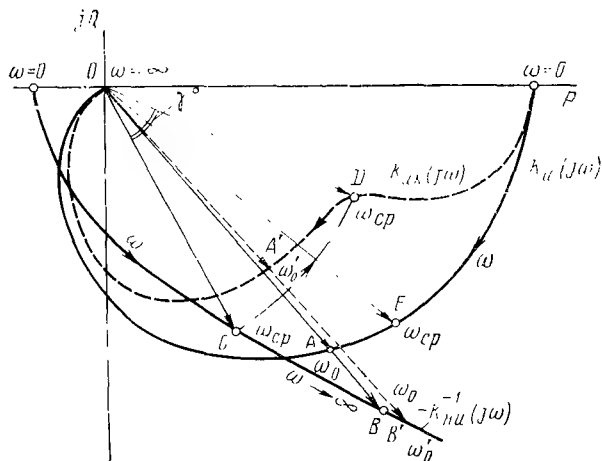


Рис. 11.16

против часовой стрелки на угол γ , соответствующий заданному запасу устойчивости по фазе. В результате этого получим вектор $\overline{OD}$, равный $K_{н.к}(j\omega_{ср})$. Далее находим вектор $K_{н}(j\omega_{ср})$, соответствующий $\omega_{ср}$ на АФХ изменяемой части системы (вектор $\overline{OE}$).

Если в соответствии с (11.55) записать

$$K_{к}(j\omega) = \frac{K_{н.к}(j\omega)}{K_{н}(j\omega)}, \quad (11.57)$$

то для частоты $\omega_{ср}$ определяем значение частотной функции последовательного корректирующего устройства

$$K_{к}(j\omega_{ср}) = \frac{K_{н.к}(j\omega_{ср})}{K_{н}(j\omega_{ср})} = \frac{A_{н.к}(\omega_{ср})}{A_{н}(\omega_{ср})} e^{j(\varphi_{н.к} - \varphi_{н})}, \quad (11.58)$$

или

$$A_{к}(\omega_{ср}) = \frac{A_{н.к}(\omega_{ср})}{A_{н}(\omega_{ср})}; \quad (11.59)$$

$$\varphi_{к}(\omega_{ср}) = \varphi_{н.к}(\omega_{ср}) - \varphi_{н}(\omega_{ср}). \quad (11.60)$$

Если принять $K_{н.к}(j0) = K_{н}(j0)$, то получим

$$A_{н}(0) = 1; \quad \varphi_{н}(0) = 0. \quad (11.61)$$

Примечание. В практике коррекции автоматических систем в качестве последовательных корректирующих устройств обычно используются интегро-дифференцирующие устройства, АФХ которых имеет вид окружности (см. табл. 11.2).

Используя выражение передаточной функции интегро-дифференцирующего устройства и его АФХ, можно по значениям $A_{н}(\omega_{ср})$, $\omega_{ср}$ и $\varphi_{н}(\omega_{ср})$ найти параметры устройства.

В результате применения последовательного корректирующего устройства АФХ изменяемой части системы $K_{н.к}(j\omega)$ будет иметь другой вид (см. штриховую на рис. 11.16). При этом можно найти некоторую частоту ω'_0 , для которой отношение модулей векторов $\overline{OA'}$ и $\overline{OB'}$ удовлетворяет заданному запасу устойчивости ($h \leq 0,5$).

Синтез параллельного корректирующего устройства. Для синтеза параллельного корректирующего устройства (звена обратной связи) используем выражение

$$\frac{K_{охв}(j\omega)}{1 + K_{о.с}(j\omega)K_{охв}(j\omega)} - K_{н.охв}(j\omega) = -1, \quad (11.62)$$

или

$$K_{н.к}(j\omega)K_{н.охв}(j\omega) = -1, \quad (11.63)$$

где

$$K_{н.к}(j\omega) = \frac{K_{охв}(j\omega)}{1 + K_{о.с}(j\omega)K_{охв}(j\omega)}. \quad (11.64)$$

Учитывая (11.63) и (11.64), построим АФХ звена обратной связи. Вместо (11.63) запишем

$$-K_{н.охв}(j\omega) = \frac{1}{K_{н.к}(j\omega)} = K_{н.к}^{-1}(j\omega). \quad (11.65)$$

Поскольку для нескорректированной системы $K_{охв}(j\omega) = K_{н.к}(j\omega)$, то в соответствии с (11.65) сначала построим $K_{охв}^{-1}(j\omega)$ и $-K_{н.охв}(j\omega)$. На рис. 11.17, а построены характеристики $K_{охв}^{-1}(j\omega)$ и $-K_{н.охв}(j\omega)$, из которых по соотношению векторов $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ при частоте ω_0 можно установить, что требуется применить корректирующее устройство. Сначала по заданным $\sigma\%$ и t_p определим $\omega_{ср}$ и найдем вектор $-K_{н.охв}(j\omega_{ср})$. Затем этот вектор $\overline{OC}$ в соответствии с (11.51) повернем по часовой стрелке на угол γ , равный заданному запасу устойчивости по фазе. В результате этого получим вектор $\overline{OD}$, равный $K_{н.к}^{-1}(j\omega_{ср})$, а за-

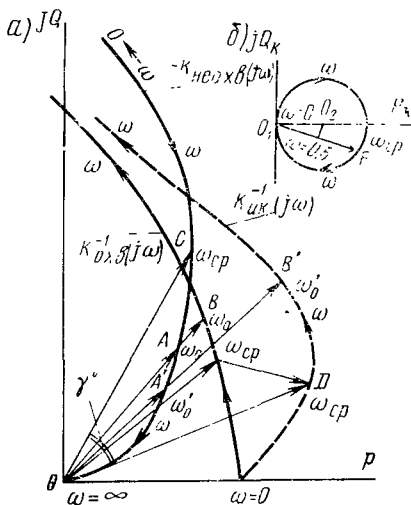


Рис. 11.17

тем по кривой $K_{\text{охв}}^{-1}(j\omega)$ для частоты $\omega_{\text{ср}}$ найдем вектор $\overline{OE}$. Используя (11.64), запишем выражение

$$K_{\text{о.с}}(j\omega) := K_{\text{и.к}}^{-1}(j\omega) - K_{\text{охв}}^{-1}(j\omega). \quad (11.66)$$

На основании (11.66) определим разность векторов (вектор $\overline{ED}$) $\overline{OD}$ для $K_{\text{и.к}}^{-1}(j\omega_{\text{ср}})$ и $\overline{OE}$ для $K_{\text{охв}}^{-1}(j\omega_{\text{ср}})$, которая соответствует $K_{\text{о.с}}(j\omega_{\text{ср}})$. Поскольку $K_{\text{и.к}}^{-1}(j0) = K_{\text{охв}}^{-1}(j0)$, то звено обратной связи является дифференцирующим, поэтому АФХ параллельного корректирующего устройства имеет вид окружности, проходящей через начало координат и конец вектора $\overline{OF}$, соответствующего $K_{\text{о.с}}(j\omega_{\text{ср}})$. По данным АФХ звена обратной связи (см. рис. 11.17, б), используя справочные таблицы (см. табл. 11.2), выбираем схему и определяем параметры необходимого параллельного корректирующего устройства.

В общем случае АФХ корректирующих устройств могут отличаться от указанных выше.

§ 11.6. Применение метода корневого годографа для синтеза корректирующих устройств

Ранее было установлено влияние нулей и полюсов на качество переходного процесса. Используя это свойство и свойства корневых годографов, можно выбирать параметры корректирующих устройств. При этом для заданного качества переходного процесса определяется сначала требуемое расположение вводимых нулей и полюсов, обусловливаемых корректирующим устройством, а затем параметры корректирующего устройства [Л. 37].

Синтез последовательных корректирующих устройств. При введении последовательных корректирующих устройств для одноконтурных систем используются основные положения метода корневого годографа. В зависимости от типа разрабатываемой автоматической системы выбирается тип последовательного корректирующего устройства. По заданным показателям качества переходного процесса на комплексной плоскости корней наносится желаемый полюс замкнутой системы, который является доминирующим в рассматриваемом случае и определяет в основном характер переходного процесса системы. Задается также коэффициент усиления разомкнутой системы.

1. Предположим, что требуется определить параметры последовательного корректирующего (дифференцирующего) устройства, передаточная функция которого

$$K_{\text{к}}(p) = k_{\text{к}} \frac{1 + T_{\text{к}} p}{1 + T_{\text{к}} k_{\text{к}} p}, \quad (11.67)$$

где $k_{\text{к}} < 1$.

Для известной передаточной функции $K_{\text{ис}}(p)$ разомкнутой некорректированной системы определяются нули и полюсы и наносятся на

комплексной плоскости корней. Рассмотрим простой случай, когда

$$K_{nc}(p) = K_1 p (1 + T_1 p) (1 + T_2 p), \quad (11.68)$$

где K , T_1 и T_2 — коэффициент усиления и постоянные времени, величины которых известны.

Передачная функция разомкнутой скорректированной системы

$$K_{ск}(p) = K_K(p) K_{nc}(p) = \frac{k_K K (1 + T_K p)}{p (1 + T_K k_K p) (1 + T_1 p) (1 + T_2 p)}. \quad (11.69)$$

При использовании метода корневого годографа (11.69) преобразуется к выражению, в котором коэффициенты при переменной p равны единице:

$$K_{ск}(p) = \frac{K}{T_1 T_2} \cdot \frac{1/T_K + p}{p \left(\frac{1}{k_K T_K} + p \right) \left(\frac{1}{T_1} + p \right) \left(\frac{1}{T_2} + p \right)}. \quad (11.70)$$

Желаемый (доминирующий) полюс замкнутой системы определяется по заданным показателям качества переходного процесса в предпо-

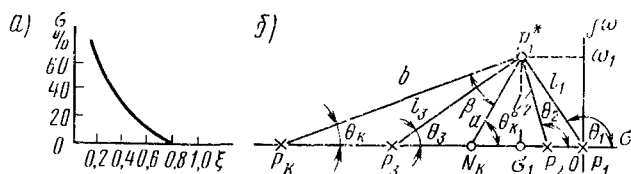


Рис. 11.18

ложении, что процесс в основном характеризуется парой комплексных корней. При этом вещественная часть комплексного корня (желаемого) находится приблизительно по заданному времени t_p :

$$\sigma_1 \approx 3/t_p.$$

Мнимая часть желаемого корня определяется по заданной величине показателя затухания ξ , которая по величине обратна колебательности:

$$\xi = \sigma_1/\omega_1 \text{ или } \omega_1 = \sigma_1/\xi.$$

Чтобы получить ξ при заданной величине перерегулирования $\sigma\%$, можно использовать график $\sigma\% = f(\xi)$, вычисленный для системы второго порядка (рис. 11.18, а).

По полученным значениям σ_1 и ω_1 на комплексной плоскости наносится желаемый полюс p^* замкнутой системы, соответствующий заданному значению K . На этой же плоскости, исходя из (11.68), наносятся полюса нескорректированной системы (рис. 11.18, б).

Используя основные выражения корневого годографа, на основании (11.70) запишем для корня p_1^*

$$\left| \frac{c (T_k^{-1} \vdash p_1^*)}{p_1^* (k_k^{-1} T_k^{-1} \vdash p_1^*) \cdot (T_1^{-1} \vdash p_1^*) (T_2^{-1} \vdash p_1^*)} \right| = 1; \quad (11.71)$$

$$\sum_{j=1}^m 0_j^0 - \sum_{i=1}^n 0_i \vdash 0_k^0 - 0_k = \pm (2k + 1) 180^\circ, \quad (11.72)$$

где $c = K/(T_1 T_2)$ — эквивалентный коэффициент; $\sum 0_j^0$ — сумма углов, образованных лучами, проведенными из точки полюса p_1^* к точкам нулей разомкнутой нескорректированной системы (в рассматриваемом случае равна нулю); $\sum 0_i$ — сумма углов, образованных лучами, проведенными из точки полюса p_1^* к точкам полюсов разомкнутой нескорректированной системы; 0_k^0 — угол, образованный лучом, проведенным из точки полюса p_1^* в точку нуля N_k корректирующего устройства; 0_k — угол, образованный лучом, проведенным из точки полюса p_1^* в точку полюса P_k корректирующего устройства.

Так как параметры корректирующего устройства неизвестны, установим взаимосвязь между неизвестными углами 0_k и 0_k^0 [Л. 37]. Рассмотрим треугольник $P_k p_1^* N_k$, запишем

$$\beta = 0_k^0 - 0_k.$$

Вместо уравнения (11.72) запишем

$$\beta = -(2k + 1) 180^\circ + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3. \quad (11.73)$$

При выборе параметров корректирующего устройства стараются расположить нуль N_k возможно ближе к полюсу с наименьшим модулем, что позволит скомпенсировать влияние этого полюса. Действие корректирующего устройства, выполненного в виде дифференцирующего звена [см. (11.67)], тем эффективнее, чем дальше от начала координат находится следующий полюс (P_3) разомкнутой системы. При близком расположении полюсов (P_2 , P_3 , ...) может потребоваться введение двух и более последовательных корректирующих устройств.

2. Предположим, что требуется определить параметры последовательного корректирующего устройства, передаточная функция которого

$$K_k(p) = (1 \vdash T_k p) / (1 \vdash k_k T_k p), \quad (11.74)$$

где $k_k > 1$.

Это устройство позволяет ввести близко расположенные нуль N_k и полюс P_k (корректирующий диполь). Последний помещается очень близко к началу координат, что придаст системе свойства астатизма. Так как нуль и полюс диполя расположены близко друг к другу, то их влияние на динамику незначительно (см. § 8.18).

Для определения места расположения диполя используется корневой годограф нескорректированной системы. По заданным показателям качества находится желаемый полюс замкнутой системы, расположение диполя на вещественной оси и далее вычисляются значения параметров корректирующего контура.

Пример 11.4. Пусть передаточная функция нескорректированной системы

$$K_{nc}(p) = \frac{K}{p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}, \quad (11.75)$$

где $K = 5$; $T_1 = 0,5$; $T_2 = 0,166$ сек. Заданное время переходного процесса $t_p = 4$ сек; затухание $\xi = 0,6$.

Преобразуем (11.75) к виду

$$K_{nc}(p) = \frac{5}{0,5 \cdot 0,166 p(2 + p)(6 + p)} = \frac{c}{p(2 + p)(6 + p)}, \quad (11.76)$$

где $c = K/(T_1 T_2)$ — постоянная величина для нескорректированной системы.

По (11.76), используя основные свойства корневого годографа, построим график корневых годографов нескорректированной системы (рис. 11.19). На этом графике напечатаем линию заданного затухания

$$\xi = \sigma/\omega = 0,6.$$

На этой линии определяем точку p^*_1 , соответствующую ближайшему к мнимой оси полюсу замкнутой скорректированной системы

$$\sigma_1 = 3/t_p \approx 3/4 \approx 0,74.$$

Таким образом, получим доминирующий полюс замкнутой скорректированной системы, определяющий в основном переходный процесс с заданными ξ и t_p . Следует отметить, что рассматриваемая коррекция возможна, если σ_1 меньше наибольшего (по абсолютной величине) значения $\sigma_{\max}$, соответствующего точке разветвления корневых годографов нескорректированной системы. После этого рекомендуется из точки p^*_1 провести линию под углом около 10° к линии заданного затухания ξ . Ее пересечение с осью абсцисс определяет место расположения нуля искомого диполя $N_K \approx -0,22$.

Чтобы определить полюс диполя P_K , запишем передаточную функцию разомкнутой скорректированной системы на основании (11.74) и (11.76):

$$K_{ск}(p) = \frac{c}{p(2 + p)(6 + p)} \cdot \frac{N_K + p}{k_K(P_K + p)} = c' \frac{N_K + p}{p(2 + p)(6 + p)(P_K + p)}, \quad (11.77)$$

где $c' = c/k_K$ — постоянная величина для скорректированной системы.

Чтобы приблизительно определить c' , на графике корневых годографов (см. рис. 11.19) для точки p^*_1 полагаем, что P_K находится в начале координат. Тогда с учетом масштаба по осям

$$c' = l'_1 l'_2 l'_3 l'_{P_K} / l'_{N_K} \approx 13,2.$$

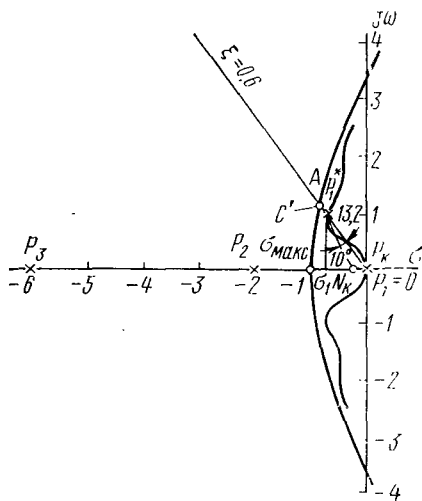


Рис. 11.19

Величину c' приближенно можно определить также по точке A корневого годографа нескорректированной системы

$$c' = l_1 l_2 l_3 \approx 13,2.$$

На основании (11.76) и (11.77)

$$c' = c/k_R = K/(T_1 T_2 k_R),$$

откуда

$$k_R = K/(c' T_1 T_2) = 5/(13,2 \cdot 0,5 \cdot 0,166) = 4,56.$$

Для уточнения места расположения полюса диполя P_R используем полученные значения $N_R = -0,22$ и $k_R = 4,56$, так как [см. (11.74)]

$$\left. \begin{aligned} N_R &= 1/T_R; \\ P_R &= -1/(k_R T_R), \end{aligned} \right\} \quad (11.78)$$

откуда $N_R/P_R = -k_R$ или $P_R = -N_R/k_R = -0,22/4,56 = -0,0483$.

С учетом (11.78) и значений N_R , P_R и k_R определяем основные параметры корректирующего устройства:

$$\left. \begin{aligned} T_R &= 1/|N_R| = 1/0,22 = 4,54 \text{ сек}; \\ k_R &= 1/[|P_R| T_R] = 1/(0,0483 \cdot 4,54) \approx 4,56. \end{aligned} \right\} \quad (11.79)$$

3. Интегро-дифференцирующая последовательная коррекция представляет собой комбинацию дифференцирующей и интегрирующей коррекции (комбинированный контур). Этот вид коррекции применяется в тех случаях, когда одновременно требуется существенно повысить коэффициент усиления и сдвинуть влево от мнимой оси доминирующие полюса замкнутой системы, т. е. увеличить быстродействие и уменьшить перерегулирование. Первое обеспечивается введением диполя, второе — компенсацией ближайшего к мнимой оси вещественного полюса неизменной части разомкнутой системы. Расчет можно производить последовательно, выбрав сначала соответственно заданным показателям качества для желаемого полюса скорректированной замкнутой системы нуль и полюс дифференцирующего устройства. Далее относительно этого же желаемого полюса следует определить место расположения диполя интегрирующего устройства, что позволит найти параметры интегро-дифференцирующего устройства [Л. 37].

В более общих случаях, когда требуется ввести корректирующее устройство сложного типа для компенсации комплексных полюсов с помощью комплексных нулей корректирующего устройства, решение задачи усложняется. При этом иногда применяют сочетание частотного метода и метода корневого годографа, а выбор параметров корректирующего устройства по его передаточной функции производят методами синтеза электрических цепей.

Синтез параллельных корректирующих устройств. Заданное качество процесса управления наиболее часто обеспечивается с помощью гибких обратных связей, которые позволяют ввести нули в передаточную функцию разомкнутой системы и частично или полностью компенсировать нежелательные полюса. На рис. 11.20 приведена структурная схема системы с гибкой обратной связью, охватывающей все звенья системы. Для применения метода корневого годографа к данной систе-

ме передаточную функцию разомкнутой системы записывают относительно задающего воздействия и суммарного сигнала обратных связей:

$$K_{\text{сн}}(p) = X_{\text{о.с}}(p) / X_{\text{вх}}(p) = KK(p) (1 - T_{\text{о.с}} p). \quad (11.80)$$

Таким образом, гибкая обратная связь привела к появлению конечного нуля $N = -T_{\text{о.с}}^{-1}$.

Значение искомого нуля N в плоскости корней выбирается так, чтобы наилучшим образом удовлетворить заданным показателям качества. Решение задачи в данном случае проще, чем при расчете параметров последовательного дифференцирующего устройства, рассмотренном выше. Параметр $T_{\text{о.с}}$ следует выбирать так, чтобы модуль вводимого нуля был примерно равен модулю ближайшего к мнимой оси вещественного полюса нескорректированной системы.

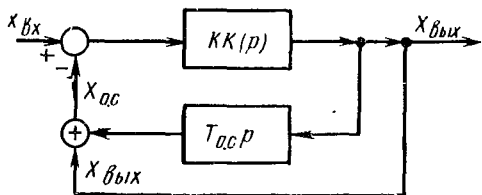


Рис. 11.20

Если гибкая обратная связь охватывает часть первых звеньев системы, то можно составить передаточную функцию разомкнутой системы также относительно суммарного сигнала обратных связей аналогично (11.80). В полученном выражении следует выбрать коэффициенты, определяемые обратной связью, с тем чтобы скомпенсировать нежелательные полюса разомкнутой системы [Л. 37].

Вопросы для самопроверки

1. Когда качество процесса управления считается неудовлетворительным?
2. Каким образом можно повысить точность автоматических систем?
3. Как можно использовать нормированные переходные характеристики и стандартные передаточные функции для выбора параметров системы по заданному качеству?
4. Что отображает запретная область на графике логарифмических частотных характеристик?
5. Как построить желаемую ЛАХ?
6. Поясните особенность синтеза последовательного корректирующего устройства методом ЛАХ.
7. Поясните синтез корректирующей обратной связи методом ЛАХ.
8. Какое допущение обычно принимается при расчете параллельных корректирующих устройств по методу ЛАХ?
9. Как выполнить синтез последовательных корректирующих устройств методом амплитудно-фазовых характеристик?
10. Как производится синтез обратной связи по методу АФХ?
11. Как производится синтез последовательных корректирующих устройств методом разделения частотных характеристик?
12. Как выполняется синтез корректирующей обратной связи методом разделения частотных характеристик?
13. Каким образом рассчитываются последовательные корректирующие устройства по корневым годографам?
14. В чем особенность синтеза параллельных корректирующих устройств методом корневых годографов?

МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ КРИВОЙ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА ЛИНЕЙНЫХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Кривая переходного процесса (переходная характеристика) может быть построена различными способами. Основными из них являются: операторный и частотный методы, математическое моделирование и др. Графо-аналитические методы и математическое моделирование, например, позволяют производить построение кривой переходного процесса как линейных, так и нелинейных систем.

§ 12.1. Операторный метод Лапласа

По известному изображению какой-либо переменной можно получить оригинал этой переменной в виде функции времени. При этом могут быть использованы формулы разложения Хевисайда либо формулы вычетов функции комплексного переменного.

При использовании операторного метода требуется определять полюса операторного изображения управляемой переменной. Обычно рекомендуется применять этот метод, если достаточно просто находятся корни уравнения. Если при исследовании устойчивости использовался метод корневого годографа, то значения корней характеристического уравнения замкнутой системы (полюсов изображения управляемой переменной) известны, и решение задачи операторным методом упрощается.

Пример 12.1. Рассчитаем переходный процесс системы стабилизации скорости двигателя (см. рис. 4.2) без коррекции с учетом численных данных, указанных в примере 8.1.

Изображение выходной переменной

$$\Delta\omega_d(p) = \frac{12}{p(0,0001p^5 + 0,0117p^4 + 0,188p^3 + 0,98p^2 + 1,8p + 7)} = \frac{B(p)}{pA(p)}. \quad (12.1)$$

Найдем корни знаменателя (полюса):

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= 0; & p_{2,3} &= -0,145 \pm j2,91; \\ p_4 &= -99,2; & p_{5,6} &= -8,75 \pm j2,39. \end{aligned} \right\} \quad (12.2)$$

Используя формулу разложения Хевисайда для случая, когда имеется один нулевой корень, получим

$$\Delta\omega_d(t) = \frac{B(0)}{A(0)} + \sum_{i=2}^6 \frac{B(p_i)}{p_i A'(p_i)} e^{p_i t} = 1,715 - 1,54 \cdot 10^{-5} e^{-99,2t} - 1,466 e^{-0,145t} \cos[(514t)^\circ - 35^\circ 20'] - 0,62 e^{-8,75t} \cos[(422t)^\circ - 35^\circ 30']. \quad (12.3)$$

По нулевым начальным условиям следует произвести проверку: $\Delta\omega_d(0) \approx -0,005$, т. е. ошибка расчетов составляет 0,5%, что можно допустить. Установившееся значение $\Delta\omega_d(\infty) = 1,715$.

Задаваясь в (12.3) значениями t от 0 до ∞ , вычислим и построим переходную характеристику. Полученная кривая 1 переходного процесса* (рис. 12.1, а) характеризует его качество: $\sigma \approx 72\%$; $t_p \approx 17$ сек.

Из-за малых запасов устойчивости нескорректированной системы переходный процесс является колебательным и имеет медленное затухание.

Для приближенного расчета полином $A(p)$ знаменателя (12.1) можно упростить, пренебрегая двумя первыми слагаемыми:

$$A_1(p) = 0,188p^3 + 0,98p^2 + 1,8p + 7. \quad (12.4)$$

Определим корни этого уравнения [первый корень соответственно (12.1) $p_1 = 0$]:

$$p_{2,3}' = -0,18 \pm j2,79; \quad p_4' = -4,85. \quad (12.5)$$

Сравнивая корни (12.5) с корнями (12.2), отмечаем, что доминирующая пара комплексных корней $p_{2,3}'$ имеет различие для вещественной части на 0,035 (или на 24%) и для мнимой части на 0,12 (или на 4,13%) по сравнению с корнями а)

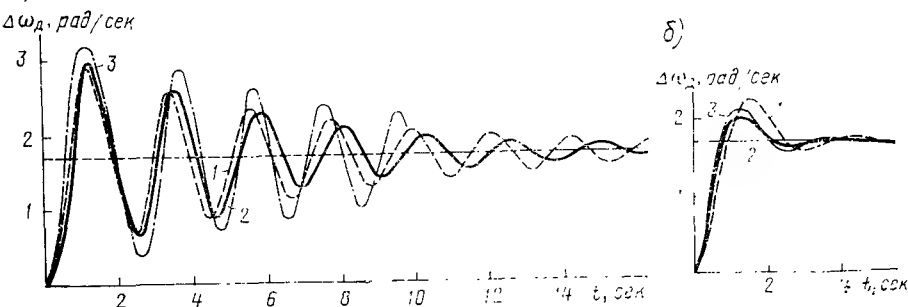


Рис. 12.1

$p_{2,3}$. Таким образом, следует ожидать, что при приближенном расчете длительность процесса будет меньше примерно на 20%, а частота затухающих колебаний — на 4%.

На основании (12.1) с учетом (12.4) и (12.5) переходный процесс системы при приближенном расчете будет определяться уравнением

$$\Delta\omega_d(t) = 1,715 - 0,436 e^{-4,85t} - e^{-0,18t} (0,858 \sin 2,79t + 1,279 \cos 2,79t). \quad (12.6)$$

Начальное и конечное значения, найденные по (12.6), совпадают с заданными.

По (12.6) построена кривая 2 переходного процесса (см. рис. 12.1, а), характеризующая его качество: $\sigma \approx 74\%$; $t_p \approx 14$ сек. Эта кривая также незначительно отличается от теоретической из-за неточности вычислений и построений длительности полупериодов различного переуправления отличается на 2,5%, время регулирования — на 20%. Следовательно, в случае приближенных расчетов переходных процессов аналитическим методом можно упростить полином знаменателя операторного изображения переменной, пренебрегая членами, коэффициенты которых в 100 раз и более меньше коэффициента при p , если устойчивость системы при этом не нарушается и система удовлетворяет условиям грубости в смысле А. А. Андропова**.

Пример 12.2. Рассчитаем переходный процесс для скорректированной системы. Используя данные примера 11.2, для системы автоматического регу-

* Следует иметь в виду наличие некоторых ошибок в расчетах и построении, поэтому кривая несколько отличается от теоретической (незначительное различие длительности полупериодов).

** Условия грубости в смысле Андропова означают, что при малых вариациях параметров устойчивость системы не нарушается.

лирования скорости двигателя с последовательным корректирующим устройством запишем изображение выходной переменной системы [для $\Delta U_0(p) = 1/p$]:

$$\Delta \omega_d(p) = \frac{12(p+1)}{p(0,00012p^6 + 0,014p^5 + 0,2747p^4 + 1,963p^3 + 5,25p^2 + 10,622p + 7)}.$$

Знаменатель полученного изображения упростим, пренебрегая двумя первыми членами. Приближенный расчет переходного процесса выполним по изображению:

$$\Delta \omega_d(p) = \frac{12(p+1)}{p(0,2747p^4 + 1,933p^3 + 5,25p^2 + 10,622p + 7)} = \frac{B(p)}{pA(p)}. \quad (12.7)$$

Знаменатель (12.7) определяет полюса

$$\left. \begin{aligned} p_1 = 0; \quad p_2 = -1,055; \quad p_3 = -4,17; \\ p_{4,5} = -0,85 \pm j2,27. \end{aligned} \right\} \quad (12.8)$$

Используя (12.7) и (12.8) по теореме разложения Хевисайда, найдем оригинал:

$$\Delta \omega_d(t) = \frac{B(0)}{A(0)} + \sum_{i=2}^5 \frac{B(p_i)}{p_i A'(p_i)} e^{p_i t} = 1,715 + 0,25e^{-1,055t} - 0,72e^{-4,17t} - 1,2e^{-0,85t} \cos[(130t)^\circ + 128^\circ 18'].$$

При $t = 0$ начальное значение $\Delta \omega_d(0) = -0,03$ соответствует ошибке расчета 1,76%, а конечное значение $\Delta \omega_d(\infty) = 1,715 \text{ рад/сек}$ равно заданному.

По уравнению (12.9) построена кривая 1 переходного процесса (рис. 12.1, б), характеризующая показатели качества: $\sigma \approx 30\%$, $t_p = 5,8 \text{ сек}$. Полученные значения совпадают с заданными при расчете корректирующего устройства (см. пример 11.2).

Построение кривой переходного процесса по корневым годографам. Если исследование устойчивости производилось методом корневого годографа, то можно применить графический способ вычисления коэффициентов функции переходного процесса по корневым годографам. Этот способ предполагает наличие нулевых начальных условий и учитывает нули и полюса операторного изображения выходной переменной для единичного входного воздействия. Переходная функция может быть определена по формуле разложения Хевисайда

$$h(t) = \frac{x_{\text{вых}}(t)}{x_{\text{вх}}} = L^{-1} \left[\frac{B(p)}{pA(p)} \right] = \frac{B(0)}{A(0)} + \sum_{i=1}^n \frac{B(p_i)}{p_i A'(p_i)} e^{p_i t}, \quad (12.10)$$

в которой значения корней p_i определяются по корневым годографам (см. § 8.18).

При вычислении коэффициентов переходной функции по корневым годографам используются длины и углы векторов, взятые из графика корневых годографов.

Пример 12.3. На рис. 8.22 представлен корневой годограф астатической системы четвертого порядка, передаточная функция в разомкнутом состоянии которой

$$KK(p) = \frac{2800K(p+4,8)}{p(p+10)(p+20)(p+67)} = \frac{B(p)}{pA(p)};$$

Для коэффициента усиления $K_{\Sigma} = 8,5$ определим корни характеристического уравнения (полюса передаточной функции) замкнутой системы: $p_{1,2} = -10 \pm j17,3 = -\sigma \pm j\omega_d$; $p_3 = -3,65$; $p_4 = -68$ и нуль $N_1 = -4,8$. Передаточная функция замкнутой системы [Л. 37]:

$$W(p) = \frac{X_{\text{вых}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)} = \frac{B_3(p)}{A_3(p)} = \frac{20\,600(p + 4,8)}{(p + 3,65)(p + 68)(p + 10 - j17,3)(p + 10 + j17,3)}, \quad (12.11)$$

где коэффициент 20 600 получен из условия $W(0) = 1$.

На основании (12.11) найдем $X_{\text{вых}}(p)$ при скачкообразном воздействии, а затем по (12.10) получим аналитическое выражение $x_{\text{вых}}(t)$.

Графический способ определения амплитуды составляющих в (12.10) с учетом (12.11) заключается в следующем. Обозначив

$$B_3(p_1)/[p_1 A_3'(p_1)] = A_1 e^{j\psi_1},$$

на основании графика корневого годографа (проведя из всех полюсов замкнутой системы, из начала координат и из нуля векторы, направленные к точке данного полюса p_1 , и далее, измерив длины векторов и углы относительно оси абсцисс), запишем (см. рис. 8.21):

$$A_1 = \frac{20\,600 l^{\circ}}{l_1 l_2 l_3 l_4} = \frac{20\,600 \cdot 18}{19,5 \cdot 31,6 \cdot 18 \cdot 5,60} = 0,5; \quad (12.12)$$

$$\psi_1 = 0^{\circ} - 0_1 - 0_2 - 0_3 - 0_4 = 106^{\circ} - 120^{\circ} - 90^{\circ} - 108^{\circ} - 11^{\circ} = -226^{\circ}. \quad (12.13)$$

Следовательно, слагаемое в (12.10), определяемое полюсом p_1 (корнем замкнутой системы),

$$A_1 e^{j\psi_1} e^{p_1 t} = 0,5 e^{-j226^{\circ}} e^{(-10 - j17,3)t}. \quad (12.14)$$

Слагаемое, определяемое сопряженным корнем p_2 , аналогично (12.14):

$$A_2 e^{j\psi_2} e^{p_2 t} = A_1 e^{-j\psi_1} e^{p_2 t} = 0,5 e^{-j226^{\circ}} e^{(-10 + j17,3)t}. \quad (12.15)$$

Слагаемые (12.14) и (12.15) вместе дают колебательную составляющую для $h(t)$:

$$2A_1 e^{-\sigma_1 t} \cos(\omega_d t + \psi_1) = 2 \cdot 0,5 e^{-10t} \cos(17,3t - 226^{\circ}).$$

Аналогично (12.12) и (12.13) вычислим слагаемые для корней p_3 и p_4 (см. рис. 8.21). Поскольку это вещественные корни, то $\psi_3 = 0$ и $\psi_4 = 0$.

В результате получим аналитическое выражение переходной функции [с учетом того, что $B_3(0)/A_3(0) = 1$]:

$$h(t) = 1 + 2 \cdot 0,5 e^{-10t} \cos(17,3t - 226^{\circ}) - 0,38 e^{-3,65t} + 0,08 e^{-68t},$$

по которому можно построить кривую переходного процесса.

Амплитуда составляющей переходного процесса определяется прежде всего расстоянием рассматриваемого корня до нуля (до нулей). В случае близкого расположения или совпадения какого-либо корня с нулем расстояние l_j° в (12.12) будет близким или равным нулю. Это означает, что амплитуда для составляющей данного корня близка или равна нулю и не влияет на переходный процесс. Следовательно, такие полюсы можно исключить из рассмотрения. При этом полюс и нуль считаются близкими, если расстояние между ними на порядок меньше их модуля:

$$0,1 |p_i| \geq |p_i - N_j| < 0,1 |N_j|.$$

Указанный метод построения переходного процесса пригоден также для автоматических систем с запаздыванием.

Если операторным методом определена переходная функция для предельной системы (полагая время запаздывания $\tau = 0$), то, подставив в полученное выражение вместо t разность $(t - \tau)$, найдем переходную функцию для системы с запаздыванием.

В общем случае, когда внешнее воздействие имеет произвольный вид, следует воспользоваться интегралом Дюамеля, определяющим переходный процесс как сумму реакций системы на скачкообразные воздействия.

§ 12.2. Метод трапецидальных вещественных частотных характеристик

Переходный процесс при единичном внешнем воздействии для нулевых начальных условий можно получить, определив интеграл

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega.$$

Вычислить этот интеграл в общем случае чрезвычайно сложно, поэтому обычно используют приближенный способ, основанный на аппроксимации вещественной частотной характеристики $P(\omega)$ несколькими линейными участками. Затем вещественную частотную характеристику представляют в виде суммы типовых трапеций. Для каждой из трапеций по таблицам строят кривые, применяя свойства вещественной частотной характеристики.

Трапецидальная характеристика определяется высотой $P(0)$ при частоте $\omega = 0$, интервалом равномерного пропускания ω_0 , интервалом положительности ω_n и коэффициентом наклона

$$\kappa = \omega_0 / \omega_n.$$

В интервале частот от 0 до ω_0 значение $P_1(\omega) = P(0) = \text{const}$. На участке от ω_0 до ω_n значение $P_2(\omega)$ изменяется по линейному закону

$$P_2(\omega) = P(0) \frac{\omega_n - \omega}{\omega_n - \omega_0}.$$

Для участка $\omega > \omega_n$ значение $P_3(\omega) = 0$.

На основании первого свойства вещественной частотной характеристики (см. § 10.9) для трапецидальной характеристики можно записать

$$P_m(\omega) = P_1(\omega) + P_2(\omega) + P_3(\omega) = P(0) + P(0) \frac{\omega_n - \omega}{\omega_n - \omega_0}.$$

Следовательно,

$$h(t) = \frac{2}{\pi} P(0) \int_0^{\omega_0} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega + \frac{2}{\pi} P(0) \int_{\omega_0}^{\omega_n} \frac{\omega_n - \omega}{\omega_n - \omega_0} \cdot \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (12.16)$$

После некоторых преобразований, с учетом обозначения интегрального синуса, вместо (12.16) получено [Л. 35]

$$h(t) = \frac{2}{\pi} P(0) \left[\text{Si}(\omega_0 t) + \left(\frac{\omega_n}{\omega_n - \omega_0} \right) (\text{Si} \omega_n t - \text{Si} \omega_0 t) + \frac{1}{\omega_n - \omega_0} \left(\frac{\cos \omega_n t - \cos \omega_0 t}{t} \right) \right]. \quad (12.17)$$

Для упрощения последующих вычислений и составления универсальных таблиц h -функций в (12.17) принимают $P(0) = 1$, $\omega_n = 1$, т. е. вводят понятие о единичной $P_m^1(\omega)$ трапеции, для которой справедливо выражение

$$h_0(\tau) = \frac{2}{\pi} \left[\text{Si} \kappa \tau + \frac{1}{1 - \kappa} \left(\text{Si} \tau - \text{Si} \kappa \tau + \frac{\cos \tau - \cos \kappa \tau}{\tau} \right) \right], \quad (12.18)$$

где $\tau = \omega_n t$ — безразмерное время.

По (12.18) составлены типовые универсальные таблицы h -функций [Л. 35] для различных значений κ . Краткая выписка h -функций для некоторых величин κ и τ дана в приложении 1.

Для известного значения κ реальной трапецидальной вещественной частотной характеристики $P(\omega)$ по таблице h -функций составляют таблицу переходной функции $h_0(\tau)$, соответствующей единичной трапеции. После этого, используя свойства $P(\omega)$, пересчитывают масштабы и получают функцию переходного процесса [умножают значения h_0 на $P(0)$ и делят время τ на ω_n]. Результаты пересчета $h_0(\tau)$ записывают в таблицу $h(t)$ переходной функции, по которой строят переходную характеристику при единичном внешнем воздействии.

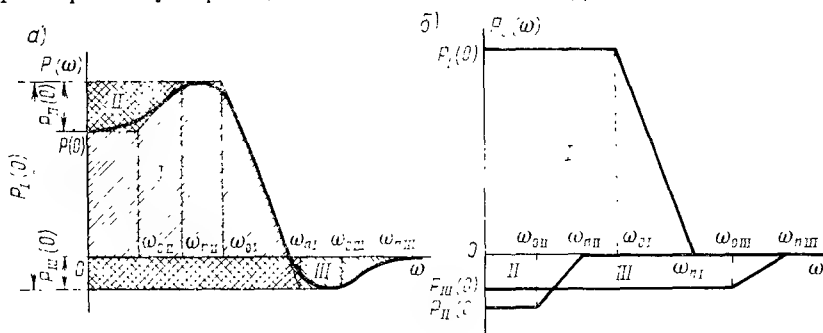


Рис. 12.2

Чтобы построить график в абсолютных единицах, следует ординаты кривой $h(t)$ умножить на базовое (номинальное или установившееся) значение управляемой переменной $X_{\text{внх.б}}$. В том случае, когда внешнее воздействие является скачкообразным, но неединичным, следует полученное значение $x_{\text{внх}}(t)$ умножить на величину воздействия, представленного в относительных единицах. Следовательно,

$$x_{\text{внх}}(t) = h(t) \frac{X_{\text{внх}}}{X_{\text{внх.б}}},$$

где $X_{\text{внх.б}}$ — базовое значение.

В большинстве случаев вещественная частотная характеристика $P(\omega)$ имеет сложную форму (рис. 12.2, а). При этом на основании 10.117 ее приближенно заменяют, например, тремя (I, II, III) трапециями (рис. 12.2, б), суммарная площадь которых равна площади, ограничиваемой действительной характеристикой $P(\omega)$.

Далее для каждой трапеции определяют переходную характеристику $h_i(t)$. Графически суммируя ординаты кривых $h_i(t)$ всех трапеций, получают результирующую кривую переходного процесса $h(t)$ автоматической системы (рис. 12.3). Трапеции, площадь которых является отрицательной, расположены ниже оси абсцисс (см. рис. 12.2, б), поэтому соответствующие им переходные характеристики также расположены ниже оси абсцисс и при суммировании ординат берутся с отрицательным знаком.

Если при $\omega \rightarrow \infty$ значение $P(\omega) \neq 0$ и имеет определенную величину (рис. 12.4, а), что характерно при возмущающем воздействии и для ошибки, то при составлении трапеций рассматривается площадь

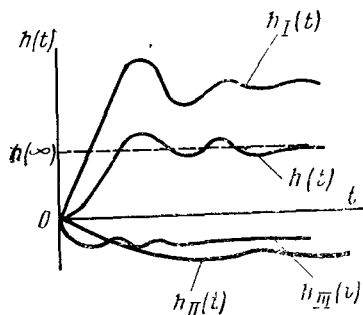


Рис. 12.3

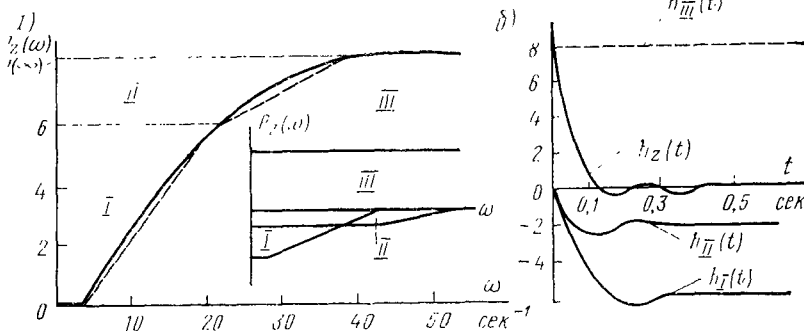


Рис. 12.4

относительно полосы, определяемой постоянной величиной $P(\infty)$. Переходная характеристика в этом случае будет иметь вид кривой, представленной на рис. 12.4, б.

В частном случае, когда $\kappa = 0$, частотные характеристики изображаются не в виде трапеций, а в виде треугольников. Для этого способа также вычислены соответствующие таблицы h -функций [Л. 10].

Пример 12.4. По данным примера 11.2 рассчитаем переходный процесс для скорректированной системы регулирования скорости двигателя.

На основании $G_{СК}$ и $\Phi_{СК}$ скорректированной системы (см. рис. 11.9) на логамме (рис. 12.5, а) построим кривую L , по которой определим вещественную частотную характеристику замкнутой системы (рис. 12.5, б). Заменим эту

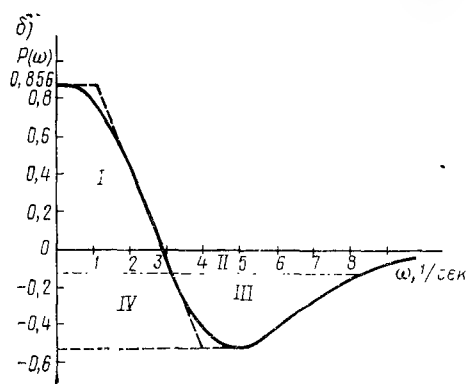
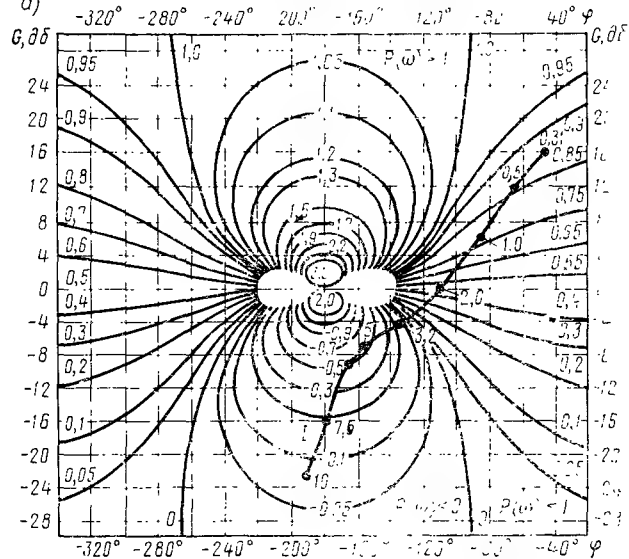


Рис. 12.5

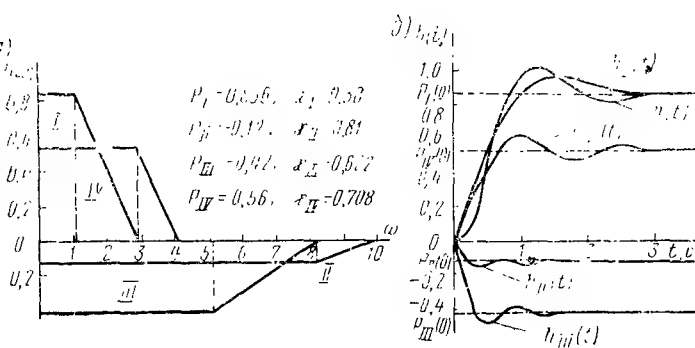


Рис. 12.6

кривую эквивалентными типовыми трапециями (рис. 12.6, а), по которым найдем значения $P_i(0)$; ω_{hi} и x_i для каждой трапеции. Далее для каждого значения x_i по таблице h -функций построим кривые $h_i(t)$. Графически суммируя их, получим кривую $h(t)$ переходного процесса скорректированной системы (рис. 12.6, б). На основании этой кривой с учетом структурной схемы и значения $k_{гг} = 0,5$ построим кривую $\Lambda_{\text{д}}(t)$ скорректированной системы (см. рис. 12.1, б, кривая 2), определяющую показатели качества: $\sigma \approx 17\%$, $t_p \approx 2,8 \text{ сек}$.

При малом числе трапеций расчет трапецидальным методом может дать значительное расхождение по сравнению с аналитическим расчетом. Для более точного расчета следует разбивать $P(\omega)$ на большее число трапеций. Полученная кривая несколько отличается от теоретической из-за приближенности метода расчета (длительности полупериодов различны по величине).

§ 12.3. Использование ЛАХ при построении переходного процесса

В некоторых случаях кривую переходного процесса можно рассчитать по логарифмическим характеристикам разомкнутой системы путем использования сопрягающих частот ЛАХ, типовых ЛАХ и универсальных кривых [Л. 33].

Использование сопрягающих частот. Данный метод является приближенным и пригоден в тех случаях, когда наклон участка ЛАХ около $\omega_{\text{ср}}$ составляет 20 дБ/дек. При этом исходную ЛАХ преобразовывают, отбрасывая участок для частот $\omega \geq \omega_{\text{ср}}$ и вводя в связи с этим эквивалентное дифференцирующее звено с сопрягающей частотой,

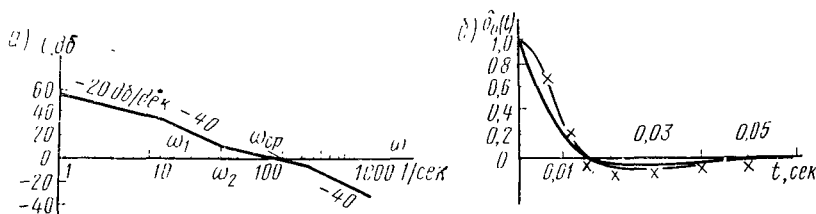


Рис. 12.7

равной $\omega_{\text{ср}}$. Далее считают, что передаточная функция, соответствующая преобразованной ЛАХ, равна обратной передаточной функции замкнутой системы для ошибки. Это позволяет найти изображение Лангаса для ошибки и построить переходный процесс.

Пример 12.5. Рассчитаем переходный процесс системы, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии [Л.33]

$$K(p) = \frac{K(1 + T_2 p)}{p(1 + T_1 p)(1 + T_3 p)}. \quad (12.19)$$

Пусть заданы параметры $K = 500 \text{ 1/сек}$; $T = 0,1 \text{ сек}$; $T_2 = 0,025 \text{ сек}$; $T_3 = 0,0025 \text{ сек}$ и построена ЛАХ разомкнутой системы (рис. 12.7, а). В разомкнутой системе частота среза $\omega_{\text{ср}} = 125 \text{ 1/сек}$ может быть представлена формулой [Л.33]

$$\omega_{\text{ср}} = KT_2/T_1.$$

Метод сопрягающих частот можно применять для определения переходной функции ошибки, если ЛАХ, проходящая через частоту $\omega_{\text{ср}}$, имеет наклон -20 дБ/дек и сохраняет его в диапазоне одной декады. В рассматриваемом при-

мере это условие выполняется. Участок ЛАХ правее $\omega_{\text{ср}}$ отбрасываем и заменяем горизонтальным участком, совпадающим с осью частот, т. е. вводим эквивалентное дифференцирующее звено с сопрягающей частотой, равной $\omega_{\text{ср}}$. Передаточная функция для преобразованной ЛАХ

$$K_{\text{пр}}(p) = \frac{K(1 + T_2 p) \left(1 + \frac{1}{\omega_{\text{ср}}} p\right)}{p(1 + T_1 p)}. \quad (12.20)$$

После преобразования и подстановки числовых значений

$$K_{\text{пр}}(p) = \frac{KT_2 \frac{1}{\omega_{\text{ср}}} \left(\frac{1}{T_2} + p\right) (\omega_{\text{ср}} + p)}{T_1 p \left(\frac{1}{T_1} + p\right)} = \frac{(p + \omega_2)(p + \omega_{\text{ср}})}{p(p + \omega_1)} = \frac{(p + 40)(p + 125)}{p(p + 10)},$$

где $\omega_1 = 1/T_1$; $\omega_2 = 1/T_2$.

Преобразованную передаточную функцию ошибки запишем приближенно при условии, что $K_{\text{пр}}(p) \gg 1$:

$$W_{\Delta x}(p) = \frac{1}{1 + K(p)} \approx \frac{1}{K_{\text{пр}}(p)} = \frac{p(p + 10)}{(p + 40)(p + 125)}.$$

Учитывая изображение для единичного входного воздействия, представим изображение Лапласа для ошибки

$$\delta(p) = \Delta X(p) \approx \frac{1}{K_{\text{пр}}(p)} \cdot \frac{1}{p} = \frac{p + 10}{(p + 40)(p + 125)}. \quad (12.21)$$

Используя таблицы изображений по Лапласу, найдем соответственно (12.21) выражение для оригинала

$$\frac{p + a_0}{(p + \alpha)(p + \gamma)} \Leftrightarrow \frac{(a_0 - \alpha)e^{-\alpha t} - (a_0 - \gamma)e^{-\gamma t}}{\gamma - \alpha}. \quad (12.22)$$

Учитывая (12.21) и подставляя $a_0 = 10$, $\alpha = 40$, $\gamma = 125$, запишем оригинал для ошибки

$$\delta_0(t) = 1,353e^{-125t} - 0,353e^{-40t}. \quad (12.23)$$

Изменяя t от 0 до ∞ , построим переходную характеристику для ошибки (рис. 12.7, б, сплошная линия). Если условие $K_{\text{пр}}(p) \gg 1$ не соблюдается, то в выражение (12.23) следует ввести поправку для диапазона $T_3 < t < T_2$, т. е. для $0,0025 \text{ сек} < t < 0,025 \text{ сек}$. Коэффициент поправки, на который умножается $\delta_0(t)$ в указанном диапазоне:

$$\rho = \left| \frac{K_{\text{пр}}(p)}{1 + K(p)} \right|_{p = j\omega_{\text{ср}}}.$$

Подставив выражения для $K(p)$ и $K_{\text{пр}}(p)$ с учетом числовых значений, получим $\rho = 1,485$.

Второе приближение для $\delta_0(t)$ с учетом поправки ρ в указанном диапазоне дает штриховую кривую (рис. 12.7, б). Для сравнения на рисунке крестиками отмечены значения, относящиеся к точному решению, полученному по выражению для ошибки в операторной форме при единичном входном воздействии

$$\delta_0(p) = X_{\text{вх}}(p) W_{\Delta x}(p) = \frac{1}{1 + K(p)} \cdot \frac{1}{p} = \frac{(1 + T_1 p)(1 + T_3 p)}{p(1 + T_1 p)(1 + T_3 p) + K(1 + T_2 p)}. \quad (12.24)$$

Следовательно, для приближенного определения переходной характеристики ошибки для некоторых систем можно использовать выражение, аналогичное (12.23), которое значительно проще точного выражения.

Использование универсальных кривых и типовых ЛАХ. Для автоматических систем, качество процесса регулирования которых является удовлетворительным, произведена классификация типовых ЛАХ и вычислены универсальные переходные характеристики, а также нормированные передаточные функции.

Тип каждой нормированной ЛАХ (рис. 12.8) обозначен буквой (А, В, С, D, Е, F) или последовательностью цифр (0, 1, 2, 3). Статическим системам соответствуют ЛАХ типов А и D; астатическим системам с астатизмом первого порядка соответствуют ЛАХ типов В и Е; астатическим системам с астатизмом второго порядка — ЛАХ типов С и F. Вводя условное обозначение в виде цифр для прямолинейных участков ЛАХ соответственно их наклонам (0 — горизонтальный участок; 1 — наклон 20 дБ/дек; 2 — наклон 40 дБ/дек; 3 — наклон 60 дБ/дек),

вместо типа А можно применять обозначение ЛАХ цифрами 0-2-1-2, вместо D — 0-2-1-3, вместо В — 1-2-1-2, вместо Е — 1-2-1-3, вместо С — 2-1-2 и вместо F — 2-1-3.

Типовые ЛАХ, построенные по нормированным передаточным функциям, получаютcя заменой в исходной функции $K(p)$ переменной p на q с учетом базовой частоты ω_0 по формуле $p = q\omega_0$ и введением относительных постоянных времени $\tau_i = \omega_0 T_i$. Соответственно параметрам (τ_i , $h = \tau_2/\tau_3$ и ω_{cp}/ω_0) в таблицах указываются значения показателя колебательности M [гл. 33].

Базовая частота, входящая в выражение нормированной передаточной функции, зависит от порядка астатизма. Соответственно указанному на рис. 12.8 расположению сопрягающих частот с учетом относительного времени τ_1 базовая частота может приближенно определяться из следующих формул:

для типов А и D

$$\tau_1 = \omega_0 T_1 \cdot \sqrt{K} \quad \text{или} \quad \omega_0 = 1/\sqrt{K/T_1};$$

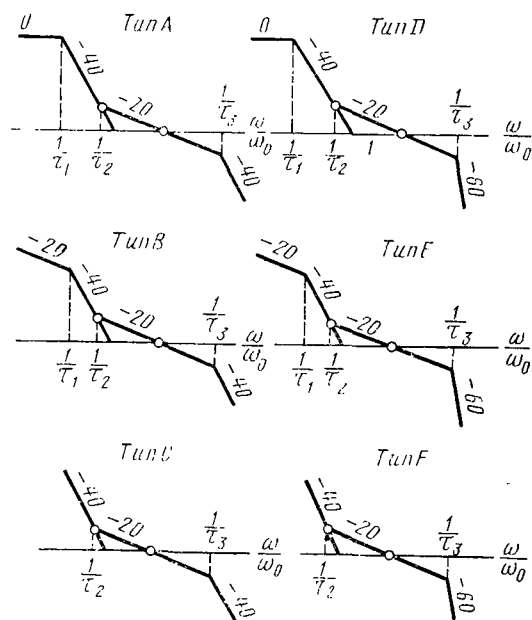


Рис. 12.8

для типов В и Е

$$\omega_0 \tau_1 = K = \omega_0^2 T_1 \text{ или } \omega_0 = \sqrt{K/T_1};$$

для типов С и F

$$\omega_0 = \sqrt{K}.$$

Для различных значений показателя колебательности M соответственно нормированным передаточным функциям построены универсальные переходные характеристики (рис. 12.9) при единичном входном воздействии и нулевых начальных условиях. По известным ω_0 и $\omega_{\text{ср}}$

$\omega_{\text{ср}}/\omega_0$	3,32	2,08	1,73	1,56
M	1,1	1,3	1,5	1,7

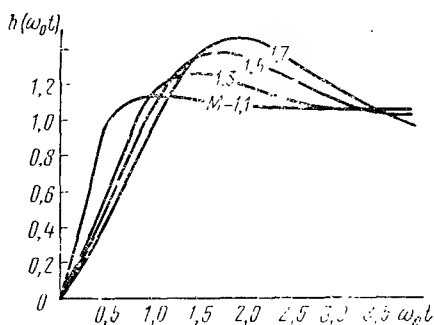


Рис. 12.9

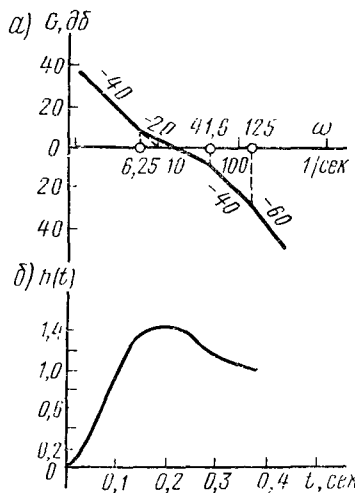


Рис. 12.10

определяется M , а затем по рис. 12.9 находится соответствующая универсальная переходная характеристика $h(\omega_0 t)$. Разделив для нее масштаб по оси абсцисс на ω_0 , получим искомую переходную характеристику автоматической системы.

Пример 12.6. Построим переходную характеристику $h(t)$ при единичном задающем воздействии для нулевых начальных условий астатической системы с астатизмом второго порядка, если передаточная функция разомкнутой системы

$$K(p) = \frac{K(1+T_2 p)}{p^2(1+T_1 p)(1+T_3 p)} = \frac{100(1+0,16p)}{p^2(1+0,024p)(1+0,008p)}, \quad (12.25)$$

где $K = 100$ 1/сек²; $T_1 = 0,024$ сек; $T_2 = 0,16$ сек; $T_3 = 0,008$ сек.

По (12.25) строим ЛАХ разомкнутой системы (рис. 12.10, а). Устанавливаем (см. рис. 12.8), что данная ЛАХ относится к типу С (2-1-2-3) с учетом дополнительного участка 60 дБ/дек. Определяем $\omega_{\text{ср}} = 16$ 1/сек (см. рис. 12.10, а) и вычисляем $\omega_0 = \sqrt{K} = 10$ 1/сек, а также $\tau_1 = \omega_0 T_1 = 0,24$; $\tau_2 = \omega_0 T_2 = 1,6$; $\tau_3 = \omega_0 T_3 = 0,08$. Протяженность участка с наклоном 20 дБ/дек равна $h = \tau_2/\tau_1 = 6,67$.

Находим отношение $\omega_{\text{ср}}/\omega_0 = 1,6$ и определяем диапазон $1,5 < M < 1,7$. По графику (см. рис. 12.9) отыскиваем некоторую универсальную кривую $h(\omega_0 t)$ между $M = 1,5$ и $M = 1,7$. Разделив абсциссы этой универсальной переходной характеристики на $\omega_0 = 10$ 1/сек, получаем $h(t)$ для рассматриваемой системы (рис. 12.10, б).

Кроме рассмотренных частотных методов, использующих типовые ЛАХ, для построения переходных процессов применяются нормированные переходные характеристики, которые соответствуют стандартным передаточным функциям с известными коэффициентами [Л. 33]. Если преобразованная передаточная функция разомкнутой системы совпадает со стандартной передаточной функцией, то переходный процесс исследуемой системы совпадает с нормированной переходной характеристикой.

§ 12.4. Метод математического моделирования

При математическом моделировании используется подобие дифференциальных уравнений, которыми описываются процессы, происходящие в реальном элементе и в модели. Чаще всего моделирование осуществляется с помощью специальных вычислительных машин непрерывного действия. Наиболее широко применяются электронные машины непрерывного действия типов МПТ, МН, ЭМУ, «Электрон» и др.

Все перечисленные машины построены на основе операционных усилителей. Операционный усилитель представляет собой усилитель постоянного тока с большим коэффициентом усиления (десятки и сотни тысяч). Например, в машине МН-7 коэффициент усиления операционного усилителя равен 47 тысячам. Как правило, операционный усилитель имеет три каскада усиления. Для выполнения необходимых операций (интегрирования, суммирования и умножения на постоянный коэффициент) усилитель снабжается соответствующими обратными связями.

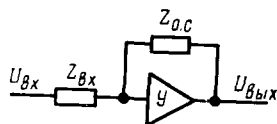


Рис. 12.11

Условное изображение операционного усилителя U с обратной связью показано на рис. 12.11, где $U_{вх}$ и $U_{вых}$ — напряжения на входе и выходе, моделирующие входную и выходную переменные; $Z_{вх}(p)$ — операторное сопротивление во входной цепи усилителя; $Z_{о.с.}(p)$ — операторное сопротивление в цепи обратной связи.

Передаточная функция операционного усилителя с обратной связью

$$K(p) = -Z_{о.с.}(p)/Z_{вх}(p). \quad (12.26)$$

Знак «—» в передаточной функции объясняется нечетностью числа каскадов операционного усилителя. Выходное напряжение операционного усилителя имеет полярность, противоположную полярности входного напряжения.

Передаточные функции операционных усилителей при различных сопротивлениях на входе и в цепи обратной связи (моделирование типовых звеньев). 1. Пусть $Z_{о.с.}(p) = R_{о.с.}$; $Z_{вх}(p) = R_{вх}$ (рис. 12.12), тогда на основании (12.26)

$$K(p) = -R_{о.с.}/R_{вх} = -k, \quad (12.27)$$

т. е. в данном случае имеем модель безынерционного звена с коэффициентом передачи $-k$. Причем, чем меньше $R_{вх}$ и больше $R_{о.с}$, тем больше коэффициент передачи.

2. Пусть $Z_{о.с}(p) = 1/C_{о.с}p$, $Z_{вх}(p) = R_{вх}$ (рис. 12.13), тогда на основании (12.26)

$$K(p) = -\frac{1/C_{о.с}p}{R_{вх}} = -\frac{1}{C_{о.с}R_{вх}p}. \quad (12.28)$$

Из (12.28) следует, что при включении конденсатора в обратную связь операционный усилитель является моделью интегрирующего звена.

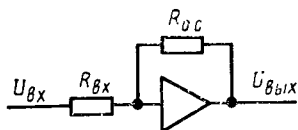


Рис. 12.12

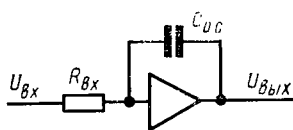


Рис. 12.13

3. Пусть $Z_{о.с}(p) = R_{о.с}$, $Z_{вх}(p) = 1/Cp$ (рис. 12.14), тогда на основании (12.26)

$$K(p) = -\frac{R_{о.с}}{1/C_{вх}p} = -R_{о.с}C_{вх}p. \quad (12.29)$$

Операционный усилитель в этом случае является моделью дифференцирующего звена. Однако такая схема обычно не используется, поскольку из-за помех она оказывается неработоспособной.

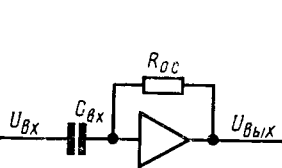


Рис. 12.14

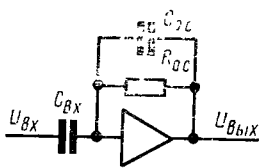


Рис. 12.15

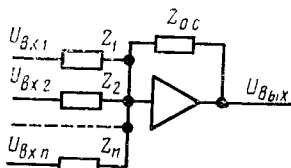


Рис. 12.16

Чтобы исключить влияние помех, можно в цепь обратной связи дополнительно включить конденсатор $C_{о.с}$ небольшой емкости (рис. 12.15), тогда при $C_{о.с} \ll C_{вх}$

$$K(p) \approx -R_{о.с}C_{вх}p. \quad (12.30)$$

4. В общем случае на вход операционного усилителя может быть подано одновременно несколько сигналов (рис. 12.16)

$$x_{вх} = \sum_{i=1}^n x_{вх i}.$$

При этом выходная переменная

$$X_{вых}(p) = -Z_{о.с}(p) \sum_{i=1}^n \frac{X_{вх i}(p)}{Z_{вх i}(p)}. \quad (12.31)$$

При активных сопротивлениях в обратной цепи и входных цепях получим суммирующий усилитель, или просто сумматор. При активных входных сопротивлениях и емкостном сопротивлении в цепи обратной связи имеем суммирующий интегратор.

Обычно в машинах сопротивления R и емкости C цепей обратных связей постоянны и равны 1 Мом или 1 мкф . В связи с этим коэффициенты передачи усилителей k зависят от входных сопротивлений. Поэтому на схемах над входными сопротивлениями или внутри прямоугольников, обозначающих сопротивления, можно указывать непосредственно коэффициент усиления модели звена (рис. 12.17).

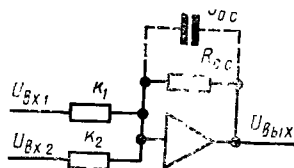


Рис. 12.17

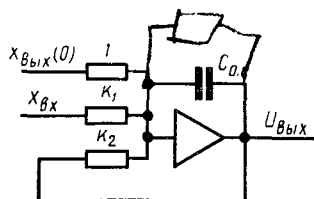


Рис. 12.18

Рассмотрим метод составления моделей инерционных звеньев.

На основании передаточной функции инерционного звена первого порядка

$$K(p) = k(1 + Tp)^{-1}$$

запишем операторное уравнение

$$TpX_{BYX}(p) + X_{BYX}(p) = kX_{BX}(p) + TX_{BYX}(0),$$

где $X_{BYX}(0)$ — начальное значение выходной переменной.

Преобразуем это уравнение к виду, удобному для моделирования, т. е. так, чтобы модель звена состояла из простейших моделей:

$$X_{BYX}(p) = \frac{1}{p} [k_1 X_{BX}(p) - k_2 X_{BYX}(p) + X_{BYX}(0)], \quad (12.32)$$

где $k_1 = k/T$; $k_2 = 1/T$ — коэффициенты, определяемые входными сопротивлениями.

Соответственно (12.32) модель инерционного звена первого порядка состоит из операционного усилителя, имеющего емкость в цепи обратной связи $C_{o.c.} = 1 \text{ мкф}$ и три входа с сопротивлениями $R_{BX1} = k^{-1}$; $R_{BX2} = k_2^{-1}$ и $R_{BX3} = 1$ (рис. 12.18).

Рассмотрим моделирование инерционного звена второго порядка. Для него передаточная функция

$$K(p) = k(T_1^2 p^2 + T_2 p + 1)^{-1}. \quad (12.33)$$

Преобразуем (12.33) так, чтобы звено можно было представить простейшими звеньями, охваченными обратной связью:

$$\begin{aligned}
 W(p) &= \frac{k}{T_1^2 p^2 + T_2 p + 1} = \frac{\frac{k}{T_1^2 p^2 + T_2 p}}{1 + \frac{1}{T_1^2 p^2 + T_2 p}} = \\
 &= k \frac{\frac{1}{T_2 p \left(\frac{T_1^2}{T_2} p + 1 \right)}}{1 + \frac{1}{T_2 p \left(\frac{T_1^2}{T_2} p + 1 \right)}} = k \frac{K(p)}{1 + K(p)}, \quad (12.34)
 \end{aligned}$$

где

$$K(p) = \frac{1}{T_2 p \left(\frac{T_1^2}{T_2} p + 1 \right)}.$$

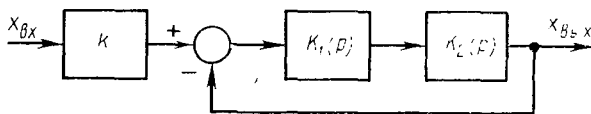


Рис. 12.19

Из (12.34) следует, что колебательное звено можно представить с помощью трех звеньев (рис. 12.19). При этом два звена с передаточными функциями

$$K_1(p) = \frac{1}{(T_1^2/T_2)p + 1} \text{ и } K_2(p) = 1/T_2 p$$

охвачены отрицательной обратной связью. Схема модели колебательного звена, состоящая из трех усилителей $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ и $\mathcal{U}_3$, соответствующая рис. 12.19, показана на рис. 12.20, где

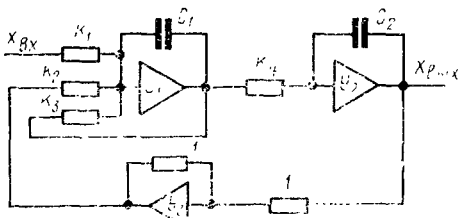


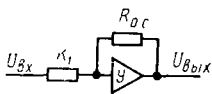
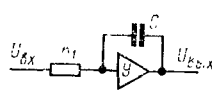
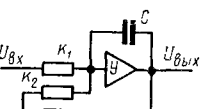
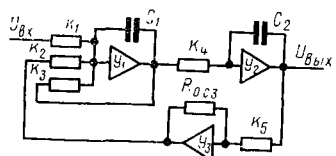
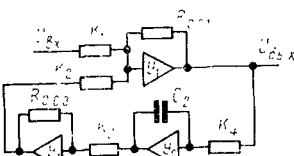
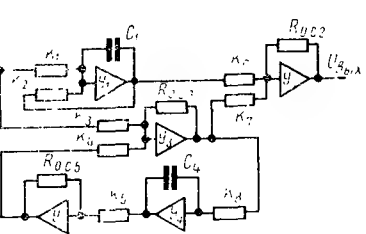
Рис. 12.20

$$\begin{aligned}
 k_1 &= k \frac{T_2}{T_1^2}; \quad k_2 = k_3 = \frac{T_2}{T_1^2}; \\
 k_4 &= \frac{1}{T_2}.
 \end{aligned}$$

Аналогично можно рассмотреть моделирование других звеньев (табл. 12.1).

Выбор машинных масштабов. Обычно максимальное напряжение операционного усилителя принимается равным 100 в, поэтому при моделировании необходимо предварительно выбрать масштабы величин из учета максимально допустимого напряжения. Из соображений

Схемы моделей типовых звеньев

Машинная схема	Передаточная функция	Коэффициенты модели
	$K(p) = -k$	$k_1 = k$
	$K(p) = -\frac{k}{p}$	$k_1 = k$
	$K(p) = -\frac{k}{Tp + 1}$	$k_1 = \frac{k}{T}$ $k_2 = \frac{1}{T}$
	$K(p) = \frac{k}{T_1^2 p^2 + T_2 p + 1}$	$k_1 = \frac{k}{T_1^2}$ $k_2 = \frac{1}{T_1^2}$ $k_3 = \frac{T_2}{T_1^2}$ $k_4 = k_5 = 1$
	$K(p) = -\frac{\alpha_{o.c} T_{o.c} p}{T_{o.c} p + 1}$	$k_1 = \alpha_{o.c}$ $k_2 = k_3 = 1$ $k_4 = \frac{1}{T_{o.c}}$
	$K(p) = \frac{k(T_1 p + 1)}{T_2 p + 1}$	$k_1 = \frac{k}{T_2}$ $k_2 = \frac{1}{T_2}$ $k_3 = k \frac{T_1}{T_2}$ $k_4 = k_5 = k_6 = k_7 = 1$ $k_8 = \frac{1}{T_2}$

Машинная схема	Передаточная функция	Коэффициенты модели
	$K(p) = -k \frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1}$ $T_1 < T_2$	$k_1 = \frac{k T_1}{T_2}$ $k_4 = \frac{1}{T_2}$ $k_2 k_3 = k_4 - \frac{1}{T_2}$
	$K(p) = -k \frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1}$ $T_1 > T_2$	$k_1 = \frac{k T_1}{T_2}$ $k_5 = \frac{1}{T_2}$ $k_2 k_3 k_4 = \frac{1}{T_2} - k$
	$K(p) = k \frac{T p + 1}{p}$	$k_1 k_3 = k T$ $k_2 k_4 = k$
	$K(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 1}$	$k_1 = \frac{k}{T^2}$ $k_2 = \frac{1}{T^2}$ $k_3 k_4 = 1$

точности моделирования нужно стремиться к тому, чтобы максимальному значению моделируемой величины соответствовало указанное максимально допустимое напряжение.

Вопрос осложняется тем, что до получения переходного процесса максимальные значения моделируемых величин не известны. В связи с этим можно лишь приближенно определить указанные масштабы для каждой переменной.

Машинные переменные модели равны:

$$\left. \begin{aligned} x_{\text{ВХ} \cdot \text{М}} &= \frac{1}{M_{\text{ВХ}}} x_{\text{ВХ}}; & x_{i \cdot \text{М}} &= \frac{1}{M_i} x_i; \\ x_{\text{О.С.} \cdot \text{М}} &= \frac{1}{M_{\text{ВХ}}} x_{\text{О.С.}}; & x_{\text{ВЫХ} \cdot \text{М}} &= \frac{1}{M_{\text{ВЫХ}}} x_{\text{ВЫХ}} \end{aligned} \right\} \quad (12.35)$$

$$\left. \begin{aligned} M_{\text{BX}} &= x_{\text{BX, max}}/100; \\ M_i &= x_{i \text{ max}}/100; \\ M_{\text{BYX}} &= x_{\text{BYX, max}}/100. \end{aligned} \right\} \quad (12.36)$$

Коэффициенты $M_{\text{пх}}, M_i, M_{\text{вых}}$ являются масштабными коэффициентами соответствующих моделируемых величин.

Кроме этих масштабных коэффициентов нужно выбрать масштаб времени M_t .

Между машинным и реальным временем имеется связь:

$$t_{\mathbf{M}} = M_I \cdot t. \quad (12.37)$$

Для учета масштаба времени достаточно в передаточные функции моделируемых звеньев ввести новые эквивалентные постоянные времени $T_{\text{эkv}} = M_t \cdot T$.

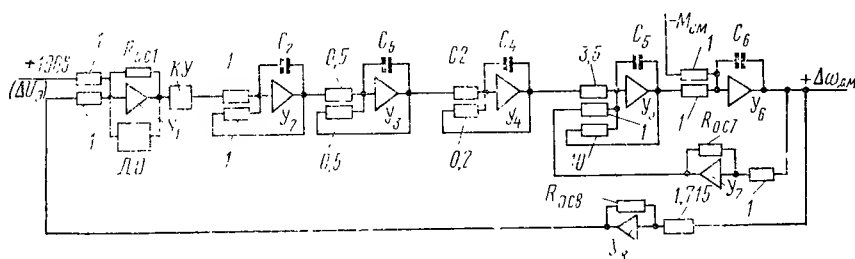


Рис. 12.21

Практически это сводится к следующему: если машинное время необходимо увеличить, то достаточно в соответствующее число раз уменьшить коэффициенты передачи всех интеграторов по всем без исключения входам, и наоборот.

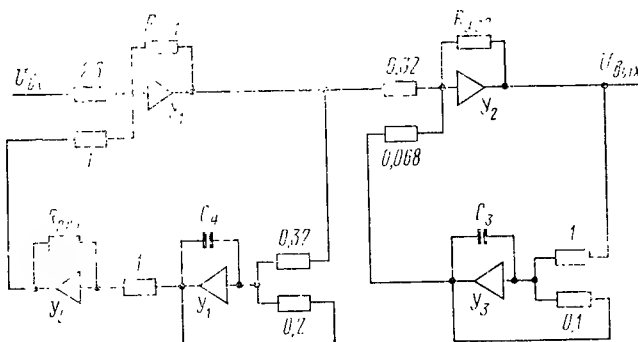


Рис. 12.22

Пример 12.7. Рассмотрим моделирование системы автоматического регулирования скорости двигателя (см. рис. 4.2) с учетом данных, указанных в примерах 8.1 и 11.2. По передаточным функциям и значениям параметров звеньев

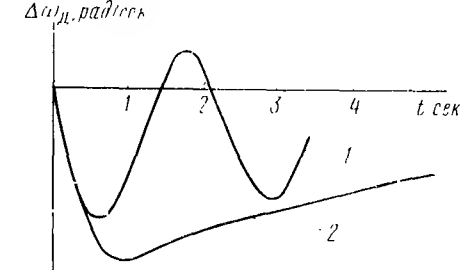


Рис. 12.23

составим схемы набора на машине МП-7 нескорректированной системы (рис. 12.21)* и последовательного корректирующего устройства КУ (рис. 12.22).

На рис. 12.1, а (кривая 3) показан переходный процесс в системе без корректирующего устройства для скачкообразного изменения управляющего сигнала ΔU_0 при нулевых начальных условиях. Как видно из рисунка, переходный процесс значительно отличается от процесса, полученного при точном аналитическом

расчете операторным методом. Переходный процесс в скорректированной системе при этом показан на рис. 12.1, б (кривая 3) и также близко совпадает с процессом, полученным при аналитическом расчете операторным методом.

Переходный процесс при скачкообразном возмущающем воздействии ΔM_0 и нулевых начальных условиях показан на рис. 12.23. Кривая 1 отражает переходный процесс в системе без коррекции, а кривая 2 — с коррекцией.

Показатели качества скорректированной системы удовлетворяют заданным в примере 11.2.

Вопросы для самопроверки

1. Какими методами можно рассчитать переходный процесс системы?
2. Каким образом можно рассчитать переходный процесс операторным методом?
3. Как вычислить коэффициенты переходной функции по данным корневых годографов?
4. В чем состоит особенность расчета переходных процессов методом трапецидальных характеристик?
5. От чего зависит точность построения кривой переходного процесса методом трапецидальных характеристик?
6. Как можно использовать сопрягающие частоты ЛАХ для расчета переходных процессов?
7. Как можно построить кривую переходного процесса по типовым ЛАХ и универсальным переходным характеристикам?
8. Дайте краткую характеристику метода математического моделирования.
9. Какие схемы набора на модели имеют типовые звенья?
10. Объясните принцип моделирования на примере системы автоматического регулирования скорости вращения двигателя.

* При моделировании системы с учетом нелинейности усилителя включается диодный ограничитель ДО [см. гл. 13].

ОСНОВНЫЕ ВОПРОСЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Реальные системы автоматического управления не являются чисто линейными, и в ряде случаев их поведение не может быть даже приближенно описано линейными дифференциальными уравнениями, т. е. системы не могут быть представлены как линеаризованные.

✓ *Нелинейной автоматической системой* называется такая система, которая содержит хотя бы одно звено, описываемое нелинейным уравнением. Уравнение является нелинейным, если некоторые координаты или их производные по времени входят в уравнение в виде произведений или степеней, отличной от первой, а также если коэффициенты уравнения являются функциями некоторых координат или их производных.

В настоящее время имеется большое количество работ, посвященных исследованию нелинейных автоматических систем. Началом этих работ принято считать исследование регулятора релейного типа, произведенное И. А. Вышнеградским в 1878 г. В этот же период были выполнены более простые исследования Р. Преллем (1884), А. Леоте (1885 г.), А. Пфарром (1889 г.), М. Толле (1909 г.) и др. В 1892 г. вышла в свет классическая работа А. М. Ляпунова [Л. 21]. Дальнейшее развитие нелинейной теории нашло отражение в трудах советских ученых Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова, А. А. Андронова, С. Э. Хайкина, Б. В. Булгакова, А. И. Лурье, Л. С. Гольдфарба, Е. П. Попова и др.

Глава 13

УСТОЙЧИВОСТЬ И АВТОКОЛЕБАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Основные задачи исследования нелинейных автоматических систем сводятся к отысканию возможных состояний равновесия системы и исследованию их устойчивости, определению периодических движений и анализу их устойчивости, исследованию процессов перехода системы к тому или иному установившемуся состоянию при различных начальных отклонениях. Начало исследования нелинейных систем обычно связано с рассмотрением устойчивости и определением автоколебаний.

§ 13.1 Классификация нелинейных звеньев и систем

✓ Классифицировать нелинейные звенья можно по различным признакам: 1) по физическим принципам действия; 2) по способам аппроксимации; 3) по статическим и динамическим характеристикам.

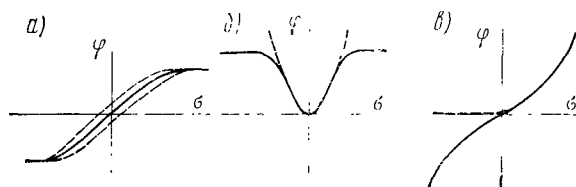


Рис. 13.1

Наиболее часто в практике автоматических систем встречаются следующие нелинейные звенья:

- с гладкой нелинейной характеристикой;
- с кусочно-линейной характеристикой (релейного типа, с зоной нечувствительности, с люфтом, с насыщением и др.);

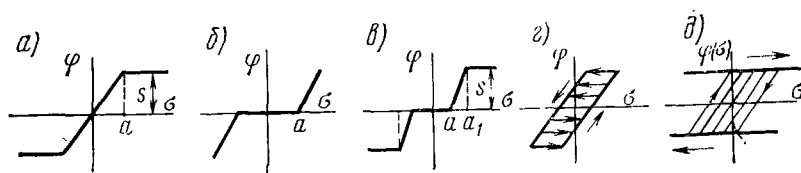


Рис. 13.2

описываемые уравнениями, которые содержат произведение переменных или их производных и другие их комбинации; логические.

Различают статические и динамические нелинейности. Первые представляются в виде нелинейных статических характеристик (рис. 13.1, 13.2 и 13.3), а вторые — в виде нелинейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами при производных.

Статические характеристики нелинейных звеньев могут быть однозначными (рис. 13.1, б и в, рис. 13.2, а, б и в, рис. 13.3, а и в), не-

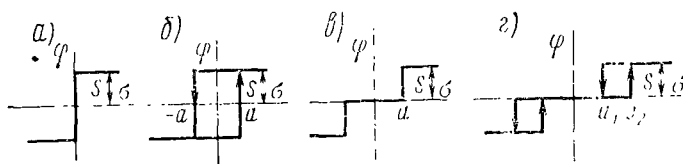


Рис. 13.3

однозначными, например тина «гистерезис» (рис. 13.1, а), «люфт» (рис. 13.2, а), релейные (рис. 13.3, б и в), и сложными неоднозначными в виде поля (ограничение с фрикционной муфтой — «упор» (рис. 13.2, д). На этих рисунках предельные значения функции обозначены через S , зоны линейности, нечувствительности и ширина гистерезиса — через a , a_1 и a_2 .

Все нелинейные звенья можно разделить на аналитические (аналитическое описание нелинейной характеристики) и неаналитические (характеристика описывается с указанием логических условий — неопределенные, релейные и др.).

Указанные нелинейности могут быть разделены на сопутствующие и преднамеренные. В зависимости от этого нелинейные автоматические системы также делятся на основные группы:

с сопутствующими нелинейностями (проектируемые как лиризованные, но из-за насыщения усилителя, мертвого хода, сухого трения и т. д., являющиеся ктически нелинейными);

с преднамеренными нелинейностями (проектируемые по заанию как нелинейные, напри-

и, релейные, оптимальные, самонастраивающиеся системы и др.), обеспечивающими наилучшие показатели качества.

Кроме того, нелинейные системы иногда классифицируют в зависимости от типа нелинейного элемента (релейные, системы с люфтом и др.).

На рис. 13.4 представлена принципиальная схема нелинейной системы регулирования температуры, где в качестве усилительного элемента использовано поляризованное реле $ПР$ с неоднозначной характеристикой без зоны нечувствительности. При отклонении температуры θ управляемого объекта O от заданной θ_n нарушается равновесие моста M , и напряжение с выхода моста подается на поляризованное реле. Это реле подает питание на якорь электродвигателя постоянного тока D , который через редуктор P воздействует на регулируемый орган PO (например, клапан на пути теплоносителя) целью устранения возникшего отклонения температуры управляемого объекта посредством изменения энергии теплоносителя.

В зависимости от знака отклонения температуры объекта (управляемая переменная) поляризованное реле включает одну или другую цепь возбуждения (OB_1 или OB_2) электродвигателя и обеспечивает вращение в одну или другую сторону. Система в данном случае является нелинейной, так как содержит преднамеренно введенный нелинейный элемент (поляризованное реле), имеющий существенно нелинейную статическую характеристику.

Поведение нелинейной системы не всегда отличается коренным образом от поведения линейной системы. Если нелинейность системы

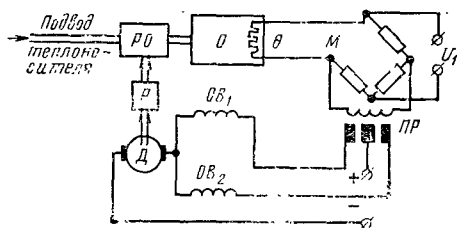


Рис. 13.4

определяется несзначительными величинами люфта, кулоновского трения, насыщения усилителя, то поведение такой системы в ряде случаев не отличается от поведения линейной модели этой системы (следовательно, система может рассматриваться как линеаризованная).

Однако в общем случае, при наличии существенных нелинейностей, поведение нелинейной системы значительно отличается от поведения ее линейной модели. Из-за нелинейности характеристик выходная переменная не будет пропорциональна входной переменной, поэтому форма реакции системы на скачкообразный сигнал будет зависеть от величины этого сигнала. Для некоторых нелинейных систем изменение входного сигнала может привести к превращению устойчивого переходного процесса в неустойчивый и наоборот (заметьте, что устойчивость линейной системы определяется только параметрами и не зависит от величины сигнала внешнего воздействия). При одних значениях параметров линейная система устойчива, при других — находится на границе устойчивости и при третьих — неустойчива.

В нелинейной системе процессы значительно разнообразнее, чем в линейной. При этом характер процесса в нелинейной системе часто зависит от величины начального отклонения, вызванного возмущением.

В связи с этим для нелинейных систем существуют понятия об устойчивости «в малом», «в большом» и «в целом» [Л. 1,10]. Система устойчива «в малом», если она устойчива только при малых (бесконечно малых) начальных отклонениях. Система устойчива «в большом», если она устойчива при больших (конечных по величине) начальных отклонениях. Система устойчива «в целом», если она устойчива при любых больших (неограниченных по величине) начальных отклонениях.

Иногда при определенных начальных отклонениях в системе устанавливаются высокочастотные колебания, а если начальные отклонения превзойдут некоторый порог, то возникают низкочастотные незатухающие колебания.

Для нелинейных систем характерен режим незатухающих колебаний, возникающий в автоматических системах при отсутствии периодических внешних воздействий за счет внутренних свойств системы. Они характеризуются равенством потерь энергии за колебательный цикл притоку энергии извне от объекта и усилителя. Указанные колебания могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми. Устойчивые колебания нелинейных систем называются *автоколебаниями*.

Если колебания в нелинейной системе устанавливаются в результате периодических внешних воздействий, то они называются *вынужденными*. Особенностью вынужденных периодических режимов нелинейных систем является то, что амплитудные частотные характеристики замкнутой системы могут иметь «изогнутый» резонансный пик.

Другой особенностью динамики нелинейных систем является то, что при затухающих колебаниях переходного процесса происходит изменение периода колебаний. В линейных системах частота затухающих колебаний не меняется.

Исследование нелинейных систем связано с преодолением значительных математических трудностей, так как не существует единого точного метода решения нелинейных уравнений и при исследовании различных нелинейных систем приходится изыскивать особый частный метод.

В отдельных случаях, если удастся линеаризовать нелинейные дифференциальные уравнения, при исследовании нелинейных систем могут быть применены методы теории линейных систем. При этом результаты анализа линеаризованной системы (линейной модели) могут быть достоверными только для определенного диапазона отклонений переменных относительно исходного режима.

Наиболее общие результаты по исследованию устойчивости нелинейных систем могут быть получены по методу А. М. Ляпунова [Л. 21]. При этом уравнения свободного движения системы запишем в виде

$$dx_i/dt = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (13.1)$$

где x_i — координаты системы; f_i — непрерывные или кусочно-непрерывные функции.

Уравнения (13.1) охватывают широкий класс систем. Существенный интерес представляют системы с одним нелинейным элементом (рис. 13.5).

Дифференциальные уравнения такой системы (при $z = 0$) можно представить как

$$\left. \begin{aligned} dx_i/dt &= \sum_{j=1}^n a_{ij} y + b_i y; \\ y &= \Phi(\sigma), \end{aligned} \right\} \quad (13.2)$$

где $\sigma = \sum_{k=1}^n c_k x_k$; x_i, y — координаты; a_{ij}, b_i, c_k — постоянные коэффициенты.

Для схемы, изображенной на рис. 13.5, нелинейная функция зависит от одной выходной переменной, а линейная часть имеет передаточную функцию $K(p)$, поэтому вместо (13.2) получим

$$\left. \begin{aligned} a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_n x &= b_0 \frac{d^m y}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \dots + b_m y; \\ y_1 &= \Phi(x); \quad y = z - y_1. \end{aligned} \right\} \quad (13.3)$$

Передаточная функция линейной части

$$K(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (13.4)$$

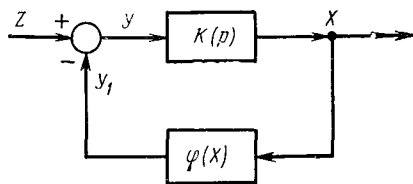


Рис. 13.5

Чтобы исследовать устойчивость по методу А. М. Ляпунова, необходимо подобрать некоторую знакоопределенную функцию $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и вычислить производную по времени от этой функции с учетом уравнений (13.1) или (13.2):

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} = W(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (13.5)$$

Функция называется *знакоопределенной*, если она во всех точках некоторой области вокруг начала координат сохраняет один знак и нигде кроме начала координат не обращается в нуль. Функция называется *знакопостоянной*, если она сохраняет знак во всех точках этой области, но обращается в нуль в других точках области, кроме начала координат. Система называется *асимптотически устойчивой в смысле Ляпунова*, если при $V > 0$ имеет место $W < 0$.

Система называется *устойчивой в смысле Ляпунова*, если при $V > 0$ имеет место $W = 0$. Функции V , удовлетворяющие указанным условиям, называются *функциями Ляпунова*.

Знакоопределенная функция V является непрерывной дифференцируемой функцией и при $V > 0$ неограниченно растет с увеличением x_i , т. е. $\lim_{x_i \rightarrow \infty} V \rightarrow \infty$.

Таким образом, задача исследования устойчивости нелинейной системы (13.2) по Ляпунову сводится к определению функции Ляпунова V и ее производной:

$$W = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i \varphi(\sigma) \right]. \quad (13.6)$$

Трудность применения прямого метода Ляпунова состоит в том, что отсутствуют общие правила отыскания функций Ляпунова V . При заданных нелинейных уравнениях (13.2), в общем случае можно подобрать несколько различных вариантов функции V , поскольку требуется только знакоопределенность функций V и W . Различные варианты функции V могут давать соответственно различные варианты условий устойчивости для одной и той же автоматической системы. Следовательно, метод А. М. Ляпунова дает возможность получить достаточные условия устойчивости, которые не всегда будут необходимыми; при выполнении условий устойчивости, соответствующих данной функции V , система будет устойчивой, но эти условия могут не охватывать всей области устойчивости системы по параметрам. В ряде технических задач можно вполне удовлетвориться этими достаточными условиями устойчивости. От более или менее удачного подбора функции Ляпунова будет зависеть большая или меньшая близость полученных достаточных условий устойчивости к необходимым и достаточным.

В некоторых случаях удается найти такую функцию, которая соответствует всей области устойчивости.

Пример 13.1. Пусть, например, получена система уравнений нелинейной системы:

$$\left. \begin{aligned} dx/dt &= -(x - \beta y)(1 - ax^2 - by^2); \\ dy/dt &= -(y + \alpha x)(1 - ax^2 - by^2), \end{aligned} \right\} \quad (13.7)$$

где α , β , a и b — положительные постоянные числа.

Предположим, что для данной системы выбрана квадратичная положительно-определенная функция Ляпунова

$$V = \alpha x^2 + \beta y^2,$$

для которой

$$W = dV/dt = 2\alpha x \cdot dx/dt + 2\beta y \cdot dy/dt,$$

или, с учетом исходных уравнений (13.7),

$$W = -2(1 - ax^2 - by^2)(\alpha x^2 + \beta y^2).$$

Функция W меньше нуля (отрицательна) в том случае, если

$$1 - ax^2 - by^2 > 0 \quad (13.8a)$$

или

$$ax^2 + by^2 < 1. \quad (13.8b)$$

Полученные неравенства (13.8a) и (13.8b) являются достаточными условиями устойчивости рассматриваемой нелинейной системы. Граница устойчивости представляется эллипсом ($ax^2 + by^2 = 1$), внутри которого $W < 0$, а вне (при $ax^2 + by^2 > 1$) этого эллипса $W > 0$.

Указанные неравенства (13.8) полностью определяют область устойчивости данной нелинейной системы и являются необходимыми и достаточными условиями устойчивости.

Данный пример иллюстрирует редкий случай решения задачи по нахождению всей области устойчивости.

Большое значение для развития прямого метода Ляпунова имеют работы А. И. Лурье, который указал общий метод выбора функций Ляпунова для некоторого класса нелинейных систем. При этом предлагается выбирать функцию Ляпунова в виде суммы функции квадратичной формы $L(x)$ и интеграла от нелинейной функции $\varphi(\sigma)$ рассматриваемой системы [Л. 22]:

$$V = L(x) + \int_0^\sigma \varphi(\sigma) d\sigma. \quad (13.9)$$

Если при исследовании устойчивости нелинейной системы прямым методом Ляпунова получены условия устойчивости, которые не зависят от формы нелинейной характеристики, ограниченной в некоторой области, то они называются *условиями абсолютной устойчивости*. В связи с этим принято считать, что система абсолютно устойчива, если она устойчива при любой нелинейной характеристике $\varphi(\sigma)$, удовлетворяющей условиям

$$0 \leq \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} \leq k; \quad \varphi(0) = 0,$$

где k — заданное число.

Все инженерные методы исследования нелинейных систем можно разделить на две основные группы — точные* и приближенные.

В развитии точных методов большое значение имеют работы А. М. Ляпунова и А. А. Андропова. К ним относятся методы А. М. Ляпунова, фазового портрета, припасовывания, точечного преобразования и сечения пространства параметров [Л. 26]. Дальнейшее распространение точные методы получили в связи с развитием теории релейных и импульсных систем. Точным методом исследования нелинейных систем является частотный метод определения абсолютной устойчивости нелинейных систем В. М. Попова**.

В основу приближенных методов положено либо предположение, что исследуемая нелинейная система мало отличается от линейной (методы малого параметра Пуанкаре, Ван-дер-Поля, а также их варианты в специальной форме Б. В. Булгакова), либо предположение, что искомые периодические решения мало отличаются от гармонических (методы гармонического баланса или эквивалентной линеаризации П. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова, а также некоторые их варианты, предложенные Л. С. Гольдфарбом, Е. П. Поповым и др.).

К приближенным методам относятся аналитические методы линеаризации, позволяющие заменить нелинейную систему приближенной линейной моделью, а также графо-аналитические методы.

Многие сложные для аналитического решения теоретические и практические вопросы в настоящее время могут сравнительно легко решаться с помощью вычислительных машин непрерывного и дискретного действия.

Работа нелинейных систем при случайных воздействиях анализируется с помощью метода статистической динамики автоматических систем, основанного на использовании теории вероятностей.

§ 13.3. Метод фазовой плоскости

Состояние автоматической системы в любой момент времени может быть охарактеризовано значениями рассматриваемой переменной и $(n - 1)$ ее производных. Для рассмотрения системы n -го порядка необходимо использовать n -мерное пространство, содержащее n осей координат.

Если в данный момент времени по указанным осям отложить значения переменной и $(n - 1)$ ее производных, то будет получена точка, изображающая состояние системы. Указанное пространство называется *фазовым*, а точка, соответствующая состоянию системы в фазовом пространстве, — *изображающей*.

При установившемся равновесном состоянии системы изображающая точка находится в покое. Во время переходного процесса переменная и ее производные в каждый момент времени будут иметь различ-

* Термин «точные методы» означает, что рассматривается точное решение нелинейных дифференциальных уравнений. Однако сами уравнения отражают процессы в реальной системе с некоторой степенью точности и являются обычно приближенными.

** Понятие об этом методе дано в § 13.11.

ные значения, поэтому изображающая точка будет перемещаться в фазовом пространстве. Каждому определенному переходному процессу автоматической системы в фазовом пространстве соответствует определенная траектория движения изображающей точки. Начальное положение изображающей точки определяется начальными условиями свободного движения системы. При равновесии системы все производные рассматриваемой переменной равны нулю; соответствующие этому точки фазового пространства называются *особыми*. Совокупность фазовых траекторий для всевозможных начальных отклонений вместе с особыми траекториями и точками называется *фазовым портретом* системы.

Наиболее наглядно фазовые траектории могут быть представлены для систем второго порядка в системе координат x (переменная величина) и dx/dt (скорость изменения переменной величины), т. е. на фазовой плоскости. В связи с этим наибольшее практическое применение для исследования нелинейных систем получил метод фазовой плоскости. Метод фазовой плоскости используется для любого типа нелинейности, а также для сочетания нелинейностей. Недостатком метода является его ограничение системами второго порядка.

В некоторых случаях можно аппроксимировать системы высокого порядка системой второго порядка с эквивалентным запаздыванием, что расширяет область применения метода фазовой плоскости. При изображении процессов на фазовой плоскости уравнение второго порядка заменяют эквивалентными уравнениями первого порядка

$$\left. \begin{aligned} dy/dt &= f(x, y); \\ dx/dt &= y. \end{aligned} \right\} \quad (13.10)$$

Чтобы изобразить процесс на фазовой плоскости, из уравнений (13.10) исключают время, для чего делят первое уравнение на второе:

$$dy/dx = f(x, y)/y. \quad (13.11)$$

После решения нелинейного дифференциального уравнения (13.11) получается уравнение фазовой траектории

$$y = F(x), \quad (13.12)$$

которое определяет кривую на фазовой плоскости. Каждой совокупности начальных условий x_0, y_0 будет соответствовать свое решение (13.12) и своя фазовая траектория.

Интегрирование уравнения (13.11) может быть осуществлено аналитически (в простейших случаях), графически, численно и при помощи вычислительных машин.

Фазовые траектории, определяемые уравнением (13.11), имеют следующие свойства:

- при $y > 0$ переменная x всегда возрастает;
- при $y < 0$ переменная x всегда убывает;
- при возрастании t движение изображающей точки происходит слева направо в верхней полуплоскости и справа налево в нижней полуплоскости;

при $y = 0$ значение $dy/dx = \infty$, поэтому в точках пересечения фазовых траекторий с осью абсцисс касательные к ним перпендикулярны к оси x .

Если уравнение (13.11) трудно проинтегрировать, то фазовые траектории можно построить по методу изоклин. *Изоклины* представляют собой геометрическое место всех точек фазовой плоскости, для которых наклон фазовой траектории равен постоянному значению C_i . Пусть, например, $dy/dx = C_1$, тогда вместо (13.11) можно записать уравнение

$$f(x, y)/y = C_1,$$

из которого получается уравнение изоклины

$$y = k_{из1} x,$$

где $k_{из1}$ — угловой коэффициент изоклины.

Задавая различные постоянными значениями наклона C_i , можно построить семейство изоклин, каждая из которых имеет угловой коэффициент $k_{из i}$ для данной системы. Семейство изоклин используется для построения фазовых траекторий с различными начальными условиями при помощи отрезков прямых, направленных в соответствии с наклоном, определяемым изоклинами.

На рис. 13.6 показан принцип построения фазовой траектории методом изоклин. Пусть построены изоклины для различных C_1, C_2, C_3 и C_4 и указаны наклоны касательных к траекториям, пересекающим эти изоклины. Если начальные условия заданы точкой A , то из нее следует провести две прямые, параллельные наклонам C_1 и C_2 , до пересечения с изоклиной,

соответствующей наклону C_2 . Далее приближенно считают, что точка B пересечения траекторией изоклины C_2 находится на середине отрезка, отсекаемого на изоклине двумя прямыми, проведенными из точки A . Аналогично определяют точки C, D и т. д. Фазовую траекторию проводят через точки A, B, C, D .

В общем случае для многомерных систем вместо (13.10) может быть получена система следующих уравнений

$$\left. \begin{aligned} dy/dt &= f_1(x, y); \\ dx/dt &= f_2(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (13.14)$$

На основании (13.13) дифференциальное уравнение фазовой траектории будет иметь вид

$$dy/dx = f_1(x, y)/f_2(x, y). \quad (13.14)$$

Хотя метод фазовой плоскости разработан применительно к нелинейным системам, интересно сначала рассмотреть фазовые траектории линейного звена второго порядка и затем проследить получение фазовых траекторий и особых точек наиболее важных типов, которые встречаются и в нелинейных системах.

Рассмотрим свободное движение линейного звена (или системы) второго порядка, которое в общем случае определяется однородным дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\rho\omega_0 \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (13.15)$$

Запишем систему уравнений

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} = -2\rho\omega_0 y - \omega_0^2 x; \quad \frac{dx}{dt} = y,$$

из которой после исключения параметра времени (путем деления первого уравнения на второе) получим дифференциальное уравнение фазовой траектории линейного звена (или системы) второго порядка

$$dy/dx = -2\rho\omega_0 - \omega_0^2 x/y. \quad (13.15a)$$

После интегрирования (13.15a) с учетом начальных значений найдем аналитическое уравнение фазовой траектории, вид которой зависит от параметров ρ и ω_0 . Например, при $\rho = 0$, когда звено является консервативным, получим

$$\int y dy + \int \omega_0^2 x dx = 0 \quad (13.16)$$

или

$$\frac{1}{\omega_0^2} \int y dy + \int x dx = 0. \quad (13.16a)$$

После интегрирования (13.16) и (13.16a) запишем

$$\frac{y^2}{2} + \frac{\omega_0^2 x^2}{2} = C^0; \quad \frac{y^2}{2\omega_0^2} + \frac{x^2}{2} = C^0.$$

Деля на постоянную интегрирования C^0 и принимая $2C^0 = A^2$, найдем

$$\frac{y^2}{A^2} + \frac{\omega_0^2 x^2}{A^2} = 1; \quad (13.17)$$

$$\frac{y^2}{\omega_0^2 A^2} + \frac{x^2}{A^2} = 1, \quad (13.17a)$$

Уравнения (13.17) и (13.17a) являются уравнениями эллипса, определяющими фазовые траектории (кривые I) для случая незатухающих колебаний (рис. 13.7, а), что соответствует наличию пары чисто мнимых корней в уравнении (13.15), если $\rho = 0$.

Аналогично могут быть получены аналитические выражения для фазовых траекторий 2–7 при других значениях ρ , определяющих корни характеристического уравнения и характер переходного процесса (рис. 13.7, б–г).

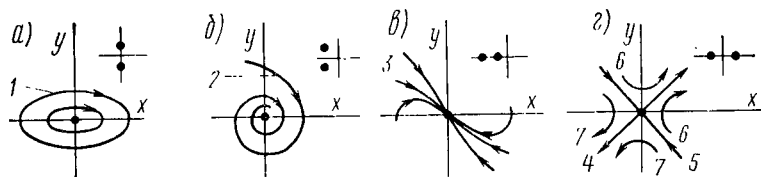


Рис. 13.7

В зависимости от вида фазовой траектории особая точка фазовой плоскости может быть центром, фокусом, узлом и седлом (см. рис. 13.7, а–г соответственно). Центр является точкой безразличного равновесия. Фокус и узел могут характеризоваться как устойчивые (см. рис. 13.7, б и в), так и неустойчивые процессы (рис. 13.8, а и б).

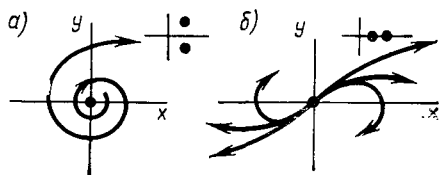


Рис. 13.8

Многие задачи теории автоматического управления связаны с необходимостью исследования нелинейного дифференциального уравнения:

$$d^2 x/dt^2 + \varphi(x, dx/dt) = 0, \quad (13.18)$$

где $\varphi(x, dx/dt)$ — нелинейная функция.

Перепишем уравнение (13.18) в виде двух уравнений первого порядка:

$$\left. \begin{aligned} dy/dt &= -\varphi(x, y); \\ dx/dt &= y. \end{aligned} \right\} \quad (13.19)$$

Систему уравнений (13.19) можно рассматривать как частный случай более общей нелинейной системы

$$\left. \begin{aligned} dy/dt &= Q(x, y); \\ dx/dt &= P(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (13.20)$$

В общем случае P и Q могут также зависеть и от времени:

$$\left. \begin{aligned} dy/dt &= Q(x, y, t); \\ dx/dt &= P(x, y, t). \end{aligned} \right\} \quad (13.20a)$$

Если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ не содержат явно времени, то система (13.30) называется *автономной* (не подверженной действию внешних сил), в противном случае [см. (13.20a)] система является *неавтономной*.

Из (13.20) следует, что дифференциальным уравнением фазовых траекторий будет уравнение

$$dy/dx = Q(x, y)/P(x, y). \quad (13.21)$$

При равновесии системы одновременно скорость и ускорение координаты равны нулю:

$$\left. \begin{aligned} P(x, y) &= 0; \\ Q(x, y) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13.22)$$

Если P и Q — аналитические функции, то уравнение (13.21) однозначно определяет касательную во всех точках, кроме тех, в которых выполняются условия (13.22). В этих точках не существует определенного направления касательной.

Вид и расположение фазовых траекторий, а также направление движения по ним изображающей точки дают возможность судить о характере движения системы и его устойчивости при различных начальных отклонениях. Особые точки и их характер определяют состояние равновесия исходной системы.

Замкнутые фазовые траектории нелинейных систем, называемые *предельными циклами*, могут быть как устойчивыми (рис. 13.9, а, штриховая), так и неустойчивыми (рис. 13.9, б, штриховая). К этим предельным циклам стремятся изображающие точки при различных начальных отклонениях по различным фазовым траекториям (сплошные кривые, рис. 13.9). Фазовый портрет нелинейной системы может

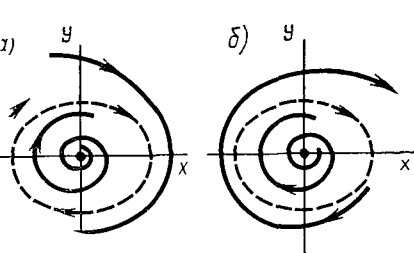


Рис. 13.9

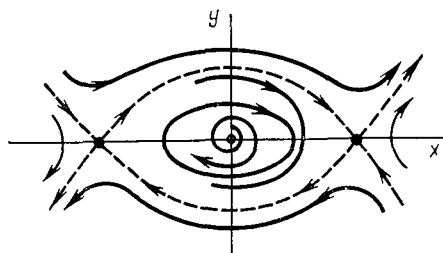


Рис. 13.10

иметь различные фазовые траектории и несколько особых точек (рис. 13.10). При этом кривые, разделяющие области с различными траекториями, называются *сепаратрисами* (штриховые).

Если нелинейные звенья имеют кусочно-линейные характеристики (нелинейности), то поведение системы в каждой области фазовой плоскости описывается своим дифференциальным уравнением [Л. 10].

Для фазового портрета нелинейных систем с разрывными характеристиками характерно наличие *линий переключения*, которыми фазовая плоскость разделяется на ряд областей с различными фазовыми траекториями. При этом начальные значения переменных на каждом участке определяются через их конечные значения на

предыдущем участке. Линии переключения характеризуются узловыми точками разрывных нелинейных характеристик звеньев. В зависимости от характера входных сигналов нелинейных звеньев линии переключения могут быть прямыми или кривыми.

Так как часто отдельные дифференциальные уравнения легко интегрируются, то построение фазовых траекторий по участкам для таких систем не представляет принципиальных затруднений.

При переходе изображающей точки через линию переключения некоторые из коэффициентов изменяют свои значения и остаются постоянными до пересечения следующей линии переключения.

§ 13.4. Примеры фазовых портретов нелинейных систем

Рассмотрим построение фазовых траекторий нелинейных систем второго порядка с аналитическими и неаналитическими нелинейностями.

Пример 13.1. Рассмотрим систему второго порядка с переменным коэффициентом демпфирования, описываемую уравнением Ван-дер-Поля:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \varepsilon (1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x = 0.$$

На основании этого уравнения запишем дифференциальное уравнение фазовой траектории

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varepsilon (1 - x^2) y - x}{y}.$$

Используем метод изоклин, для чего полагаем $dy/dx = C_i = \text{const}$ и находим уравнение изоклины:

$$y = \frac{x}{\varepsilon (1 - x^2) - C_i}.$$

Семейство изоклин для ряда значений C_i ($-1; 0; +1; \infty$) и $\varepsilon = 0,2$ показано на рис. 13.11 в виде штриховых кривых. При начальных условиях ($y_0 = 0$, $x_0 = +2$) по указанному на рис. 13.6 методу построена фазовая траектория, представляющая собой предельный цикл. Этот предельный цикл характеризует наличие в системе автоколебаний.

Форма предельного цикла в данном случае зависит от величины коэффициента ε и при $\varepsilon = 0$ имеет бесконечную окружность.

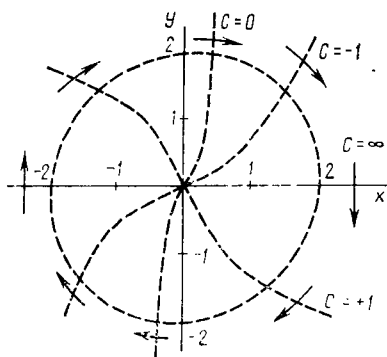


Рис. 13.11

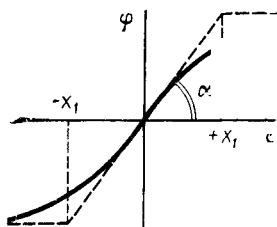


Рис. 13.12

Пример 13.2. Рассмотрим систему, содержащую звено с насыщением. Характеристики усилителей с насыщением можно представить типовой кусочно-линейной характеристикой $\varphi(\sigma)$ (штриховая на рис. 13.12).

На рис. 13.13 показана структурная схема астатической системы, содержащая электронный усилитель с насыщением и электрический двигатель. Для линейной зоны, когда $-X_1 < \Delta X < +X_1$, усилитель обладает коэффициентом усиления k_y , поэтому передаточная функция замкнутой системы относительно ошибки регулирования

$$W_{\Delta x}(p) = \frac{1}{1 + K(p)} = \frac{p(T_M p + 1)}{p(T_M p + 1) + k_y k_M k_{ред}} = \frac{\Delta X(p)}{X_{вх}(p)},$$

или

$$(T_M p^2 + p + k_y k_M k_{ред}) \Delta X(p) = (T_M p^2 + p) X_{вх}(p).$$

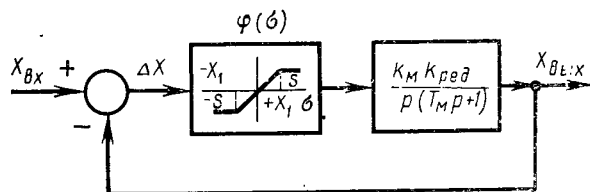


Рис. 13.13

Поскольку исследуется свободное движение, то отклонение $X_{вх} = 0$ и дифференциальное уравнение относительно ошибки (далее будем записывать X вместо ΔX , которое равно также отклонению $X_{вых}$) записывается в виде

$$T_M \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + k_y k_M k_{ред} x = 0 \quad (13.23)$$

или, в общем случае, для нелинейной характеристики, учитывая $\varphi(\sigma)$ вместо $k_y X$,

$$T_M \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = -k_M k_{ред} \varphi(\sigma). \quad (13.23a)$$

Уравнение (13.23) аналогично уравнению (13.14), поэтому фазовый портрет в линейной зоне определяется линейным дифференциальным уравнением (13.23).

Для значения $\sigma \geq X_1 = S/k_y$ на выходе усилителя получим постоянную величину S ; подставим ее в (13.23a) вместо $\varphi(\sigma)$:

$$T_M \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = -k_M k_{ред} S. \quad (13.24)$$

Аналогично получим уравнение для $\sigma \leq -X_1$, когда $\varphi(\sigma) = -S$;

$$T_M \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = k_M k_{ред} S. \quad (13.25)$$

Уравнения (13.24) и (13.25) определяют динамику системы при насыщенном усилителе.

Разделив уравнения (13.23), (13.24) и (13.25) на $dx/dt = y$, получим дифференциальные уравнения фазовых траекторий для отдельных областей фазовой плоскости:

при $-X_1 < \sigma < +X_1$

$$T_M \frac{dy}{dx} = -1 - \frac{k_y k_M k_{ред} x}{y}; \quad (13.26a)$$

при $\sigma \geq +X_1$

$$T_M \frac{dy}{dx} = -1 - \frac{k_M k_{ред} S}{y}; \quad (13.26b)$$

$$T_M \frac{dy}{dx} = -1 \quad ; \quad \frac{k_M k_{\text{ред}} S}{y} \quad (13.26\text{в})$$

Линейная зона ограничивается двумя вертикальными прямыми n - n и m - m , проходящими через точки на оси абсцисс, когда $x = -X_1$ и $x = X_1$ (рис. 13.14). Внутри линейной зоны фазовая траектория I определяется уравнением (13.26а). Для зоны насыщения при $\sigma > X_1$ фазовая траектория II характеризуется уравнением (13.26б). Для зоны насыщения при $\sigma < -X_1$ фазовая траектория III описывается уравнением (13.26в). На рис. 13.14 показан фазовый портрет, построенный по методу изоклин (для значений $C_1 \div C_6$) при некоторых заданных значениях параметров системы, когда переходный процесс является колебательным затухающим. На линиях n - n и m - m производится «сшивание» решений уравнений (13.23), (13.24) и (13.25), т. е. при построении фазового портрета используется метод приспособывания. При построении изоклин на основании (13.26а) для линейной зоны получим наклонные лучи, проходящие через начало координат и определяющиеся уравнениями:

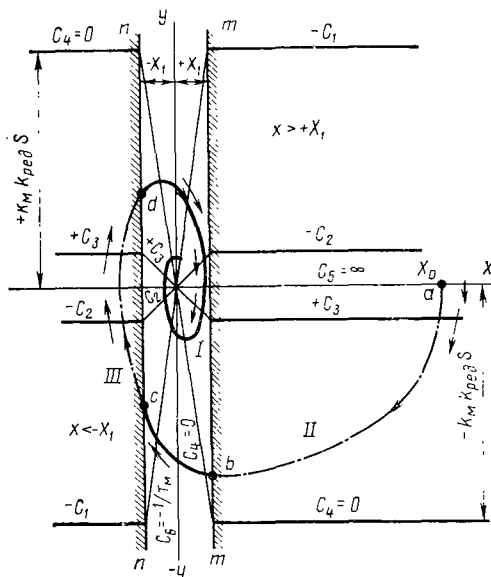


Рис. 13.14

$$\left. \begin{aligned} y &= -k_M k_{\text{ред}} x (T_M C \div 1)^{-1}; \\ dy/dx &= C; \quad \alpha = \arctg C. \end{aligned} \right\} \quad (13.27)$$

Для нелинейной зоны при $x > X_1$ уравнение изоклин на основании (13.26б) имеет вид:

$$y = -k_M k_{\text{ред}} S (T_M C \div 1)^{-1}. \quad (13.28)$$

Аналогично для $x < -X_1$ получим

$$y = k_M k_{\text{ред}} S (T_M C \div 1)^{-1}. \quad (13.29)$$

На основании (13.28) и (13.29) заключаем, что изоклины в зонах насыщения являются линиями, параллельными оси абсцисс, так как переменная x в этих уравнениях не содержится.

Фазовые траектории пересекают линии изоклин под углом $\alpha = \arctg C$. Чем больше проведено изоклин, тем точнее выполнено построение фазовых траекторий. В данном примере было принято, что $Y_0 = 0$; $X_0 > 0$. Особая точка типа устойчивого фокуса расположена в начале координат.

Насыщение усилителя при больших отклонениях приводит к ограничению величины сигнала в системе, поэтому быстродействие нелинейной системы будет ниже по сравнению с линейной. Следует отметить, что при линеаризации по методу малых отклонений было бы получено линейное уравнение (13.23), в котором величина k_y определялась бы углом наклона касательной к нелинейной характеристике в заданной точке. Фазовая траектория при линеаризации строилась бы только по уравнению (13.26а).

Пример 13.3. Рассмотрим систему, содержащую нелинейное звено с зоной нечувствительности. Другой типовой нелинейностью является мертвая зона, или зона нечувствительности, когда какой-либо элемент системы обладает нечувствительностью к малым сигналам (действие момента трения у электродвигателей и пр.).

На рис. 13.15, а показана структурная схема автоматической системы с учетом нелинейности типа зоны нечувствительности, обусловленной нечувствительностью усилителя. Для участка зоны нечувствительности ($-X_1 < \sigma < +X_1$) на основании (13.23а) запишем дифференциальное уравнение [считая $\Phi(\sigma) = 0$]:

$$T_M \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = 0. \quad (13.30)$$

Для участков $\sigma > X_1$ и $\sigma < -X_1$ усилитель является линейным: $\Phi(\sigma) = -k_y (x - X_1)$, поэтому на основании (13.23а) имеем линейное дифференциальное уравнение (при $|x| > X_1$):

$$T_M \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + k_y k_M k_{ред} (x - X_1) = 0. \quad (13.31)$$

Фазовая характеристика, полученная на основании (13.30) и (13.31), показана на рис. 13.15, б. Здесь также нанесены граничные линии $n-n$ и $m-m$. При неучете зоны нечувствительности фазовый портрет определяется уравнением вида (13.23).

Фазовая траектория в пределах зоны нечувствительности из (13.30) характеризуется уравнением

$$T_M dy/dx + 1 = 0 \quad \text{или} \quad T_M dy = -dx,$$

поэтому

$$T_M y = -x + C, \quad (13.32)$$

где C — постоянная интегрирования.

Уравнение (13.32) показывает, что фазовые траектории для зоны нечувствительности являются прямыми линиями с наклоном, зависящим от величины T_M .

Нелинейность типа зоны нечувствительности вносит погрешность, и система приходит к равновесному состоянию при значениях ошибки, определяемой зоной нечувствительности. Остановка процесса может произойти в любой точке окончания фазовой траектории на оси абсцисс между линиями $n-n$ и $m-m$.

Рассмотрим далее системы второй группы, имеющие преднамеренно введенные нелинейности.

Пример 13.4. В ряде случаев в качестве усилителя применяется релейный элемент. Рассмотрим нелинейные системы второго порядка, содержащие один релейный элемент.

Идеальное двухпозиционное реле. На рис. 13.16, а показана структурная схема системы с электромеханическим реле, обладающим идеальной релейной характеристикой. Нелинейная характеристика реле $\Phi(\sigma) = S \cdot \text{sign } \sigma$ в данном случае определяет уравнения свободного движения на основании (13.23а):

$$T_M \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = -k_M k_{ред} S \cdot \text{sign } \sigma; \quad (13.33)$$

или

$$\text{при } \sigma = 0$$

$$T_M \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = -k_M k_{ред} S; \quad (13.34а)$$

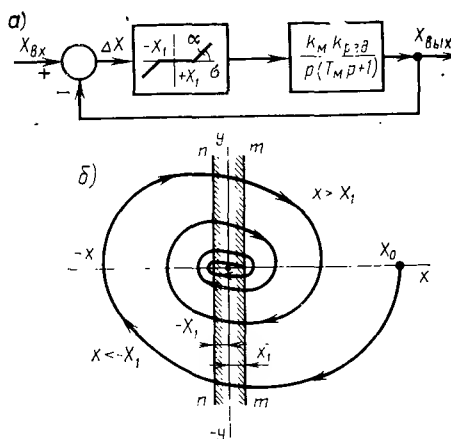


Рис. 13.15

$$T_M \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + k_M k_{ред} S. \quad (13.346)$$

Границей перехода от уравнения (13.34а) к (13.346) является линия $\sigma = 0$, т. е. ось ординат.

Уравнения (13.34а) и (13.346) аналогичны уравнениям (13.24) и (13.25), поэтому подобно примеру 13.2 фазовый портрет (рис. 13.16, б) в данном случае может быть построен по уравнениям (13.28) и (13.29) и отличается от приведенного на рис. 13.14 тем, что не имеет линейной зоны, а линии $n-n$ и $m-m$ совпадают

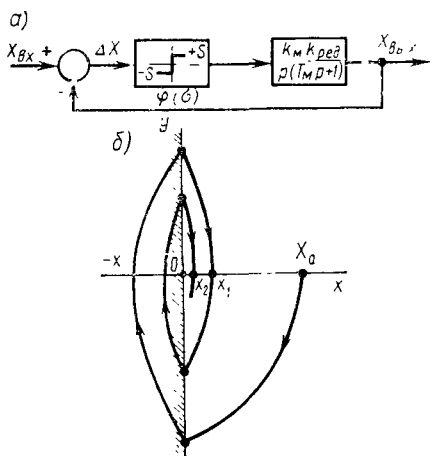


Рис. 13.16

с осью ординат, определяя линию переключения реле. Переходный процесс является колебательным затухающим.

Двухпозиционное реле с гистерезисной характеристикой. Если реле имеет неоднозначную характеристику, то уравнения движения системы должны быть составлены с учетом соответствующей нелинейной характеристики $\Phi(\sigma)$.

Рассмотрим систему регулирования температуры (см. рис. 13.4). Уравнение для регулируемого объекта имеет вид

$$(T_0 p + 1) \theta = k_0 \xi. \quad (13.35)$$

Уравнение для привода и регулирующего органа без учета постоянных времени двигателя запишется как

$$p \xi = k_1 U. \quad (13.36)$$

Для чувствительного элемента, моста и реле $U = \Phi(\theta)$. Пусть в (13.35) и (13.36) $T_0 = 10$ сек — постоянная времени объекта; $k_0 = 10$ град/рад — коэффициент усиления объекта; θ — регулируемая переменная (отклонение температуры от заданного значения, град); $k_1 = 0,01$ рад/сек·в — коэффициент усиления привода; U — напряжение, подводимое к обмотке якоря электродвигателя (привода), в; ξ — отклонение положения регулирующего органа, изменяющего энергию теплоносителя.

Нелинейная характеристика чувствительного элемента вместе с мостом и реле представлена на рис. 13.17, а. При этом величины $S = U = 20$ в и $a = 2$ град определяют параметры неоднозначной релейной характеристики. Заданное значение регулируемой переменной характеризуется соотношением сопротивлений плеч уравновешенного моста.

На основании уравнений элементов системы составлена структурная схема (рис. 13.17, б), после преобразования которой получено дифференциальное уравнение, определяющее свободное движение системы:

$$T_0 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} + k_0 k_1 \varphi(\sigma). \quad (13.37)$$

В соответствии с характеристикой $\varphi(\sigma)$ на рис. 13.17, а уравнения свободного движения системы примут следующий вид:

для возрастания температуры $\theta' > 0$:

при $\theta = a$

$$T_0 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} + k_0 k_1 S; \quad (13.38a)$$

при $\theta < -a$

$$T_0 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} = k_0 k_1 S; \quad (13.386)$$

для убывания температуры $\theta' < 0$:

при $\theta < -a$

$$T_0 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} = k_0 k_1 S; \quad (13.39a)$$

при $\theta > -a$

$$T_0 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} = -k_0 k_1 S. \quad (13.396)$$

Нанесем координатные оси на фазовой плоскости $x = 0$ и $y = \theta'$ (рис. 13.17, в). Разделим фазовую плоскость на области, в которых справедливы линейные уравнения (13.38a), (13.386) и (13.39a), (13.396). Так как (13.38a)

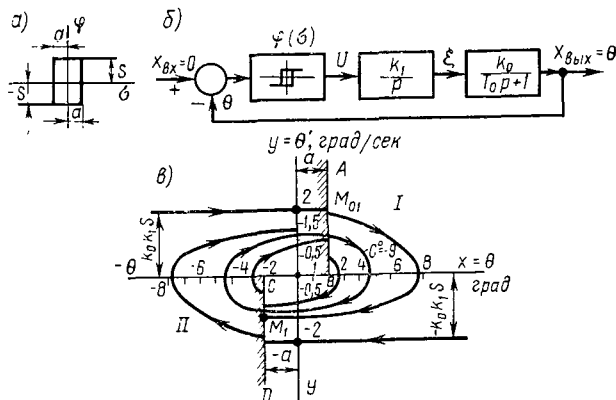


Рис. 13.17

и (13.396) аналогичны и соответственно аналогичны (13.386) и (13.39a), то фазовая плоскость разбивается на две области линиями AB и DC . Линия AB проходит параллельно оси ординат в первом квадранте на расстоянии $a = 2 \text{ град}$, линия DC проходит в третьем квадранте на расстоянии $a = -2 \text{ град}$. Для области I справа от ломаной линии $ABCD$ справедливо уравнение

$$T_0 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} = -k_0 k_1 S. \quad (13.40)$$

Для области II слева от ломаной линии $ABCD$ справедливо уравнение

$$T_0 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} = k_0 k_1 S. \quad (13.41)$$

Линии AB и DC соответствуют моментам переключений реле и определяют припасовывание участков фазовых траекторий между областями I и II на фазовой плоскости. На этих линиях производится «сшивание» решений уравнений (13.40) и (13.41).

Дифференциальные уравнения фазовых траекторий на основании (13.40) и (13.41) будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} T_0 dy/dx &= (-y - k_0 k_1 S)/y; \\ T_0 dy/dx &= (-y + k_0 k_1 S)/y. \end{aligned} \right\} \quad (13.42)$$

В результате интегрирования этих уравнений имеем уравнения фазовых траекторий. Разделив переменные, из первого уравнения (13.42) получим

$$dx = - \frac{T_0 y dy}{y + k_0 k_1 S} = -T_0 dy + \frac{T_0 k_0 k_1 S dy}{y + k_0 k_1 S}. \quad (13.43)$$

Интегрируя (13.43), получим уравнение фазовых траекторий для области I

$$x = T_0 k_0 k_1 S \ln(y + k_0 k_1 S) - T_0 y + C^0, \quad (13.44)$$

где C^0 — постоянная интегрирования, зависящая от начальных условий.

Аналогично для второго уравнения (13.42) получим для области II уравнение

$$x = -T_0 k_0 k_1 S \ln(y - k_0 k_1 S) - T_0 y - C^0. \quad (13.45)$$

Из (13.44) и (13.45) видно, что при $y = \pm k_0 k_1 S$ величина $x \rightarrow \pm \infty$, поэтому фазовые траектории на расстоянии $y = \pm k_0 k_1 S$ в области II и $y = -k_0 k_1 S$ в области I являются горизонтальными линиями. Траектории в обеих областях аналогичны и могут быть построены после подстановки численных значений коэффициентов в (13.44) и (13.45). Подставив данные T_0 , k_0 , k_1 , S и a , построим фазовый портрет (см. рис. 13.17, в) по следующим уравнениям:

$$\begin{cases} x = 20 \ln(y + 2) - 10y + C^0; \\ x = -20 \ln(y - 2) - 10y - C^0. \end{cases} \quad (13.46)$$

Из рассмотрения фазового портрета заключаем, что при малых начальных отклонениях температуры процесс является расходящимся, а при больших — сходящимся. Кроме того, имеется одна кривая при значении постоянной интегрирования $C^0 \approx -9$, когда фазовая траектория является замкнутой линией (предельный цикл). Это означает, что в системе устанавливаются автоколебания с амплитудой отклонения температуры $\approx 4,8$ град и амплитудой скорости нарастания отклонения $\approx 1,2$ град/сек. Амплитуда, соответствующая предельному циклу, зависит от параметров звеньев: она тем больше, чем больше величины k_0 , k_1 , T_0 , U и a . Чтобы исключить автоколебания, необходимо уменьшить величину a . При $a \rightarrow 0$ в пределе получим затухающий процесс (см. рис. 13.16, б).

В ряде случаев фазовый портрет строится для отклонений в относительных единицах. В данном примере для этого необходимо разделить масштаб по осям ординат на номинальное (заданное) значение температуры объекта.

В рассмотренном примере исключением постоянных времени электродвигателя и обмотки реле были упрощены уравнения. Это позволило получить уравнение второго порядка и применить метод фазовой плоскости. Следовательно, динамика системы определена точным методом по упрощенному уравнению. Наличие инерционности реле и электродвигателя можно представить в виде запаздывания в нелинейной системе, которое учитывается посредством соответствующего смещения по ходу траектории за линии переключения реле на некоторый отрезок. Этот отрезок должен соответствовать пути, который проходит изображающая точка за время τ [Л. 15].

Трехпозиционное реле. Если характеристика реле имеет зону нечувствительности и является однозначной, то нелинейную характеристику $\Phi(\sigma)$ можно разделить на три участка, соответственно которым, используя (13.23а) и рассмотренные примеры, запишем дифференциальные уравнения применительно к структурной схеме (рис. 13.18, а):

при $\sigma < -a$

$$T_M \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = k_M k_{ред} S; \quad (13.47a)$$

при $-a < \sigma < a$

$$T_M \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = 0; \quad (13.47б)$$

при $\sigma > a$

$$T_M \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = -k_M k_{ред} S. \quad (13.47в)$$

В связи с этим фазовая плоскость делится на области I, II и III, внутри которых справедливы уравнения (13.47а), (13.47б) и (13.47в).

Припасовывание участков фазовых траекторий и «сшивание» полученных уравнений производится на линиях переключения реле n - n и m - m .

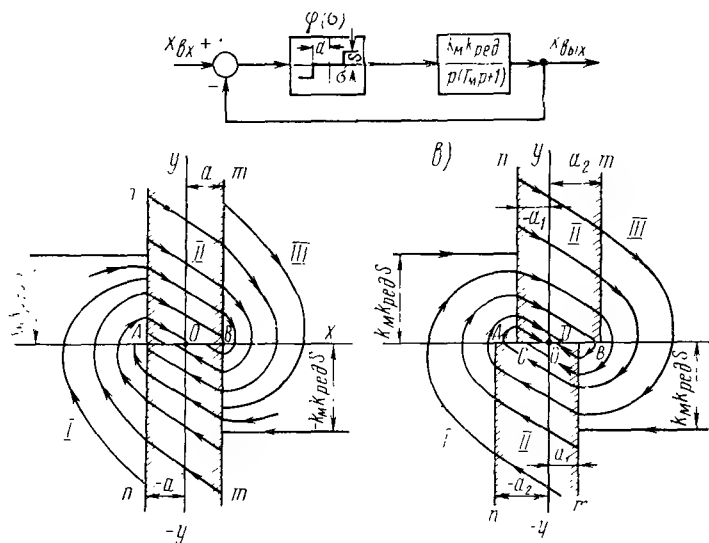


Рис. 13.18

Дифференциальные уравнения фазовых траекторий на основании (13.47а), (13.47б) и (13.47в) будут соответственно иметь вид:

$$T_M dy/dx = (-y + k_M k_{ред} S)/y; \quad (13.48а)$$

$$T_M dy/dx = -1; \quad (13.48б)$$

$$T_M dy/dx = -(y + k_M k_{ред} S)/y. \quad (13.48в)$$

Для области II, соответствующей зоне нечувствительности, аналогично примеру 13.3 при $-a < \sigma < a$ получим уравнение фазовых траекторий:

$$T_M y = -x + C. \quad (13.49)$$

Для областей I и III соответственно (13.48а) и (13.48в) аналогично (13.44) и (13.45) запишем уравнения фазовых траекторий:

$$\left. \begin{aligned} x &= -T_M k_M k_{ред} S \ln(y - k_M k_{ред} S) - T_M y - C^0; \\ x &= T_M k_M k_{ред} S \ln(y + k_M k_{ред} S) - T_M y + C^c. \end{aligned} \right\} \quad (13.50)$$

Уравнения (13.49) и (13.50) определяют фазовые траектории с учетом линий n - n и m - m . Фазовый портрет в общем случае имеет вид, представленный на рис. 13.18, б. Остановка процесса может произойти в любой точке отрезка AOB .

Если характеристика трехпозиционного реле является неоднозначной см. рис. 13.3, г), то фазовый портрет определяется уравнениями (13.49) и (13.50), а положение линий переключения реле — величинами a_1 и a_2 , получаемыми из характеристики $\varphi(\sigma)$ реле. Фазовый портрет в общем случае для данного реле может иметь вид, изображенный на рис. 13.18, в. Затухание процесса теперь будет более длительным, чем в предыдущем случае, а остановка процесса будет происходить в любой точке отрезка COD .

Качественная картина динамики в приведенных примерах, определяемая фазовым портретом, не зависит от параметров линейных звеньев. Чтобы изменить качественно фазовый портрет и динамику нелинейной системы, в ряде случаев применяют отрицательные обратные связи, которые прежде всего позволяют изменить наклон линий переключения (см. § 14.2).

§ 13.5. Метод точечных преобразований

Метод точечных преобразований Пуанкаре—Андронova позволяет установить существование автоколебаний в нелинейной системе второго порядка без построения фазовых траекторий. Для пояснения идеи метода предположим, что изображающая точка в какой-то момент времени занимает положение X_0 на оси Ox (см. рис. 13.16, б). После

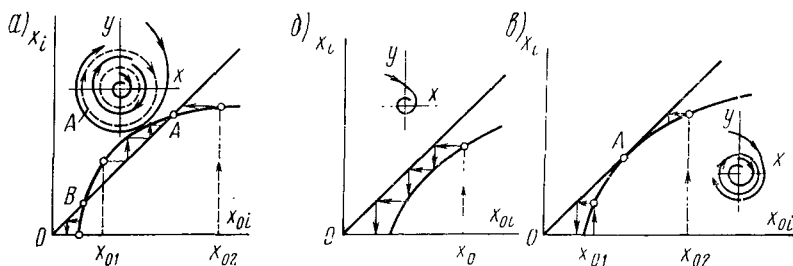


Рис. 13.19

обхода вокруг начала координат изображающая точка пересекает полупрямую Ox в точке x_1 , а после следующего обхода — в точке x_2 и т. д.

Чтобы исследовать динамику системы по этому методу, необходимо выяснить, как в зависимости от начальных условий перемежаются точки пересечения фазовой траектории с некоторой полупрямой (например, отрезком оси Ox). Последовательность точек пересечения фазовой траектории с выбранной полупрямой будет представлять точечное преобразование полупрямой самой в себя.

Автоколебания в системе определяются следующим образом. Задавшись несколькими точками x_{0i} (исходными значениями) на полуоси Ox и согласно уравнениям системы найдем соответствующие им точки x_i на той же полуоси после обхода начала координат. Полученные значения x_i и x_{0i} откладываем по осям координат (рис. 13.19) и строим кривую $x_i = f(x_{0i})$. Проведем прямую через начало координат под углом 45° к оси абсцисс, для которой $x_{0i} = x_i$. Эта прямая соответствует отображению каждой точки полуоси Ox самой в себя, т. е. после обхода вокруг начала координат точка возвращается в исходное положение. Пересечение кривой $x_i = f(x_{0i})$ с прямой $x_i = x_{0i}$ (точки A и B, рис. 13.19, а) определяет существование предельного цикла на фазовой плоскости. Определив его устойчивость, найдем параметры автоколебаний (для точки A). Если указанные кривая и прямая не пересекаются, то предельного цикла нет и автоколебания невозможны (рис. 13.19, б), а если касаются (точка A, рис. 13.19, в), то имеет ме-

сто предельный случай. Аналитическая зависимость $x_i = f(x_{0i})$, определяющая кривую точечных преобразований, называется *функцией соответствия*. В сложных задачах обычно не удается определить функцию соответствия в явном виде. Если фазовые траектории симметричны относительно начала координат, то можно ограничиться построением точечного преобразования некоторой полупрямой в симметричную с ней другую полупрямую. В качестве таких полупрямых, например, выбирают линии приспособывания (или линии переключения реле) на фазовой плоскости.

Рассмотрим некоторые способы определения функций соответствия. Найдем для примера точечное преобразование полупрямой AB в полупрямую CD (см. рис. 13.17, в). Пусть известно уравнение фазовых траекторий для области I [см. (13.44)]:

$$x = T_0 k_s \ln(y + k_s) - T_0 y + C^0, \quad (13.51)$$

где $k_s = k_0 k_1 S$ — постоянное число.

Предположим, что рассматривается движение изображающей точки по фазовой траектории из положения M_{01} до M_1 (см. рис. 13.17, в). Начальные значения координат заданы: $x_0 = a$ и $y_0 = u$, конечные же значения определяются: $x_1 = -a$ и $y_1 = -v$. Переходя от решения (13.51), соответствующего неопределенному интегралу, к определенному интегралу, по координатам точек M_{01} и M_1 запишем:

$$x_1 - x_0 = T_0 k_s \ln \frac{y_1 + k_s}{y_0 + k_s} - T_0 (y_1 - y_0) \quad (13.52)$$

или после подстановки значений координат и преобразований:

$$\frac{2a}{T_0 k_s} + \frac{v}{k_s} + \frac{u}{k_s} = \ln \frac{1 + u/k_s}{1 - v/k_s}. \quad (13.53)$$

Выражение (13.53) определяет зависимость координат конечного положения точки от координат начального положения с учетом (13.51).

На основании (13.53) найдем функцию соответствия точечных преобразований полупрямой AB в полупрямую CD для фазового портрета системы (см. рис. 13.17, б):

$$\exp(a_{\text{экв}} + z_i + z_{0i}) = \frac{1 + z_{0i}}{1 - z_i}, \quad (13.54)$$

откуда

$$(1 - z_i) \exp(z_i + a_{\text{экв}}) = (1 + z_{0i}) \exp(-z_{0i}), \quad (13.55)$$

где $a_{\text{экв}} = 2a/(T_0 k_s)$ — постоянная величина; $z_{0i} = u/k_s = y_{0i}/k_s$ — начальная ордината точки на полупрямой AB ; $z_i = v/k_s = y_i/k_s$ — конечная ордината точки на полупрямой CD ; $\exp$ — условная запись показательной функции при основании натурального логарифма.

Уравнение (13.55) в неявном виде определяет зависимость $z_i = f(z_{0i})$, на основании которой можно построить соответствующую кривую. Далее следует провести биссектрису координатного угла

и рассмотреть взаимное расположение биссектрисы и кривой $z_i = f(z_{0i})$.

Чтобы упростить задачу, в некоторых случаях строят вспомогательные кривые (рис. 13.20), используя (13.55):

$$F_1(z_i) = (1 - z_i) \exp(z_i - a_{\text{нлн}}); \quad (13.56)$$

$$F_0(z_{0i}) = (1 + z_{0i}) \exp(-z_{0i}). \quad (13.57)$$

По этим уравнениям в одной системе координат строят кривые $F_1(z_i)$ и $F_0(z_{0i})$, откладывая значения F по оси ординат, а значения z_{0i} и z_i по оси абсцисс и соблюдая одинаковый масштаб по осям для обеих кривых. По взаимному расположению кривых делают заключение о динамике нелинейной системы. Точки пересечения этих кривых определяют предельные циклы, поскольку в этих точках $z_i = z_{0i}$. Предельный цикл устойчив (см. рис. 13.20, а), если в точке пересечения кривая

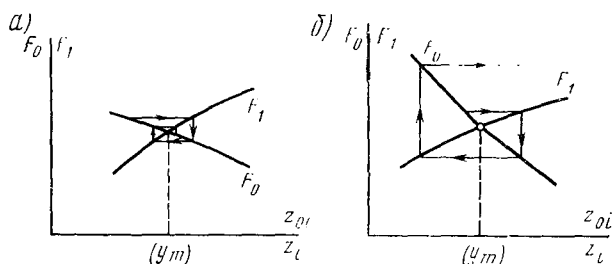


Рис. 13.20

$F_0(z_{0i})$ имеет меньший по абсолютной величине угол наклона к оси абсцисс, и неустойчив (рис. 13.20, б), если этот угол больше, чем у кривой $F_1(z_i)$. Точка пересечения кривых определяет величину амплитуды колебаний y_m с учетом соответствующего пересчета $z_{0i} = z_i$.

Существуют также другие способы нахождения функций соответствия в более общем случае [Л. 28] и определения предельного цикла без полного построения фазового портрета посредством анализа симметрии фазовой траектории относительно оси абсцисс и линий переключения [Л. 35].

Влияние обратных связей на диаграмму точечных преобразований рассмотрено в гл. 14.

§ 13.6. Основы метода гармонической линеаризации

✓ Под этим общим названием объединяется группа приближенных методов анализа нелинейных систем, основанных на принципе гармонического баланса (эквивалентной линеаризации), разработанным Н. М. Крыловым и П. П. Боголюбовым [Л. 23]. Применительно к автоматическим системам этот метод разработан Л. С. Гольдфарбом, Е. П. Поновым и др. При этом для приближенного исследования автоколебаний нелинейных систем используется линейная теория автоматических систем, что основано на гипотезе фильтра и предполо-

жении о гармоническом характере свободного движения в нелинейной системе.

Предположим, что автоматическая система содержит нелинейный усилитель $HУ$, включенный последовательно в цепь прохождения основного сигнала (рис. 13.21). В этом случае структурную схему системы можно представить в виде линейной части $ЛЧ$ с передаточной функцией $K(p)$ и нелинейного элемента $НЭ$ с характеристикой $\varphi(\sigma)$ (рис. 13.22).

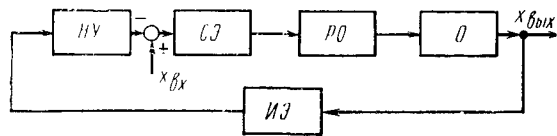


Рис. 13.21

Рассмотрим прохождение некоторого гармонического сигнала через разомкнутую нелинейную систему (рис. 13.23). Если сигнал на входе $НЭ$ является синусоидальным

$$\sigma = A \sin \omega t, \quad (13.58)$$

то на выходе $НЭ$ получим сигнал

$$x_{н.э} = \varphi(\sigma) = \varphi(A \sin \omega t). \quad (13.59)$$

Функция $\varphi(A \sin \omega t)$ является периодической и может быть разложена в ряд Фурье:

$$x_{н.э} = x^0 + \sum_{k=1}^n (A_k \sin \omega_k t + B_k \cos \omega_k t). \quad (13.60)$$

Если характеристика нелинейного элемента является симметричной, то $x^0 = 0$, и для нечетных характеристик отсутствуют четные гармоники и коэффициенты $B_k = 0$. Следовательно, на линейную часть системы действует сигнал, содержащий весь спектр частот. В силу

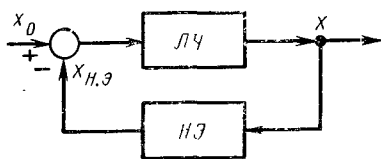


Рис. 13.22

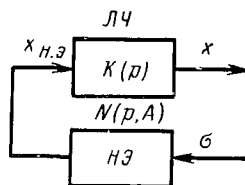


Рис. 13.23

принципа суперпозиции каждая гармоника действует на линейную часть системы независимо от остальных. Таким образом, на выходе системы установятся негармонические колебания; их спектр будет содержать все те же частоты, что и спектр колебаний на выходе нелинейного элемента, но амплитуда каждой гармоники будет зависеть от свойств линейной части и изменяться в $|K(j\omega_k)|$ раз. Амплитудная характеристика линейной части системы позволяет установить, во сколько раз изменяются амплитуды всех гармоник, порожденных не-

линейностью, при прохождении их через линейную часть системы. Для этого надо при заданном значении частоты ω_1 основной гармоники рассмотреть ординаты амплитудной характеристики $|K(j\omega)|$ при $\omega_1, 2\omega_1$ и т. д. (рис. 13.24). Если ордината A_1^0 при ω_1 несомненно больше амплитуд более высоких гармоник, то система является фильтром и не пропускает высшие гармоники, порождаемые нелинейностью.

Если в замкнутой системе имеются автоколебания, то при входном сигнале $x_0 = 0$ в контуре системы (см. рис. 13.22) имеет место сигнал, обеспечивающий автоколебательный режим.

Приближенное определение автоколебаний в нелинейной системе связано с предположением, что на вход нелинейного элемента поступает гармонический сигнал, а линейная

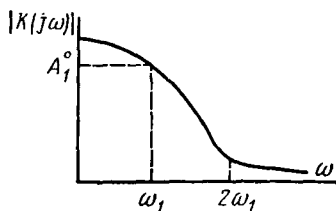


Рис. 13.24

часть системы гасит все высшие гармоники, порождаемые нелинейностью. Это позволяет производить гармоническую линеаризацию нелинейной характеристики и исследовать систему по гармонически линеаризованному уравнению методами линейной теории.

Гармоническая линеаризация нелинейной характеристики заключается в том, что записывается ряд Фурье для выходной переменной нелинейного элемента при гармоническом входном сигнале; далее используется только первая гармоника, в результате чего получается аналитическая линейная зависимость между выходным и входным сигналами нелинейного элемента.

Для однозначных симметричных нелинейных характеристик

$$x_{н.э} \approx A_1 \sin \omega_1 t, \quad (13.61)$$

где

$$A_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(A \sin \psi) \sin \psi d\psi, \quad \text{где } \psi = \omega_1 t. \quad (13.62)$$

Для неоднозначных симметричных нелинейных характеристик

$$x_{н.э} \approx A_1 \sin \omega_1 t + B_1 \cos \omega_1 t, \quad (13.63)$$

где

$$A_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(A \sin \psi) \sin \psi d\psi; \quad (13.64)$$

$$B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(A \sin \psi) \cos \psi d\psi. \quad (13.65)$$

Для замкнутой нелинейной системы сигнал на входе нелинейного элемента равен выходной переменной линейной части (см. рис. 13.23),

т. е. $\sigma = x$; $A = A_1^0$; $\omega = \omega_1$, поэтому $x = A \sin \omega t$; $dx/dt = \omega A \cos \omega t$, откуда

$$\left. \begin{aligned} \sin \omega t &= x/A; \\ \cos \omega t &= (1/\omega A) (dx/dt). \end{aligned} \right\} \quad (13.66)$$

Подставив (13.66) в (13.61), получим линейное уравнение безынерционного звена

$$\varphi(x) = x_{н.з} \approx (A_1/A)x = q(A)x, \quad (13.67)$$

где $q(A) = A_1/A$ — гармонический коэффициент усиления нелинейного звена.

Аналогично для (13.63) запишем линейное уравнение дифференцирующего звена со статизмом:

$$\varphi(x) = x_{н.з} \approx \frac{A_1}{A}x + \frac{B_1}{\omega A} \cdot \frac{dx}{dt},$$

или

$$\varphi(x) = x_{н.з} \approx q(A)x + \frac{q_1(A)}{\omega} \cdot \frac{dx}{dt}, \quad (13.68)$$

где $q_1(A) = B_1/A$ — гармонический коэффициент усиления, определяющий производную в приближенном уравнении нелинейного звена.

Для петлевых характеристик гистерезисного типа производная всегда отрицательна, что вносит запаздывание при работе звена.

Таким образом, ограничиваясь рассмотрением первой гармоники на выходе нелинейного элемента при гармоническом сигнале на его входе, заданное нелинейное уравнение $\varphi(\sigma)$ можно заменить линейным уравнением (13.67) или (13.68). Такая замена называется *гармонической линеаризацией нелинейных зависимостей*. Однозначные характеристики $\varphi(\sigma)$ можно представить прямыми линиями с углом наклона, пропорциональным амплитуде входного сигнала (рис. 13.25). Угол наклона при этом характеризует амплитуду только первой гармоники. В связи с тем, что коэффициент $q(A)$, определяющий угол наклона луча гармонической линеаризации характеристики $\varphi(\sigma)$, зависит от амплитуды входного сигнала A , при различных A лучи будут различными.

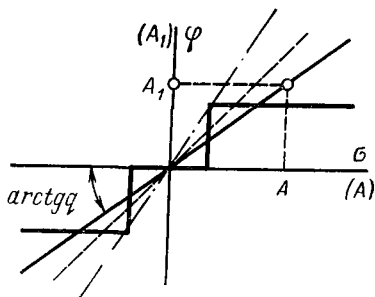


Рис. 13.25

В результате гармонической линеаризации получается не чисто линейное звено (как после линеаризации при методе малых отклонений), а своеобразное линейное звено, коэффициент усиления которого $q(A)$ зависит от амплитуды входного сигнала A . Сохранение этой очень существенной особенности нелинейных звеньев в коэффициентах $q(A)$ и $q_1(A)$ при гармонической линеаризации и является тем важным

обстоятельством, которое позволяет методами линейной теории определять свойства нелинейных автоматических систем.

Выражения (13.67) и (13.68) можно записать в операторной форме:

$$X_{н.э}(p) = q(A) X(p);$$

$$X_{н.э}(p) = \left[q(A) + \frac{q_1(A)}{\omega} p \right] X(p)$$

и получить передаточные функции гармонически линеаризованного нелинейного звена при гармоническом колебательном процессе:

$$N(p, A) = X_{н.э}(p) / X(p) = q(A); \quad (13.69)$$

$$N(p, A) = X_{н.э}(p) / X(p) = q(A) + q_1(A) p / \omega. \quad (13.70)$$

Если некоторые высшие гармоники имеют существенное влияние и нельзя ограничиться первыми членами разложения в ряд Фурье, то следует уточнить выражения (13.69) и (13.70), как показано в [Л. 23].

Таким образом, используя известные из линейной теории правила, можно записать передаточную функцию разомкнутой системы (см. рис. 13.23):

$$K_N(p, A) = K(p) N(p, A). \quad (13.71)$$

Поскольку комплексный коэффициент усиления $N(p, A)$ зависит от амплитуды входного гармонического сигнала A , то частотная характеристика $K_N(j\omega, A)$ зависит как от частоты ω , так и от амплитуды

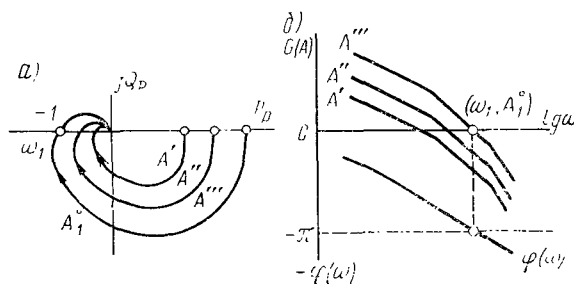


Рис. 13.26

входного сигнала A . На рис. 13.26, а показаны частотные характеристики для различных амплитуд (A' , A'' и A'''). Чтобы исследовать нелинейную систему, надо построить серию кривых $K_N(j\omega, A)$. Кривая, проходящая через критическую точку $(-1; j0)$, по критерию Найквиста определяет частоту ω_1 и амплитуду A_1' автоколебаний системы.

Аналогично можно рассмотреть логарифмические частотные характеристики, используя (13.71):

$$G(A) = 20 \lg |K_N(j\omega, A)| = 20 \lg |K(j\omega)| + 20 \lg |N(j\omega, A)|. \quad (13.72)$$

Логарифмические характеристики, соответствующие граничному случаю, характеризуют частоту ω_1 и амплитуду A_1^0 колебаний выходной переменной (рис. 13.26, б). При этом по (13.69) и (13.70) могут быть построены эквивалентные логарифмические частотные характеристики нелинейных элементов.

Используя частотную функцию разомкнутой системы, полученную в результате замены в (13.71) p на $j\omega$, можно найти амплитуду и частоту автоколебаний замкнутой системы. Для этого следует из $K_N(j\omega, A)$ определить модуль и приравнять его единице, а аргумент приравнять $-\pi$:

$$\left. \begin{aligned} |K_N(j\omega, A)| &= 1; \\ \arg K_N(j\omega, A) &= -\pi. \end{aligned} \right\} \quad (13.72a)$$

По (13.72a) можно найти A и ω . Если полученные значения A_1^0 и ω_1 вещественны и положительны, то автоколебания возможны, в противном случае они невозможны.

Для замкнутой нелинейной автоматической системы на основании (13.71) характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы запишется в виде

$$K_A(p, A) + 1 = K(p) N(p, A) + 1 = 0. \quad (13.73)$$

Линейное уравнение (13.73) позволяет применить любой из известных методов линейной теории автоматического управления для приближенного исследования автоколебаний нелинейной системы методом гармонической линеаризации. Наиболее широко применяются методы Л. С. Гольдфарба и Е. П. Попова. При их использовании в первую очередь следует найти выражение $N(p, A)$ для заданной нелинейной характеристики. Если нелинейная характеристика однозначна и симметрична, а нелинейный элемент не содержит индуктивностей, емкостей и других элементов, создающих инерционность, то $N(j\omega, A)$ зависит обычно только от A , а фаза равна нулю, т. е. функция $N(A) = q(A)$ является вещественной.

§ 13.7. Определение комплексных коэффициентов усиления и передаточных функций нелинейных звеньев

Используя обозначения для $q(A)$ и $q_1(A)$, а также выражения (13.64) и (13.65), можно записать комплексные коэффициенты в общем виде:

$$q(A) = -\frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} \Phi(A \sin \psi) \sin \psi d\psi; \quad (13.74)$$

$$q_1(A) = -\frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} \Phi(A \sin \psi) \cos \psi d\psi. \quad (13.75)$$

В зависимости от вида нелинейной характеристики рассматриваемого звена на основании (13.74) и (13.75) можно получить выражения для $q(A)$ и $q_1(A)$, что позволит по формулам (13.69) и (13.70) найти соответствующие передаточные функции гармонически линейризованных нелинейных звеньев.

Интегралы (13.74) и (13.75) практически характеризуют среднее за период значение функций $\varphi(A \sin \psi) \sin \psi$ и $\varphi(A \sin \psi) \cos \psi$, что в некоторых случаях может быть использовано для графической

оценки величин указанных интегралов. Аналитическое выражение для функции $\varphi(A \sin \psi)$ в каждом конкретном случае нелинейной характеристики различно и может быть установлено из графика выходной переменной нелинейного звена при гармоническом воздействии на его входе.

Для идеальной релейной характеристики (см. рис. 13.3, а) графики функций $\sin \psi$ и $\varphi(A \sin \psi)$ показаны на рис. 13.27, а, на основании которых построен график $\varphi(A \sin \psi) \sin \psi$ (рис. 13.27, б), определяющий величину комплексного коэффициента усиления $q(A)$. Нелинейная характеристика в данном случае однозначна и симметрична, следовательно, коэффициент $q_1(A)$ равен нулю и график $\varphi(A \sin \psi) \cos \psi$ можно не строить, так как среднее значение при этом будет равно нулю.

{ Вычислим интеграл [см. (13.74)], определяющий передаточную функцию $N(p, A)$, так как $q_1(A) = 0$:

$$\begin{aligned} N(p, A) = q(A) &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{\pi} S \sin \psi d\psi + \frac{1}{\pi A} \int_0^{\pi} (-S) (-\sin \psi) d\psi = \\ &= \frac{2S}{\pi A} \int_0^{\pi} \sin \psi d\psi = \frac{2S}{\pi A} (-\cos \psi) \Big|_0^{\pi} = -\frac{2S}{\pi A} (-1 - 1) = \frac{4S}{\pi A}. \end{aligned} \quad (13.76)$$

Аналогично можно найти выражения для $q(A)$, $q_1(A)$ и $N(p, A)$ при других нелинейных характеристиках [Л. 23]. Запишем их без доказательства.

Для релейной характеристики с зоной нечувствительности (см. рис. 13.3, в) при $\geq a$

$$N(p, A) = q(A) = \frac{4S}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}}, \quad (13.77)$$

где a — ширина зоны нечувствительности.

Для двухпозиционного реле с гистерезисной петлей (см. рис. 13.3, б)

$$N(p, A) = \frac{4S}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} - \frac{4Sa}{\pi A^2 \omega} p. \quad (13.78)$$

Для трехпозиционного реле с гистерезисной петлей (см. рис. 13.3, з) при $A \geq a_2$

$$N(p, A) = \frac{2S}{\pi A} \left(\sqrt{1 - \frac{a_2^2}{A^2}} + \sqrt{1 - \frac{a_1^2}{A^2}} - \frac{2S(a_2 - a_1)}{\pi A^2 \omega} \cdot p \right). \quad (13.79)$$

Для характеристики с зоной нечувствительности без насыщения (см. рис. 13.2, б) с учетом $q_1(A) = 0$ при $A \geq a$

$$N(p, A) = q(A) = k - \frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{a}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \right), \quad (13.80)$$

где $k = \arctg \alpha$ — коэффициент, характеризующий угол наклона линейного участка; a — ширина зоны нечувствительности.

Для характеристики с насыщением и линейным участком (см. рис. 13.2, а) при $A \geq a = S/k$

$$N(p, A) = q(A) = \frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{a}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \right). \quad (13.81)$$

При $A \leq a$ характеристика линейна, поэтому $q(A) = k$.

Для характеристики с зоной нечувствительности и насыщением (см. рис. 13.2, в) при $A > a_1 = S/k + a$

$$N(p, A) = q(A) = \frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{a_1}{A} - \arcsin \frac{a}{A} + \right. \\ \left. + \frac{a_1}{A} \sqrt{1 - \frac{a_1^2}{A^2}} - \frac{a}{A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \right). \quad (13.82)$$

Для характеристики типа люфта (см. рис. 13.2, г):

$$\left. \begin{aligned} q(A) &= \frac{k}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \left(1 - \frac{2a}{A} \right) + 2 \left(1 - \frac{2a}{A} \right) \sqrt{\frac{a}{A} \left(1 - \frac{a}{A} \right)} \right]; \\ q_1(A) &= -\frac{4ka}{\pi A} \left(1 - \frac{a}{A} \right) \text{ при } A \geq a; \\ N(p, A) &= q(A) + \frac{q_1(A)}{\omega} p. \end{aligned} \right\} \quad (13.83)$$

Соответствующим образом можно получить выражения для $q(A)$, $q_1(A)$ и $N(p, A)$ применительно к более сложным нелинейным (в частности, несимметричным) характеристикам, в том числе к характеристикам с переменным коэффициентом усиления, а также при учете постоянных и медленно меняющихся воздействий в системе [Л. 23]. В некоторых случаях для $q(A)$ и $q_1(A)$ используется другая форма записи (через тригонометрические функции), которая эквивалентна указанной выше.

На рис. 13.28 представлены графики для $q(A)$ и $q_1(A)$, построенные по известным формулам в относительных единицах соответственно указанным нелинейным характеристикам. Кривая 1 соответствует

характеристике с линейным участком и насыщением; 2 — характеристике с зоной нечувствительности; 3 и 3' — характеристикам с зоной нечувствительности и насыщением для различных наклонов линейного участка; 4 — идеальной релейной характеристике; 5 и 5' — релейной характеристике с гистерезисной петлей; 6 — релейной характеристике с зоной нечувствительности; 6' и 7' — релейной характеристике с гистерезисом и зоной нечувствительности; 7 и 7' — характеристике

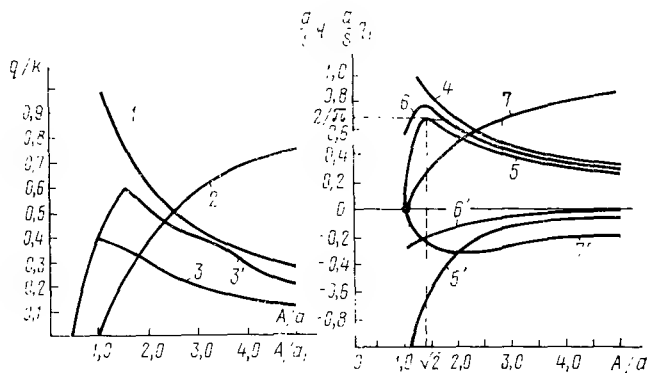


Рис. 13.28

типа люфта; здесь 5', 6' и 7' — характеристики для $q_1(A)$. Для идеальной релейной характеристики следует считать $a = 1$, а для характеристики с насыщением $a = S/k$.

§ 13.8. Метод Л. С. Гольдфарба

Характеристическое уравнение гармонически линеаризованной линейной системы (13.73) может быть использовано для определения автоколебаний.

Л. С. Гольдфарб предложил графо-аналитический способ решения уравнения вида (13.73) с помощью построения характеристик $K(j\omega)$ и $N^{-1}(A)$ и анализа взаимного расположения их на комплексной плоскости. В данном случае комплексный коэффициент нелинейного элемента рассматривается независимым от частоты. Это обстоятельство ограничивает применение метода Гольдфарба лишь для систем с указанным типом нелинейности. Однако подобный тип нелинейности в практике встречается весьма часто.

Заменив p на $j\omega$, уравнение (13.73) можно записать в следующем виде:

$$K(j\omega) N(A) = -1. \quad (13.85)$$

На основании (13.85)

$$K(j\omega) = -N^{-1}(A) \quad (13.86)$$

или

$$N(A) = -K^{-1}(j\omega). \quad (13.87)$$

В зависимости от того, какое из указанных выражений используется, следует построить или АФХ линейной части системы $K(j\omega)$ и отрицательную обратную эквивалентную характеристику $-N^{-1}(A)$ гармонически линеаризованного нелинейного звена, или отрицательную обратную АФХ линейной части системы $-K^{-1}(j\omega)$ и эквивалентную характеристику $N(A)$ гармонически линеаризованного нелинейного звена.

Рассмотрим сущность метода Л. С. Гольдфарба применительно к выражению (13.86). Если построить кривые $K(j\omega)$ и $-N^{-1}(A/a)$ в одной системе координат при одинаковом масштабе по осям координат, то в зависимости от того, пересекаются эти кривые или нет (рис. 13.29, а), можно судить о возможности существования автоколебаний.

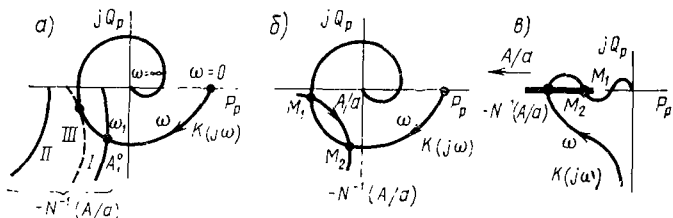


Рис. 13.29

Для удобства построения кривую $N(A/a)$ строят в относительных единицах, что позволяет совместить масштабы для обеих кривых. Точка пересечения кривых соответствует решению уравнения (13.73) и определяет наличие автоколебаний в системе (случай I). Если кривые не пересекаются, то решения уравнения (13.73) не существует и автоколебания невозможны (случай II). Если кривые имеют точку касания, то параметры системы соответствуют граничному (бифуркационному) случаю III.

В некоторых случаях возможно пересечение кривых в двух (рис. 13.29, б) и более точках.

Следует отметить, что для однозначных симметричных нелинейных характеристик кривая $-N^{-1}(A/a)$ совпадает с вещественной осью (см. рис. 13.29, в), так как мнимая составляющая в этом случае отсутствует.

О факте устойчивости или неустойчивости колебаний при увеличенной (по сравнению со значением в точке пересечения характеристик) амплитуде судят следующим образом: если точка на кривой нелинейного элемента, соответствующая увеличенной амплитуде, не охватывается частотной характеристикой $K(j\omega)$ линейной части системы, то колебания устойчивы, а если охватывается характеристикой $K(j\omega)$, то колебания неустойчивы.

На основании указанного выше правила точки M_2 на рис. 13.29, б и в соответствуют устойчивым, а точки M_1 — неустойчивым колебаниям. По точке M_2 определяется амплитуда A_1^0 (из кривой нелинейного элемента) и частота ω_1 (из АФХ линейной части) автоколебаний.

Метод Л. С. Гольдфарба не может быть применен, если система содержит нелинейные элементы, под знаком нелинейной функции которых имеется две или более переменных, а также в тех случаях, когда нельзя имеющиеся несколько нелинейных элементов заменить одним эквивалентным нелинейным звеном. Этот метод позволяет

использовать известные в линейной теории методы коррекции линейной части с целью исключения или получения автоколебаний в нелинейной системе. Линейная часть системы при этом может быть как устойчивой, так и неустойчивой.

Пример 13.5. Определим наличие автоколебаний в нелинейной автоматической системе, соответствующей схеме, приведенной на рис. 13.22, если нелинейным элементом является двухпозиционное реле с гистерезисной характеристикой (ширина петли $a = \pm 1$, а выходной сигнал реле $S = \pm 1$). Линейная часть системы имеет передаточную функцию

$$K(p) = \frac{1}{p(p+1)(0,5p+1) \times \rightarrow \rightarrow \times (0,25p+1)(0,1p+1)}, \quad (13.87)$$

а передаточная функция гармонически линеаризованного релейного элемента подобна (13.78).

АФХ линейной части системы $K(j\omega)$ построим соответственно (13.87) после замены p на $j\omega$, а характеристику $-N^{-1}(A)$ построим на основании (13.78) и значений $a = \pm 1$; $S = \pm 1$ по выражению

$$\begin{aligned} -N^{-1}(A) &= \\ &= -0,785 \sqrt{A^2 - 1} - j0,785. \end{aligned}$$

Точка пересечения M кривой $K(j\omega)$ и характеристики $N^{-1}(A)$ определяет параметры автоколебаний (рис. 13.30, а)*: $\omega_1 = 0,57$ 1/сек [из кривой $K(j\omega)$] и $A_1^0 = 1,82$ [из характеристики $-N^{-1}(A)$] или по значению $P_p(\omega) = -1,2 = -0,785 \sqrt{A^2 - 1}$ для точки M].

Если релейный элемент имеет идеальную характеристику и $a = 0$, то $-N^{-1}(A) = -0,785 A$. Следовательно, характеристика $-N^{-1}(A)$ при $a = 0$ совпадает с отрицательной вещественной полуосью. В этом случае в системе

* На рис. 13.30, а приведена также кривая $J(\omega)$, построенная по методу Цыпкина (см. § 13.10, пример 13.7).

также имеют место автоколебания с параметрами, определяемыми точкой перегиба M_1 :

$$\omega_1 = 0,98 \text{ 1/сек} \quad \text{и} \quad A_1^0 = 0,81.$$

В обоих случаях (при $a = 1$ и $a = 0$) колебания в системе устойчивы, так как точки на характеристиках $-\chi^{-1}(A)$ при $A_1^0 = 0,81$ не охватываются кривой $(j\omega)$.

Для проверки условия фильтра системы на рис. 13.30, б построена характеристика $|K(j\omega)|$ и для неидеального реле ($a = 1$) определены значения $\chi(j\omega_1) = 1,42$, $|K(j3\omega_1)| = 0,2$ и $|K(j5\omega_1)| = 0,05$.

В данной системе четные гармоники отсутствуют, а амплитуда третьей гармоники составляет 14%, поэтому расчет является приближенным.

В случае идеального реле ($a = 0$) амплитуда третьей гармоники составляет 6%, поэтому точность расчета будет достаточной.

§ 13.9. Метод Е. П. Попова

Метод Попова основан на аналитическом решении характеристического уравнения замкнутой гармонически линеаризованной системы вида (13.73). При этом находятся формулы, определяющие непосредственно зависимость амплитуды и частоты автоколебаний от параметров системы. Метод Е. П. Попова позволяет исследовать нелинейные системы, содержащие нелинейности, эквивалентные характеристике $\chi(j\omega, A)$ которых зависят как от A , так и от ω . Кроме того, этот метод позволяет исследовать нелинейные системы с несколькими нелинейностями, разделенными линейными инерционными звеньями.

Запишем (13.73) с учетом выражения для $K(p)$:

$$\frac{B(p)}{A(p)} N(p, A) + 1 = 0 \quad (13.88)$$

ти

$$A(p) + B(p) N(p, A) = 0.$$

В более сложных случаях, когда, например, имеется два нелинейных элемента, уравнение (13.88) будет содержать $N_1(p, A)$ и $N_2(p, A)$.

Определение параметров автоколебаний. Для того чтобы решение (3.88) соответствовало автоколебаниям системы, определяемым приближенно в синусоидальном виде $x = A \sin \omega t$ (где A и ω — амплитуда и частота колебаний выходной переменной), необходимо наличие пары чисто мнимых корней $p = \pm j\omega$.

Вместо (13.88) с учетом $p = j\omega$ запишем квазилинейное уравнение на постоянной частоте автоколебаний ($\omega = \omega_1$):

$$A(j\omega) + B(j\omega) N(j\omega, A) = 0. \quad (13.88a)$$

Разделив вещественную и мнимую части, получим

$$X(A, \omega) + jY(A, \omega) = 0. \quad (13.89)$$

Равенство (13.89) возможно в том случае, если равны нулю вещественная и мнимая части:

$$\left. \begin{aligned} X(A, \omega) &= 0; \\ Y(A, \omega) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13.90)$$

Два уравнения (13.90) с двумя неизвестными A и ω позволяют найти параметры автоколебаний. Если полученные значения A_1^0 и ω_1 являются вещественными и положительными, то в системе возможны автоколебания. Уравнения (13.90), кроме того, позволяют получить формулы, устанавливающие непосредственную зависимость A и ω от параметров системы.

Чтобы определить параметры автоколебаний, можно построить серию кривых в системе прямоугольных координат X и Y на основании (13.90), принимая какое-либо значение $A_i = \text{const}$ и изменяя частоту ω от 0 до ∞ . Кривая, проходящая через начало координат [когда выполняются равенства (13.90)], определяет амплитуду A_1^0

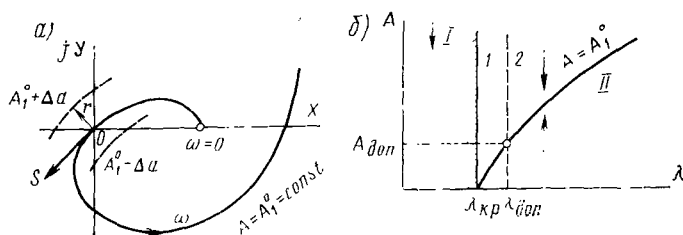


Рис. 13.31

(индекс кривой) и частоту ω_1 для точки, находящейся в начале координат (рис. 13.31, а). При этом кривая должна пройти через $(n - 1)$ квадрант, как это следует из критерия Михайлова.

Указанные способы могут быть также применены, если нелинейная система содержит звено с запаздыванием.

После определения параметров автоколебаний необходимо исследовать устойчивость этих колебаний. Для чего составим гармонически линеаризованное дифференциальное уравнение в малых отклонениях (вариациях) от исследуемого периодического решения. Введем новую переменную $x = x^* + \Delta x$, где $x^* = A_1^0 \sin \omega_1 t$, и на основании (13.88) запишем уравнение в вариациях [Л. 23]:

$$A(p)\Delta x + B(p)\left[\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)^* \Delta x + \left(\frac{\partial N}{\partial p x}\right)^* p \Delta x\right] = 0, \quad (13.91)$$

где знак «*» означает, что после взятия производной следует подставить $x^* = A_1^0 \sin \omega_1 t$.

Далее по (13.91) исследуется устойчивость. Однако (13.91) содержит периодически изменяющиеся коэффициенты, определяемые частными производными. Решение такого уравнения возможно по методу А. М. Ляпунова, что является весьма трудной и часто невыполнимой задачей.

Для определения устойчивости колебаний может быть использован критерий Михайлова. Если по (13.89) построена кривая, проходящая через начало координат, то значение амплитуды этой кривой соответствует амплитуде A_1^0 автоколебаний. Дадим малое приращение амплитуде ($A_1^0 \pm \Delta a$), тогда коэффициенты (13.89) изменятся и кри-

вая не пройдет через начало координат. Если последняя соответствует устойчивой системе, то колебания устойчивы.

Рассмотренный способ удобно применять, если показатели периодического решения A_1^0 и ω_1 определялись при построении кривых в системе координат X и Y .

Если рассмотреть перемещение кривой Михайлова относительно точки 0 при малом изменении амплитуды и частоты, то на основании приращений векторов (см. рис. 13.31) можно получить общее условие для проверки устойчивости в виде неравенства [Л. 23]

$$\left(\frac{\partial X}{\partial A}\right)' \cdot \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)' - \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)' \cdot \left(\frac{\partial Y}{\partial A}\right)'' > 0, \quad (13.92)$$

где знак «'» означает, что после взятия частных производных следует подставить вместо A и ω значения, полученные для периодического решения A_1^0 и ω_1 (параметры автоколебаний).

В том случае, когда для определения амплитуды и частоты автоколебаний используются логарифмические частотные характеристики (см. рис. 13.26, б), построенные по (13.72), устойчивость колебаний находится следующим образом.

Если при увеличении амплитуды на Δa условие устойчивости обеспечивается, то колебания затухают, а если устойчивость не обеспечивается, то колебания расходятся.

Аналогично можно определить устойчивость колебаний при построении серии кривых АФХ (см. рис. 13.26, а). Следовательно, для получения устойчивых колебаний необходимо, чтобы при $\Delta a > 0$ критерий устойчивости Найквиста удовлетворялся, а при $\Delta a < 0$ не удовлетворялся, после того, как определен граничный случай на частотных характеристиках разомкнутой системы.

Выделение областей устойчивости. Во многих случаях требуется так построить автоматическую систему, чтобы автоколебаний не возникало и равновесное состояние системы было устойчивым.

Предельная линейная система, при которой нелинейность исключена из рассмотрения, должна быть устойчивой.

При исследовании нелинейной системы определение устойчивости колебаний и областей устойчивости можно совместить.

Оценим влияние некоторого параметра системы λ на параметры автоколебаний и пределы области отсутствия колебаний. Для этого из (13.88а) получим два уравнения:

$$X(A, \omega, \lambda) = 0; \quad Y(A, \omega, \lambda) = 0,$$

из которых определим зависимость

$$A = f(\lambda). \quad (13.93)$$

По (13.93) построим кривую для действительных значений A_1^0 при различных λ .

Допустим, что для некоторой нелинейной системы выделены область отсутствия колебаний и область автоколебаний по какому-либо параметру λ , разделенные критическим значением $\lambda_{кр}$. Пусть найдено

единственным устойчивым периодическое решение, зависимость амплитуды A_1^0 которого от параметра λ показана на рис. 13.31, б. Этот график будет иметь при $\lambda_{кр}$ границу (линия I) устойчивой работы (область I) и автоколебаний (область II). По кривой устойчивых колебаний указывается две подобласти: расходящихся колебаний (при $A < A_1^0$) и сходящихся колебаний (при $A > A_1^0$). В подобласти расходящихся колебаний стрелка показывает направление нарастания амплитуды, а в подобласти затухающих колебаний — направление убывания амплитуды. При устойчивых колебаниях оба процесса сходятся к одному с амплитудой A_1^0 и частотой ω_1 , что справедливо для $\lambda > \lambda_{кр}$ (см. рис. 13.31, б). В области устойчивого равновесия для $\lambda < \lambda_{кр}$ стрелка показывает направление убывания амплитуды при любых начальных значениях A . Может быть также указана безопасная граница (штриховая линия 2) устойчивости (при $\lambda_{дон}$) в области автоколебаний, если амплитуда автоколебаний не превосходит допустимое из практических соображений значение $A_{дон}$. Если при $\lambda > \lambda_{дон}$ амплитуда автоколебаний $A > A_{дон}$, то автоколебания будут опасными, что практически соответствует неустойчивости. На основании указанного об опасной и безопасной границах автоколебаний введено понятие о практической устойчивости автоколебательных систем в пределах до $A_{дон}$ при $\lambda < \lambda_{дон}$ [Л. 4].

Пример 13.6. Исследуем астатическую систему с электронным усилителем, потенциометрическими преобразователями, приводом постоянного тока по системе «генератор-двигатель» [Л. 33]. Структурная схема данной системы представлена на рис. 13.32. Исследуем свободное движение системы ($u_0 = 0$) методом гармонической линеаризации, полагая при этом, что сигнал на входе нелинейного усилителя $\varphi(\sigma)$ имеет синусоидальную форму: $A \sin \omega t$ (рис. 13.33, а). В связи с инерционностью линейной части (значительные постоянные времени T_1 и T_2) система обладает свойствами фильтра.

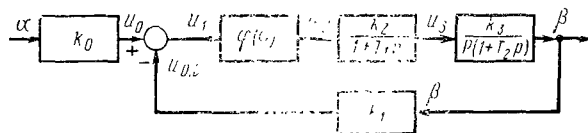


Рис. 13.32

Исследуем возможность возникновения автоколебаний в замкнутом контуре системы при нелинейной характеристике усилителя типа линейного участка и насыщения (см. рис. 13.2, а).

На основании структурной схемы (см. рис. 13.32) передаточная функция линейной части системы

$$K(p) = K_{\Sigma} [p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)] = B(p)/A(p), \quad (13.94)$$

где $K_{\Sigma} = k_1 k_2 k_3$ — коэффициент усиления линейной части.

Характеристическое уравнение замкнутой системы запишем в виде

$$A(p) + B(p) \chi(p, A) = 0. \quad (13.95)$$

Для данного вида нелинейности усилителя передаточная функция гармонически линеаризованного нелинейного усилителя $\chi(p, A)$ определяется выражением (13.81), поэтому вместо (13.95) с учетом $\chi(p, A) = q(A)$ получим

$$T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + p + K_{\Sigma} q(A) = 0. \quad (13.96)$$

Заменив p на $j\omega$ и отделив вещественную и мнимую части, запишем два уравнения, определяющих амплитуду и частоту колебаний:

$$\left. \begin{aligned} X(A, \omega) &= \frac{2k_y K_{\Sigma}}{\pi} \left(\arcsin \frac{a}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \right) - (T_1 + T_2) \omega^2 = 0; \\ Y(A, \omega) &= \omega - T_1 T_2 \omega^3 - 1 - T_1 T_2 \omega^2 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (13.97)$$

где $k_y = S/a$ — коэффициент усиления усилителя в пределах линейного участка a .

Из второго уравнения (13.97) определим частоту автоколебаний

$$\omega_1 = 1/\sqrt{T_1 T_2}. \quad (13.98)$$

Следовательно, в данном случае частота автоколебаний зависит только от постоянных времени и не зависит от коэффициентов усиления звеньев и диапазона линейности a .

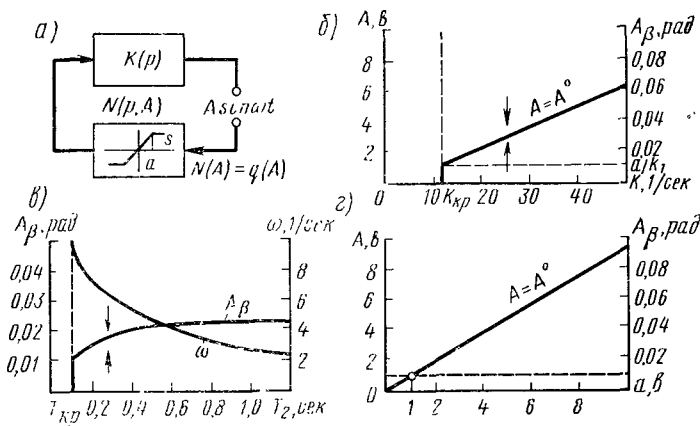


Рис. 13.33

Подставив (13.98) вместо ω в первое уравнение (13.97), получим формулу, связывающую амплитуду периодического решения с параметрами системы:

$$\frac{2K}{\pi} \left(\arcsin \frac{a}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \right) - \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} = 0, \quad (13.99)$$

где $K = K_{\Sigma} k_y$ — коэффициент усиления разомкнутой системы при линейном усилителе.

Пусть параметры звеньев системы заданы: $K = 20$ 1/сек; $T_1 = 0,1$ сек; $T_2 = 1$ сек; $a = 1$ в; $k_1 = 100$ в/рад.

По (13.98) с учетом указанных значений параметров получим $\omega_1 = 3,16$ 1/сек*. Поскольку уравнение (13.99) трансцендентно относительно амплитуды, то целесообразно построить график зависимости амплитуды от какого-либо параметра, задаваясь значением амплитуды, например, для K :

$$K = \frac{\pi (T_1 + T_2)}{2T_1 T_2 \left(\arcsin \frac{a}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \right)}. \quad (13.100)$$

* Это значение соответствует частоте колебаний данной системы.

На рис. 13.33, б показан график зависимости амплитуды автоколебаний A от параметра K . Если усилитель не имеет насыщения, то первое слагаемое (13.99) будет равно $K_{кр}$, поэтому

$$K_{кр} - \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} = 0 \text{ или } K_{кр} = 11 \text{ 1/сек.}$$

Аналогично для граничного случая ($a \rightarrow A$) из (13.100) получим

$$K_{гр} = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} = 11 \text{ 1/сек,}$$

т. е. при $K_{гр} = K_{кр} = 11 \text{ 1/сек}$ амплитуда гармонических колебаний на входе усилителя $A_1^0 = a = 1 \text{ в}$. При $K > K_{кр}$ в линейной системе возникают расходящиеся колебания (неустойчивая система). В связи с тем, что усилитель имеет насыщение при $K > K_{кр}$, в системе будут устанавливаться автоколебания с ограниченной амплитудой (см. рис. 13.33, б) и частотой $\omega_1 = 3,16 \text{ 1/сек}$, не зависящей от K .

Устойчивость колебаний, возникающих при $K > K_{кр}$, проверим, используя (13.92) и (13.97):

$$\left(\frac{\partial X}{\partial A} \right)' = K_{л} \left[\frac{\partial q(A)}{\partial A} \right]'$$

При $A < a$ значение $(\partial X / \partial A)' > 0$, а при $A > a$ значение $(\partial X / \partial A)' < 0$, так как $[\partial q(A) / \partial A] < 0$ из графика $q(A)$ данной нелинейности:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial Y}{\partial A} \right)' &= 0; \quad \left(\frac{\partial X}{\partial \omega} \right)' = -2\omega_1 (T_1 + T_2) < 0; \\ \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega} \right)' &= 1 - 3\omega_1^2 T_1 T_2 = 1 - 3 \frac{T_1 T_2}{T_1 T_2} = -2 < 0, \end{aligned}$$

откуда [см. (13.92)]

$$-2K_{л} \left[\frac{\partial q(A)}{\partial A} \right]' > 0,$$

поскольку

$$\frac{\partial q(A)}{\partial A} < 0.$$

Следовательно, условие (13.92) соблюдается и колебания при $K > K_{кр}$ устойчивы, что показано стрелками на кривой $A_1^0 = f(K)$ (см. рис. 13.33, б). Область устойчивого равновесного состояния определяется штриховой линией, проходящей через точку на оси абсцисс при $K = K_{кр}$. При $K < K_{кр}$ и $a < A$ от амплитуды начальных отклонений система устойчива и автоколебания не возникают.

При $K > K_{кр}$ и $A < A_1^0$ появляются расходящиеся колебания и устанавливаются автоколебания с амплитудой A_1^0 и ω_1 ; при $A > A_1^0$ возникают затухающие колебания и устанавливаются автоколебания с амплитудой A_1^0 и ω_1 .

При заданном значении $K = 20 \text{ 1/сек}$ имеют место автоколебания с амплитудой $A_1^0 = 2,2 \text{ в}$ и частотой $\omega_1 = 3,16 \text{ 1/сек}$. Амплитуда автоколебаний вала двигателя на входе управляемого объекта определяется в результате пересчета по формуле (см. рис. 13.32):

$$A_{\beta} = A/k_1, \quad (13.101)$$

что указано справа на графике рис. 13.33, б.

При заданных параметрах значение $A_{\beta} = 0,022 \text{ рад}$, а частота автоколебаний в любом месте системы $\omega_1 = 3,16 \text{ 1/сек}$.

На основании формул (13.98), (13.100) и (13.101) можно построить графики зависимостей амплитуды A_B и частоты ω_1 автоколебаний от постоянной времени T_2 (рис. 13.33, в) и диапазона линейного участка a (рис. 13.33, г) с учетом заданных значений других параметров.

Как видно из выполненных построений, в зависимости от значений параметров возможна работа системы как с автоколебательным установившимся режимом, так и с устойчивым режимом без автоколебаний. Уменьшение амплитуды автоколебаний возможно за счет снижения коэффициента усиления K , постоянных времени (T_1 и T_2) и уменьшения зоны линейной части характеристики a . Частота автоколебаний ω_1 изменяется только при изменении T_1 и T_2 . Исключить автоколебания можно за счет снижения коэффициента усиления и уменьшения постоянных времени.

Аналогично можно исследовать любую нелинейную автоматическую систему: при любом виде нелинейных характеристик [Л. 23] определить несимметричные автоколебания, возникающие либо при несимметричных нелинейных характеристиках, либо при постоянном или медленно меняющемся внешнем воздействии.

Существуют также другие разновидности метода гармонической линеаризации, позволяющие исследовать устойчивость, автоколебания, выпущенные колебания, переходные процессы и качество процесса регулирования нелинейных систем (методы И. И. Кринецкого, К. Магнуса, А. И. Кухтенко, П. Е. Гренстеда, Г. Е. Пухова и др.).

§ 13.10. Частотный метод анализа релейных систем

Специфической особенностью релейных систем является то, что форма выходной переменной релейного элемента не зависит от формы его входной переменной. В этих системах управляющее воздействие, прикладываемое к исполнительному устройству или к регулирующему органу, изменяется с к а ч е с т в о м всякий раз, когда управляющий сигнал на входе релейного элемента проходит через некоторые п о р о г о в ы е значения. В релейных системах усилитель (релейный элемент) представляет собой контактное или бесконтактное реле: электромагнитное, электронное, пневматическое и т. п.

Структурная схема релейной системы должна быть преобразована так, чтобы в замкнутый контур входили линейная часть $ЛЧ$ системы с передаточной функцией $K(p)$ и отдельно релейный элемент $РЭ$ (рис. 13.34, а).

Для точного исследования релейных систем второго порядка используется метод фазовой плоскости.

Здесь кратко рассматриваются основы ч а с т о т н о г о метода Я. З. Цыпкина, позволяющего производить т о ч н о е исследование релейных систем любого порядка.

Исследование автоколебаний. В автоколебательном режиме выходная переменная $x(t)$ является периодической функцией времени и представляет собой установившуюся реакцию линейной части на последовательность знакопеременных прямоугольных импульсов. При свободном автоколебательном движении системы на вход релейного элемента поступает сигнал $\sigma = x(t)$. Переключение релейного элемента происходит при $x(t) = \pm a$ (рис. 13.34, б) для двухпозиционного

реле с гистерезисной характеристикой. Если совместить начало координат ($t = 0$) с началом какого-либо положительного импульса, то на основании указанного запишем условия автоколебательного режима:

$$\sigma(0) = a; \quad \sigma(T_n) = -a, \quad (13.102a)$$

или

$$x(0) = -a; \quad x(T_n) = a, \quad (13.102b)$$

где T_n — продолжительность импульса.

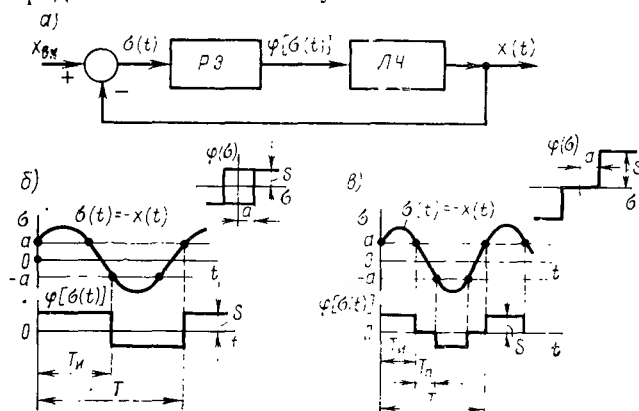


Рис. 13.34

В случае идеального ($a = 0$) двухпозиционного реле

$$x(T_n) = 0.$$

Для трехпозиционных реле автоколебательный режим (рис. 13.34, в) будет существовать, если выполняются два условия:

$$\left. \begin{aligned} x(T_n) &= -a; \\ x(T_n + T_n) &= -a, \end{aligned} \right\} \quad (13.103)$$

где T_n — продолжительность паузы.

Уравнения (13.102a), (13.102b) и (13.103) называются *уравнениями периодов*, которые должны быть дополнены условиями переключения реле в надлежащую сторону и условием отсутствия непредусмотренных переключений при $0 < t < T_n$:

$$\sigma(t) < -a.$$

Анализируя графики (см. рис. 13.34, б), заключаем, что переключение реле в надлежащую сторону произойдет, если кроме (13.102a) и (13.102b) выполняется условие:

$$d\sigma(T_n)/dt > 0, \quad (13.104a)$$

или

$$dx(T_n)/dt < 0. \quad (13.104b)$$

Для трехпозиционных реле без гистерезиса кроме (13.103) необходимо выполнение двух дополнительных условий:

$$\left. \begin{aligned} dx(T_n)/dt &> 0; \\ dx(T_n + T_n)/dt &> 0. \end{aligned} \right\} \quad (13.105)$$

Я. З. Цыпкиным получены также условия существования автоколебаний для трехпозиционных реле с гистерезисом.

Для режима автоколебаний системы период и частоту можно выразить следующим образом:

$$f = 1/T = \omega/(2\pi). \quad (13.106)$$

Поскольку выходная переменная релейного элемента (см. рис. 13.34, б и в) имеет прямоугольную форму, то для идеального реле, например, ее можно представить в виде ряда

$$\begin{aligned} \varphi[\sigma(t)] = S \cdot 1(t) - 2S \cdot 1(t - T/2) + 2 \cdot S \cdot 1(t - T) - \\ - 2S \cdot 1(t - 3T/2) + \dots \end{aligned} \quad (13.107)$$

Эта функция является нечетной симметричной относительно оси абсцисс, поэтому, учитывая (13.106), вместо (13.107) можно записать ряд Фурье:

$$\varphi[\sigma(t)] = \frac{4S}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \dots \right) = \frac{4S}{\pi} \sum_n \frac{\sin n\omega t}{n}. \quad (13.108)$$

Здесь отсутствует постоянная составляющая, четные гармоники и члены с косинусами, а $n = 1, 3, 5, 7, \dots$ — положительные нечетные числа.

С выхода реле сигнал вида (13.108) поступает на линейную часть системы с передаточной функцией $K(p)$, для которой справедлив принцип суперпозиции. Выходную переменную $x(t)$ удобно рассматривать как совокупность реакций линейной части системы на гармонические составляющие с частотами $\omega, 3\omega, 5\omega, \dots, (2n - 1)\omega$:

$$x(t) = \frac{4S}{\pi} \left\{ A(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)] + \frac{1}{3} A(3\omega) \sin[3\omega t + \varphi(3\omega)] + \dots \right\},$$

или

$$x(t) = \frac{4S}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n} A(n\omega) \sin[n\omega t + \varphi(n\omega)], \quad (13.109)$$

где $A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = K(j\omega)$.

Производная по времени от (13.109)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{4S}{\pi} \omega \sum_{n=1,3,5,\dots} A(n\omega) \cos[n\omega t + \varphi(n\omega)]. \quad (13.110)$$

Выражения (13.109) и (13.110) перепишем для момента времени $t = T_n = T/2$, выражая на основании (13.106) ωT_n через π и используя тождества $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$ и $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$:

$$\left. \begin{aligned} x(T_n) &= -\frac{4S}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n} A(n\omega) \sin \varphi(n\omega); \\ \frac{dx(T_n)}{dt} &= -\frac{4S}{\pi} \omega \sum_{n=1,3,5,\dots} A(n\omega) \cos \varphi(n\omega). \end{aligned} \right\} \quad (13.111)$$

Частотную функцию линейной части системы запишем для какого-либо значения частоты:

$$\begin{aligned} K(j\omega) &= A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = A(\omega) \cos \varphi(\omega) + jA(\omega) \sin \varphi(\omega) = \\ &= P_p(\omega) + jQ_p(\omega), \end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned} P_p(\omega) &= A(\omega) \cos \varphi(\omega); \\ Q_p(\omega) &= A(\omega) \sin \varphi(\omega). \end{aligned} \right\} \quad (13.112)$$

Учитывая (13.112), вместо (13.111) будем иметь

$$\left. \begin{aligned} x(T_n) &= -\frac{4S}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{Q_p(n\omega)}{n}; \\ \frac{dx(T_n)}{dt} &= -\frac{4S}{\pi} \omega \sum_{n=1,3,5,\dots} P_p(n\omega). \end{aligned} \right\} \quad (13.113)$$

Автоколебания в релейной системе с двухпозиционным реле будут существовать, если (13.113) удовлетворяют условиям (13.102а), (13.102б) и (13.104а), (13.104б).

Уравнения (13.113) связывают условия существования автоколебаний с некоторой частотной характеристикой системы, которая может быть составлена на основании частотной функции линейной части системы $K(j\omega)$. Для практического определения автоколебаний релейной системы Я. З. Цыпкиным предложен частотный метод с построением характеристики релейной системы

$$J(\omega) = -\frac{1}{\omega} \cdot \frac{dx(T_n)}{dt} - jx(T_n) = \operatorname{Re} J(\omega) + j \operatorname{Im} J(\omega), \quad (13.144)$$

где

$$\operatorname{Re} J(\omega) = -\frac{1}{\omega} \cdot \frac{dx(T_n)}{dt}; \quad \operatorname{Im} J(\omega) = -x(T_n).$$

Учитывая (13.113), вместо (13.144) запишем окончательно выражение для характеристики релейной системы в случае двухпозиционного реле:

$$J(\omega) = \operatorname{Re} J(\omega) + j \operatorname{Im} J(\omega) = \frac{4S}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \left[P_p(n\omega) + j \frac{Q_p(n\omega)}{n} \right]. \quad (13.115)$$

Выражение (13.115) показывает, что вектор характеристики $J(\omega)$ на комплексной плоскости равен сумме векторов $K^*(jn\omega)$ амплитудно-фазовой характеристики линейной части системы $K(j\omega)$ с дополнительным пересчетом мнимой части путем деления на n , а результирующий вектор умножается на $4S/\pi$.

Для первой гармоники $K^*(jn\omega) = K(j\omega)$, т. е. вектор первого слагаемого не пересчитывается и определяется точкой на АФХ линейной части $K(j\omega)$ для выбранного значения частоты ω_1 . Остальные слагаемые при $n > 1$ ($n = 3, 5, 7, 9, \dots$) соответственно (13.115) пересчитываются путем уменьшения мнимой составляющей в n раз, что позволяет получить векторы слагаемых $K^*(jn\omega_1)$, обусловлен-

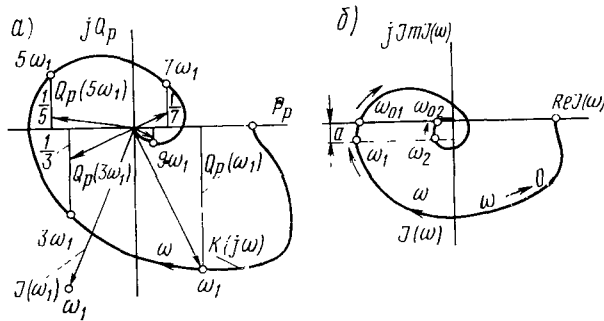


Рис. 13.35

ных высшими гармониками (рис. 13.35, а). Складывая геометрически слагаемые векторы $K^*(jn\omega_i)$ и умножая на $4S/\pi$, получим векторы $J(\omega_i)$ характеристики релейной системы.

Геометрическое место концов векторов $J(\omega_i)$ определяет характеристику релейной системы (рис. 13.35, б). Я. З. Цыпкиным предложены способы построения $J(\omega)$ по выражениям для $Re J(\omega)$ и $Im J(\omega)$ (что в некоторых случаях упрощает решение задачи), а также по переходной характеристике или по передаточной функции $K(p)$ линейной части системы. Если в системе имеется звено с запаздыванием, то это учитывается при построении $K_\tau(j\omega)$.

Если нанести кривую $J(\omega)$ и провести в третьем квадранте прямую $Im J(\omega) = -a$ (рис. 13.35, б), то точки их пересечения в левой полуплоскости определяют частоты возможных автоколебаний $\omega = \omega_1$, $\omega = \omega_2$ релейной системы при двухпозиционном реле с гистерезисной характеристикой, так как в этих точках удовлетворяются условия (13.102а), (13.102б) и (13.104а), (13.104б*):

$$Im J(\omega) = -x(T_n) = -a \text{ или } x(T_n) = a;$$

$$Re J(\omega) = \frac{-1}{\omega} \cdot \frac{dx(T_n)}{dt} < 0 \text{ или } \frac{dx(T_n)}{dt} > 0.$$

* Можно также построить $J(\omega)$ без умножения векторов $J(\omega_i)$ на $4S/\pi$, поэтому при определении возможных автоколебаний линия проводится через ординату $Im J(\omega) = -a\pi/(4S)$, что несколько упрощает построение.

Если же характеристика реле не имеет гистерезиса ($a = 0$), то рассматриваются точки пересечения (ω_{01} и ω_{02}) кривой $J(\omega)$ с отрицательной вещественной полуосью (которая в данном случае характеризует переключение реле).

Для релейной системы с трехпозиционным реле имеются два основных (13.103) и два дополнительных условия (13.105), поэтому должно быть составлено соответственно две характеристики релейной системы $J_1(\omega)$ и $J_2(\omega)$ для T_{II} и $T_{II} - T_{III}$, что усложняет исследование автоколебаний релейных систем с трехпозиционным реле.

Метод Я. З. Цыпкина позволяет уточнить результаты, полученные методом гармонической линеаризации, в котором учитывалась только первая гармоника. Из анализа взаимного расположения графика $J(\omega)$ и линии $\text{Im } J(\omega) = -a$ можно установить, что для увеличения частоты автоколебаний необходимо уменьшить величину a у релейного элемента (частота автоколебаний изменяется также в зависимости от коэффициента усиления).

Точное определение амплитуды (на входе релейного элемента) автоколебаний требует сложных вычислений. Однако приближенно (без учета высших гармоник) при ω_1 амплитуда автоколебаний

$$A_1^0 = \frac{4S}{\pi} |K(j\omega_1)|. \quad (13.116)$$

Исследование устойчивости релейной системы частотным методом. Если имеется только одна точка пересечения кривой $J(\omega)$ с линией $\text{Im } J(\omega) = -a$, характеризующей переключение реле при автоколебаниях (или с осью абсцисс слева при $a = 0$), то эта точка определяет устойчивые колебания. Если такой точки пересечения нет вообще, то автоколебания отсутствуют и релейная система устойчива.

На практике могут быть случаи, когда имеются две (см. рис. 13.35, б) и более точки пересечения кривой $J(\omega)$ и линии переключения $\text{Im } J(\omega) = -a$ (или оси абсцисс слева при $a = 0$). В таких случаях необходимо определить устойчивость возможных колебаний.

Исследование устойчивости колебаний. Необходимым (но не всегда достаточным) условием устойчивости колебаний является выполнение следующего неравенства для кривой $J(\omega)$ в точке пересечения с линией переключения:

$$\left[\frac{d \text{Im } J(\omega)}{d\omega} \right]_{\omega = \omega_1} = \frac{4S}{\pi} \left[\frac{dQ_p(\omega)}{d\omega} + \frac{dQ_p(3\omega)}{d\omega} + \frac{dQ_p(5\omega)}{d\omega} + \dots \right]_{\omega = \omega_1} > 0. \quad (13.117)$$

Условие (13.117) выполняется, если $J(\omega)$ пересекает линию переключения снизу вверх в направлении возрастания частоты. Следовательно, в рассматриваемом случае (см. рис. 13.35, б) оба колебательных режима с частотами ω_1 и ω_2 (или ω_{01} и ω_{02}) могут быть устойчивыми.

Условия устойчивости релейной системы. Известно, что автоколебания невозможны и релейная система устойчива, если характеристика $J(\omega)$ не пересекает линию переключения и линейная часть системы устойчива. Это возможно при:

а) неоднозначной характеристике двухпозиционного реле ($a \neq 0$), если линейная часть системы имеет только апериодическое звено;

б) идеальной характеристике двухпозиционного реле, если линейная часть имеет только интегрирующее звено или обладает частотной характеристикой, которая при $\omega \rightarrow \infty$ расположена в нижней полуплоскости; причем она подобна частотной характеристике элемента, описываемого уравнением не выше второго порядка, что возможно при второй степени линейной части, а также при любом порядке системы, если степень полинома знаменателя $K(p)$ превышает степень полинома числителя $K(p)$ не более чем на два.

Пример 13.7. Определим автоколебания релейной системы, линейная часть которой имеет передаточную функцию (13.87).

Используя выражение для $K(j\omega)$ и формулу (13.115), построим $J(\omega)$ без учета множителя $4S/\pi$ (см. рис. 13.30, а). Для двухпозиционного реле с гистерезисной характеристикой (ширина петли $a = \pm 1$ и выходной сигнал $S = \pm 1$) проведем параллельно оси абсцисс линию на расстоянии $\pi/4 = 0,785$. Эта линия совпадает с характеристикой $-N^{-1}(A)$, полученной при расчете по методу Гольдфарба.

Точка пересечения M_2 кривой $J(\omega)$ и указанной линии для $a = 1$ определяет параметры автоколебаний: частоту $\omega_1 = 0,56$ 1/сек и амплитуду $A_1^0 = 2$, которая рассчитывается по формуле (13.116). Кроме того, амплитуда A_1^0 может быть определена графически по характеристике $-N^{-1}(A)$ в точке M_2 .

Параметры автоколебаний, полученные по методу Цыпкина, отличаются от параметров, полученных по методу Гольдфарба ($\omega_1 = 0,57$ 1/сек и $A_1^0 = 1,82$). Результат расчета в данном случае является более точным.

В случае идеального реле ($a = 0$) расчет по методу Цыпкина совпадает с расчетом по методу Гольдфарба, так как кривые $K(j\omega)$ и $J(\omega)$ в точке пересечения M_1 с осью абсцисс совпадают (см. рис. 13.30, а).

§ 13.11. Исследование абсолютной устойчивости нелинейных систем методом В. М. Попова

Абсолютной устойчивостью называется устойчивость системы при любых начальных отклонениях для любой формы нелинейной характеристики, принадлежащей к некоторому определенному классу [Л. 4, 10]. Метод В. М. Попова является частотным методом определения абсолютной устойчивости нелинейной системы*.

Пусть известна частотная функция линейной части системы $K_d(j\omega)$ и задано значение параметра k , который является некоторым предельным параметром нелинейной характеристики $\varphi(\sigma)$, произвольно располагающейся в заданной области.

Необходимо определить, обеспечивается ли абсолютная устойчивость данной системы для любой характеристики $\varphi(\sigma)$, удовлетворяющей условиям:

$$0 \leq \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} \leq k \quad \text{при } \sigma \neq 0;$$

$$\varphi(0) = 0.$$

* Задача об исследовании абсолютной устойчивости возникает в связи с тем, что в некоторых случаях нелинейная характеристика звена является не стабильной и может быть охарактеризована только определенной областью.

В. М. Поповым предложен следующий частотный критерий определения абсолютной устойчивости нелинейных систем: для того чтобы нелинейная система была абсолютно устойчива, достаточно, чтобы при заданных $K_{\pi}(j\omega)$ и k существовало такое конечное действительное число q , при котором для всех $\omega \gg 0$ выполняется неравенство

$$\operatorname{Re}[(1 + jq\omega) K_{\pi}(j\omega)] + \frac{1}{k} > 0. \quad (13.118)$$

Первое слагаемое (13.118) можно преобразовать:

$$\operatorname{Re}[(1 + jq\omega) K_{\pi}(j\omega)] = \operatorname{Re}[K_{\pi}(j\omega) - q\omega \operatorname{Im} K_{\pi}(j\omega)] = X - qY,$$

где

$$X = \operatorname{Re}[K_{\pi}(j\omega)]; \quad Y = \omega \operatorname{Im}[K_{\pi}(j\omega)].$$

Следовательно, вместо (13.118) получим

$$X - qY + \frac{1}{k} > 0. \quad (13.119)$$

Уравнение $X - qY + 1/k = 0$ является уравнением прямой, проходящей через точку действительной оси с абсциссой $-1/k$ и имеющей угловой коэффициент $1/q$ (рис. 13.36, а).

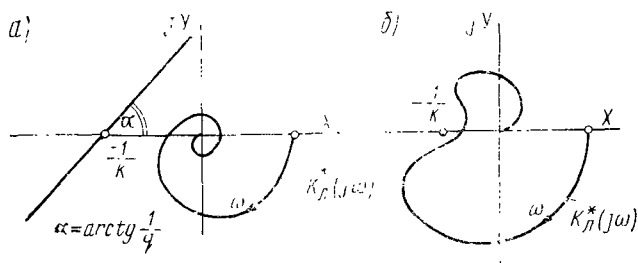


Рис. 13.36

Критерий В. М. Попова имеет удобную геометрическую формулировку: нелинейная система абсолютно устойчива, если в плоскости $K_{\pi}^*(j\omega) = X + jY$ можно провести прямую, проходящую через точку действительной оси с абсциссой $-1/k$ так, чтобы частотная характеристика $K_{\pi}^*(j\omega)$ лежала справа от этой прямой (см. рис. 13.36, а).

Видоизмененная характеристика $K_{\pi}^*(j\omega)$ связана с $K_{\pi}(j\omega)$ равенствами:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[K_{\pi}^*(j\omega)] &= \operatorname{Re}[K_{\pi}(j\omega)]; \\ \operatorname{Im}[K_{\pi}^*(j\omega)] &= \omega \operatorname{Im}[K_{\pi}(j\omega)]. \end{aligned}$$

В. М. Попов установил, что неравенство (13.118) является также достаточным условием абсолютной устойчивости и при $k \rightarrow \infty$.

Таким образом, для определения абсолютной устойчивости системы по методу В. М. Попова необходимо построить видоизмененную

частотную характеристику $K_{\Sigma}^*(j\omega)$, определить k из условия $0 \leq \frac{q(\sigma)}{\sigma} \leq k$ и через точку $-1/k$ на вещественной оси провести некоторую прямую так, чтобы характеристика $K_{\Sigma}^*(j\omega)$ лежала справа от этой прямой. Если такую прямую провести нельзя, то это значит, что абсолютная устойчивость для данной системы невозможна (рис. 13.36, б). Величина q , связанная с угловым коэффициентом, при этом определяется из условия (13.119) так, чтобы при известных параметрах системы неравенство соблюдалось для всех частот.

Критерий В. М. Попова использует частотную характеристику линейной части системы, поэтому на практике он может быть легко применен для решения задачи об абсолютной устойчивости системы по частотной характеристике [Л. 33].

Пример 13.8. Для некоторых нелинейных автоматических систем, содержащих нелинейный элемент типа «люфт», условием абсолютной устойчивости является неравенство [Л. 5]

$$\operatorname{Re} [K_{\Sigma}(j\omega)] > -1,$$

которое наиболее удобно использовать для расчета параметров регулятора, обеспечивающих абсолютную устойчивость нелинейной системы с люфтом.

Частотная функция приведенной линейной части системы с ПИ-регулятором

$$K_{\Sigma}(j\omega) = \frac{K(T_{\Pi} j\omega + 1)}{T_{\Pi} j\omega \prod_{i=1}^n (T_i j\omega + 1)},$$

где $K = k_0 \cdot k_p$ — общий коэффициент усиления; k_0 и k_p — коэффициенты усиления объекта и регулятора; T_{Π} — постоянная времени ПИ-регулятора; T_i — постоянные времени объекта.

В связи с указанным условие абсолютной устойчивости для объекта первого порядка ($n = 1$) будет иметь вид:

$$K(T_{\Pi} - T_1) > -T_{\Pi}(T_1^2 \omega^2 + 1),$$

откуда при $\omega = 0$ и знаке равенства получим критические значения для коэффициента усиления и постоянной времени регулятора:

$$k_{p, \text{кр}} = \frac{T_{\Pi}}{k_0(T_1 - T_{\Pi})}; \quad T_{\Pi, \text{кр}} = \frac{KT_1}{1 + K}.$$

При $T_{\Pi} > T_1$ нелинейная система устойчива при любом k_p .

Аналогично запишем условие абсолютной устойчивости для объекта второго порядка ($n = 2$):

$$T_1 + T_2 - T_{\Pi} < \frac{T_{\Pi}}{K} T_1^2 T_2^2 \omega^4 + \left[\frac{T_{\Pi}}{K} (T_1^2 + T_2^2) - T_1 T_2 T_{\Pi} \right] \omega^2 + \frac{T_{\Pi}}{K},$$

откуда при $\omega = 0$ получим приближенное условие абсолютной устойчивости

$$(T_1 + T_2 - T_{\Pi}) < T_{\Pi}/K,$$

из которого при знаке равенства найдем

$$k_p = \frac{T_{\Pi}}{k_0(T_1 + T_2 - T_{\Pi})}; \quad T_{\Pi} = \frac{K(T_1 + T_2)}{1 + K}.$$

Приведенные значения $k_{p,kr}$ и $T_{п,kr}$ для объекта второго порядка должны быть ограничены с учетом условия положительности коэффициента при ω^2 для общего случая ($\omega \neq 0$):

$$k_{p,kr} = \frac{T_1^2 + T_2^2}{T_1 T_2}; \quad T_{п,kr} = \frac{(T_1 + T_2)(T_1^2 + T_2^2)}{T_1^2 + T_2^2 + T_1 T_2}.$$

На основании полученных результатов параметры ПИ-регулятора для объекта второго порядка предлагается выбирать по формулам (из условия абсолютной устойчивости):

$$T_{п,kr} = \frac{(T_1 + T_2)(T_1^2 + T_2^2)}{T_1^2 + T_2^2 + T_1 T_2}; \quad k_{p,kr} = \frac{T_{п}}{k_0(T_1 + T_2 - T_{п})}.$$

В случае объекта n -го порядка (при $n > 2$) параметры ПИ-регулятора можно также рассчитывать из условия абсолютной устойчивости по формулам:

$$T_{п,kr} = \frac{E_1(T_i)E_1(T_i^2) + E_3(T_i)}{E_1(T_i^2) + E_2(T_i)}; \quad k_{p,kr} = \frac{T_{п}}{k_0[E_1(T_i) - T_{п}]},$$

где

$$E_1(T_i) = \sum_{i=1}^n T_i; \quad E_1(T_i^2) = \sum_{i=1}^n T_i^2; \quad E_2(T_i) = \sum_{i,j} T_i T_j; \\ E_3(T_i) = \sum_{i \neq j, k} T_i T_j T_k.$$

Используя формулы для k_p и $T_{п}$, можно построить область устойчивости на плоскости этих параметров при $0 < T_{п} \leq T_{п,kr}$. Если, например, задан объект второго порядка с параметрами $k_0 = 1$; $T_1 = T_2 = 2$ сек, то получим значения $T_{п} = 2,66$ сек и $k_p = 2$, при которых система абсолютно устойчива.

Формулы, приведенные для расчета параметров k_p и $T_{п}$ типовых ПИ-регуляторов, могут быть использованы при наладке промышленных систем автоматического регулирования, существенной нелинейностью которых является люфт, или упор с фрикционной муфтой.

§ 13.12. О вынужденных колебаниях в нелинейных системах

Большой интерес представляет исследование поведения нелинейных систем при периодических внешних воздействиях. Колебания, возникающие в нелинейных системах под действием внешних периодических воздействий, существенно отличаются от колебаний, возникающих при аналогичных условиях в линейных системах. Частота и амплитуда вынужденных колебаний нелинейных систем зависят как от внешнего периодического воздействия, так и от параметров системы и характеристики нелинейного звена.

Если в нелинейной системе имеются автоколебания, то при внешних периодических сигналах в системе возникают сложные нелинейные колебания, которые могут существенно отличаться от автоколебаний и внешних периодических сигналов.

Пусть на вход линейной части нелинейной системы поступает внешнее периодическое воздействие $x_{вх} = Z \sin \omega t$ (см. рис. 13.21). В этом случае по структурной схеме замкнутой системы (см. рис. 13.22)

запишем передаточную функцию, используя передаточную функцию для нелинейного элемента:

$$W_0(p) = \frac{X(p)}{X_{\text{вх}}(p)} = \frac{K(p)}{1 \pm K(p)N(A)},$$

или эквивалентное выражение (для обратной функции)

$$X_{\text{вх}}(p)/X(p) = 1/K(p) \pm N(A). \quad (13.120)$$

В результате воздействия $x_{\text{вх}}$ в системе возникают периодические колебания, которые на выходе линейной части (или на входе нелинейного элемента) представим в форме синусоидального сигнала той же частоты ω :

$$x = A \sin(\omega t - \gamma).$$

Тогда выражение (13.120) перепишем в виде

$$X_{\text{вх}}'(j\omega)/X(j\omega) = 1/K(j\omega) \pm N(A).$$

Применив символический метод записи для гармонических сигналов $x_{\text{вх}}$ и x , после преобразований получим

$$-K^{-1}(j\omega) = N(A) - \frac{Z}{A} e^{j\gamma}, \quad (13.121)$$

где A и γ — амплитуда и сдвиг по фазе сигнала на входе нелинейного элемента.

Если внешнее периодическое воздействие отсутствует (т. е. $Z = 0$), то вместо (13.121) запишем выражение, аналогичное (13.87), определяющее автоколебания по методу Л. С. Гольдфарба.

Параметры вынужденных колебаний ($A_{\text{вын}}$, $\gamma_{\text{вын}}$ и $\omega_{\text{вын}}$) на основании (13.121) получим графическим способом (рис. 13.37). Для этого построим отрицательную обратную АФХ линейной части системы $-K^{-1}(j\omega)$ и характеристику нелинейного элемента $N(A)$. Точка пересечения этих характеристик по методу Гольдфарба характеризует параметры автоколебаний. Чтобы определить Z и фазу вынужденных колебаний, зададимся значением амплитуды* $A_{\text{вын}}$ и найдем соответствующую точку на кривой $N(A)$. Из точки $A_{\text{вын}}$ как из центра, проведем окружность радиусом R , определяемым точкой на АФХ для $\omega_{\text{вын}}$. Радиус этой окружности определяет

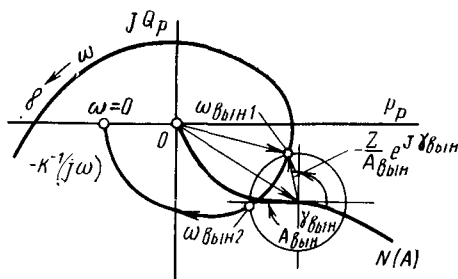


Рис. 13.37

* Величина амплитуды должна быть допустимой по техническим условиям работы системы.

$Z = \dot{R}/A_{\text{вып}}$, а угол, отсчитываемый от отрицательной полуоси окружности против часовой стрелки до радиуса вектора $-\frac{Z}{A_{\text{вып}}} e^{i\gamma_{\text{вып}}}$, определяет значение $\gamma_{\text{вып}}$. Действительно, в этом случае замыкается векторный треугольник [см. (13.121)], показанный на рис. 13.37.

Если при некотором Z_0 окружность не имеет точек пересечения с отрицательной обратной АФХ, то периодические колебания с амплитудой $A_{\text{вып}}$ невозможны при данных значениях Z_0 и $\omega_{\text{вып}}$.

Если таких точек пересечения несколько (в данном случае две), то существует несколько частот ($\omega_{\text{вып}1}$ и $\omega_{\text{вып}2}$), при которых колебания имеют данную амплитуду $A_{\text{вып}}$. Эти колебания следует проверить на устойчивость. Анализируя график кривых и окружности, можно найти пороговое значение $Z_{\text{пор}}$, которое определяет границу появления вынужденных колебаний.

Меняя значения A , Z и ω , можно получить все периодические движения, возможные в системе.

§ 13.13. Статические характеристики нелинейных систем

Расчет статических характеристик нелинейных систем можно выполнить графически.

При параллельном согласном включении нелинейных звеньев $F_1(X_{\text{вх}})$ и $F_2(X_{\text{вх}})$ результирующая статическая характеристика участка структурной схемы будет определяться выражением

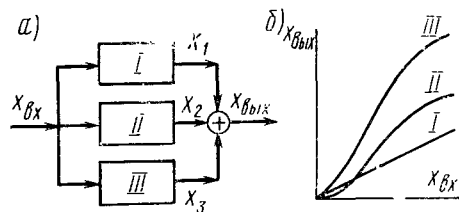


Рис. 13.38

$$X_3 = \varphi(X_1, X_2) = \varphi[F_1(X_{\text{вх}}), F_2(X_{\text{вх}})].$$

Если узловой элемент является сумматором (рис. 13.38, а), то при трех элементах (I, II, III)

$$X_{\text{вых}} = X_1 + X_2 + X_3 = F_1(X_{\text{вх}}) + F_2(X_{\text{вх}}) + F_3(X_{\text{вх}}) = F(X_{\text{вх}}).$$



Рис. 13.39

При этом в результате графического суммирования будет получена статическая характеристика участка нелинейной системы (рис. 13.38, б).

Последовательное соединение нелинейных звеньев с характеристиками $F_1(X_{\text{вх}})$, $F_2(X_1)$ и $F_3(X_2)$ можно рассматривать как одно эквивалентное звено с характеристикой (рис. 13.39)

$$X_{\text{вых}} = F_3\{F_2[F_1(X_{\text{вх}})]\}.$$

При последовательном соединении элементов целесообразно построить их характеристики в отдельных квадрантах (установив между ними взаимосвязь) с учетом нелинейностей характеристик и жестких

обратных связей [Л.3,18]. На рис. 13.40 показано построение характеристики регулятора, представленного четырьмя элементами. В каждом квадранте изображена статическая характеристика элемента (*I*, *II*, *III*, *IV*). Взаимосвязь между выходной переменной данного элемента, являющейся входной для последующего элемента, определяется вспомогательными лучами O_2P_2 , O_3P_3 и O_4P_4 . В пятом квадранте нанесена результирующая характеристика элементов *V*. Лучи O_1P_1 и O_5P_5 — вспомогательные; они характеризуют связь между выходом системы и входной переменной первого элемента, являющейся входной для результирующей характеристики. Углы наклона всех вспомогательных лучей определяются по номинальным величинам выхода элементов. Порядок установления взаимосвязи между квадрантами обозначен буквами (*a*, *b*, *c*, *d*, *e*, ..., *o*) и указан стрелками на штриховых линиях.

Построение статической характеристики начинается с первого квадранта для заданной входной переменной (например, точка *I*) и проводится по вспомогательным лучам и характеристикам элементов. В результате построения, указанного стрелками и обозначенного арабскими цифрами (*1–12*), получена результирующая характеристика.

Если некоторые элементы охвачены жесткими обратными связями, то их влияние следует учесть при построении статических характеристик. На рис. 13.41 построена результирующая характеристика элемента, охваченного обратной связью, когда на его вход подается выходная переменная данного элемента. На рис. 13.41, *a* характеристика элемента представлена кривой *I*, а характеристика положительной жесткой обратной связи — линией *II*. Если при отсутствии обратной

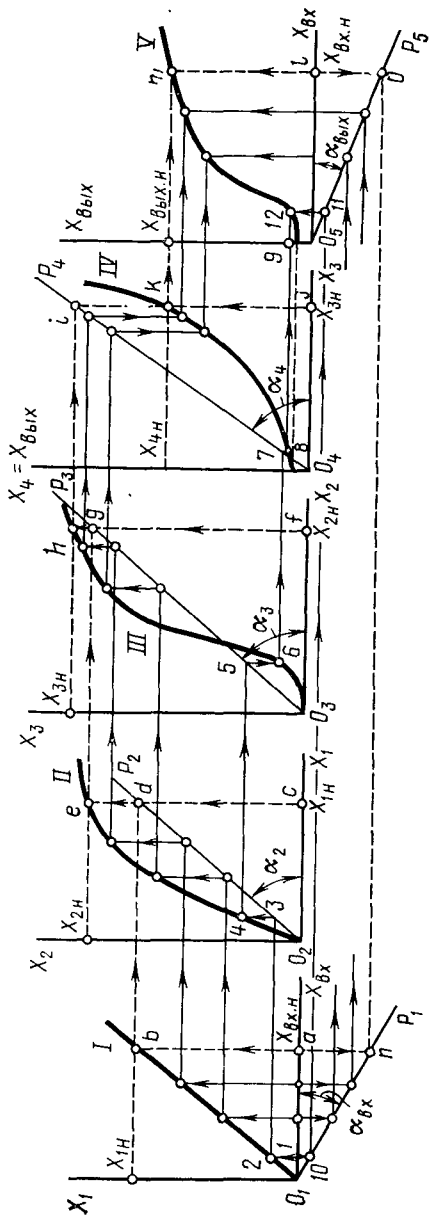


Рис. 13.40

связи выходная переменная (точка 2') определяется на кривой *I* ординатой, соответствующей данному значению входной переменной (точка 1), то при наличии обратной связи учитывается линия *II*. В результате на кривой *I* будет получена точка 2. Соедя ее по горизонтали до вертикальной линии, проходящей через точку 1, получим точку 3 результирующей характеристики *III* с учетом обратной связи. Аналогичное построение производится при отрицательной обратной связи (рис. 13.41, б). Как следует из сравнения характеристик, положительная обратная связь увеличивает, а отрицательная — уменьшает коэффициент усиления элемента.

Если обратная связь охватывает несколько элементов, луч обратной связи надо нанести в квадранте элемента, для которого действи-

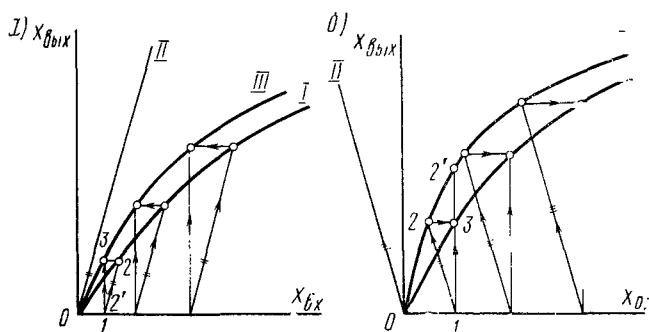


Рис. 13.41

обратной связи складывается с входным воздействием. Этот луч устанавливает взаимосвязь с квадрантом элемента, с выхода которого подается обратное воздействие на вход данного элемента. На рис. 13.42 в первом квадранте нанесена статическая характеристика элемента *I* и луч отрицательной обратной связи *III*, во втором квадранте — характеристика элемента *II*. Луч O_2P_2 устанавливает взаимосвязь между выходом первого и входом второго элемента. Статическая характеристика последовательно соединенных элементов, охваченных обратной связью, строится в первом квадранте. Для этого на оси абсцисс наносится точка *a* результирующего воздействия первого элемента. Затем по точке *b* определяется номинальное значение $X_{2н}$ выходной переменной первого элемента. Это позволяет по точкам *c* и *e* установить наклон вспомогательного луча O_2P_2 . Далее, проводя прямые линии по точкам *e* и *b*, можно найти положение точки *g*. Если заданы параметры обратной связи и ее тип (положительная или отрицательная), то, отложив от точки *a* соответствующий отрезок на оси абсцисс, можно получить величину задающего входного воздействия первого элемента. Для отрицательной обратной связи (см. рис. 13.42) от точки *a* на оси абсцисс откладываем влево отрезок $ah = X_{0,с.с.}$, величина которого определяется значением коэффициента обратной связи. Луч, проходящий через точки *h* и *g* (луч *III*), устанавливает воздействие от отрицательной обратной связи на вход элемента *I* по выходной пере-

ной элемента II . Порядок нанесения исходных точек и луча III обозначен латинскими буквами и указан стрелками. При построении результирующей статической характеристики исходной точкой является точка I на оси ординат второго квадранта, по которой через характеристику II (точка 2), луч O_2P_2 (точка 3) и характеристику I (точка 4) определяется величина входного воздействия X_1 (точка 5). Далее по точке I и лучу III обратной связи (точка 6) находится величина воздействия обратной связи $7-h$. Отрезок $7-h$ откладывается от точки 5 вправо (точка 8). Проводя вертикаль через эту точку и горизонталь через точку I до взаимного пересечения, получим точку 9 статической

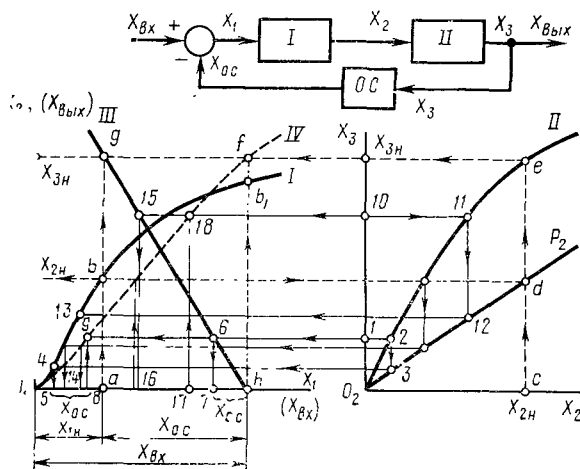


Рис. 13.42

характеристики с учетом обратной связи (кривая IV на рис. 13.42). Порядок построения обозначен цифрами и указан стрелками. Принцип построения аналогичен изложенному, если количество элементов больше двух и обратные связи перекрещиваются.

На рис. 13.43 показан принцип построения статической характеристики трех последовательно соединенных элементов (I , II и III) с двумя перекрещивающимися жесткими обратными связями. В первых трех квадрантах нанесены соответственно характеристики элементов I , II и III . В четвертом квадранте построена результирующая статическая характеристика VI , получаемая графическим построением.

При известных коэффициентах и характере действия обратных связей OC_1 и OC_2 порядок нанесения вспомогательных лучей O_2P_2 и O_3P_3 , а также лучей обратных связей IV и V является обратным к прохождению основного сигнала и обозначен буквами латинского алфавита и стрелками.

На рис. 13.43 показан один цикл построения результирующей характеристики. задается произвольно точка I на оси ординат для какого-либо значения выходной переменной (квадрант III); построением, обозначенным арабскими цифрами и стрелками, определяется величина

на $X_{вх}$ (точка 14), которая через вспомогательные лучи O_1P_1 и O_4P_4 переносится в последний квадрант (точка 17), а точка 1 — на ось ординат последнего квадранта (точка 18). По точкам 17 и 18 находят точку 19 искомой характеристики VI. Аналогичными построениями находят остальные точки статической характеристики VI.

Вопросы для самопроверки

1. Приведите определение и классификацию нелинейных систем.
2. Как зависит устойчивость нелинейных систем от диапазона начальных отклонений переменных?
3. Поясните различие понятий устойчивости «в малом», «в большом» и «в целом».
4. Дайте определение понятия автоколебаний.
5. Каковы основные методы исследования и расчета нелинейных систем, применяемых в инженерной практике?
6. Поясните принцип исследования устойчивости нелинейных систем второго порядка на фазовой плоскости.
7. Как построить фазовые траектории по методу изоклин?
8. В каких случаях на фазовой плоскости наносят линии переключения?
9. Каким образом определяются автоколебания нелинейных систем по методу точечных преобразований?
10. Что означает гармоническая линеаризация нелинейных характеристик?
11. Запишите выражения коэффициентов гармонической линеаризации для типовых нелинейностей (насыщения, зоны нечувствительности, реле, люфта).
12. Объясните метод Л. С. Гольдфарба и особенность определения автоколебаний этим методом.
13. Объясните принцип исследования устойчивости нелинейных систем по методу гармонической линеаризации Е. П. Попова.
14. Для исследования каких нелинейных систем может быть использован частотный метод Я. З. Цыпкина и в чем сущность этого метода?
15. Объясните определение абсолютной устойчивости нелинейных систем по методу В. М. Попова.
16. Какое различие имеют вынужденные колебания нелинейных и линейных систем и как определить их параметры?
17. Как построить статические характеристики участков системы при параллельном и последовательном соединении нелинейных элементов? Поясните на примере.
18. Как построить статические характеристики нелинейной системы?

Глава 14

КОРРЕКЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

При коррекции нелинейных автоматических систем обычно требуется решить одну из двух основных задач:

- обеспечить устойчивость системы;
- получить автоколебания с заданной частотой и амплитудой.

§ 14.1. О способах коррекции нелинейных систем

Коррекция нелинейных систем может быть осуществлена с помощью линейных либо нелинейных корректирующих устройств, а также в результате компенсации нелинейностей.

В качестве линейных корректирующих устройств могут быть использованы неединичные главные обратные связи (рис. 14.1, а), а также дополнительные обратные связи, охватывающие нелинейный элемент (рис. 14.1, б).

В качестве нелинейных корректирующих устройств могут быть применены нелинейные обратные связи и нелинейные последовательные устройства. Чтобы рассчитать корректирующие устройства и исследовать их влияние на динамику нелинейных систем, структурную схему нелинейной системы необходимо привести к эквивалентной одноконтурной схеме с нелинейным элементом и линейной частью

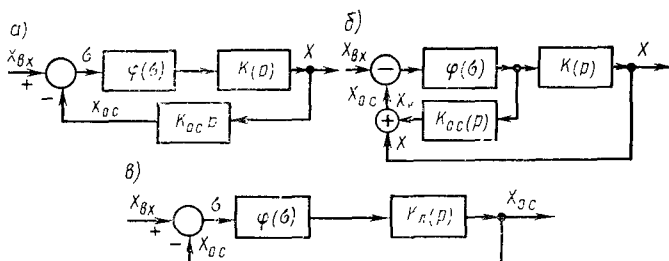


Рис. 14.1

(рис. 14.1, в). Для схемы, приведенной на рис. 14.1, а, получим в этом случае схему с нелинейным элементом $\varphi(\sigma)$ и линейной частью с передаточной функцией [при $K_{oc}(p) = 1 + T_{oc}p$]:

$$K_{\Sigma}(p) = K(p)(1 + T_{oc}p). \quad (14.1)$$

Для схемы, изображенной на рис. 14, 1, б, получим также схему с нелинейным элементом $\varphi(\sigma)$ и линейной частью с передаточной функцией

$$K_{\Sigma}(p) = K(p) + K_{oc}(p). \quad (14.2)$$

При расчете линейных корректирующих устройств используются методы теории линейных систем и анализа динамики нелинейных систем. При расчете нелинейных корректирующих устройств можно применить методы теории оптимальных систем.

§ 14.2. Влияние линейных корректирующих устройств на фазовый портрет систем второго порядка

Рассмотрим влияние неединичной главной обратной связи в виде звена $(T_{oc}p + 1)$ на работу системы второго порядка, если для схемы, приведенной на рис. 14.1, а, задано

$$K(p) = k_0/[p(1 + T_0p)]. \quad (14.3)$$

* В данном случае в главную обратную связь введена производная от выходной переменной. На рис. 14.1, а вместо $K_{oc}p$ следует читать K_{oc} .

На основании (14.1) и (14.3) получим передаточную функцию линейной части системы

$$K_{\text{л}}(p) = k_0 (1 + T_{0.c} p) / [p (1 + T_0 p)]. \quad (14.4)$$

Используя структурную схему (см. рис. 14.1, в) и формулу (14.4), запишем уравнения, определяющие динамику нелинейной системы относительно свободного движения ($x_{\text{вх}} = 0$):

$$\left. \begin{aligned} (T_0 p^2 + p) X_{0.c} &= k_0 (1 + T_{0.c} p) \varphi(\sigma); \\ \sigma &= -X_{0.c}; \quad X_{0.c} = (1 + T_{0.c} p) X. \end{aligned} \right\} \quad (14.5)$$

После преобразований (14.5) получим

$$T_0 \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = k_0 \varphi(\sigma). \quad (14.6)$$

Уравнение (14.6) должно быть дополнено уравнением

$$\sigma = -\left(x + T_{0.c} \frac{dx}{dt}\right). \quad (14.7)$$

На основании (14.6) и (14.7) получим дифференциальное уравнение

$$T_0 \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = -k_0 \varphi\left(x + T_{0.c} \frac{dx}{dt}\right). \quad (14.8)$$

Если нелинейным элементом является усилитель, имеющий характеристику с линейным участком (коэффициент усиления k_y) и зоной насыщения, то для линейного участка характеристики при $|\sigma| \leq a = S/k_y$ справедливо уравнение

$$T_0 \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} (1 + k_0 k_y T_{0.c}) + k_0 k_y x = 0. \quad (14.9)$$

Поскольку для участков насыщения $\varphi(x + T_{0.c} dx/dt) = \pm S$, то вместо (14.8) аналогично (13.24) и (13.25) получим следующие уравнения:

при $\sigma \geq a$

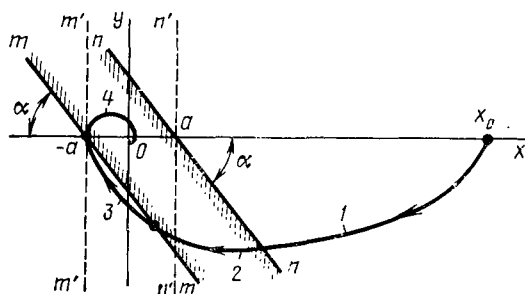
$$T_0 \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = -k_0 S; \quad (14.10a)$$

при $\sigma \leq -a$

$$T_0 \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = k_0 S. \quad (14.10б)$$

Таким образом, при неединичной обратной связи (см. рис. 14.1, а) фазовый портрет в зонах насыщения, определяемый уравнениями (14.10a) и (14.10б), будет прежним, как и при единичной обратной связи. В области линейной части характеристики фазовый портрет характеризуется уравнением (14.9), в котором имеется дополнительный член с первой производной.

Так как линейная зона на фазовой плоскости определяется неравенством $|\sigma| \leq a$ и зависимостью (14.7), то граничные линии $n-n$ и $m-m$ являются наклонными прямыми, проходящими через точки на оси абсцисс $|x| = \pm a$ (рис. 14.2). При единичной главной обратной связи линии $n'-n'$ и $m'-m'$ проходят вертикально. Уравнения граничных линий запишем в виде:



$$\left. \begin{aligned} x - T_{o.c} y &= a, \text{ или} \\ x &= a - T_{o.c} y; \\ x + T_{o.c} y &= -a, \\ \text{или} \\ x &= -(a + T_{o.c} y). \end{aligned} \right\} \quad (14.11)$$

На основании (14.11) получим аналитическую зависимость угла наклона линий $n-n$ и $m-m$ от величины постоянной времени обратной связи:

$$\alpha = \arctg(1/T_{o.c}). \quad (14.12)$$

Уравнение (14.10а) характеризует фазовые траектории на участке 1 при заданном x_0 (см. рис. 14.2), уравнение (14.10б) — фазовые траектории на участке 3, а уравнение (14.9) — фазовые траектории на участках 2 и 4.

Если же нелинейный элемент обладает релейной характеристикой, то фазовые траектории в зоне насыщения определяются такими же

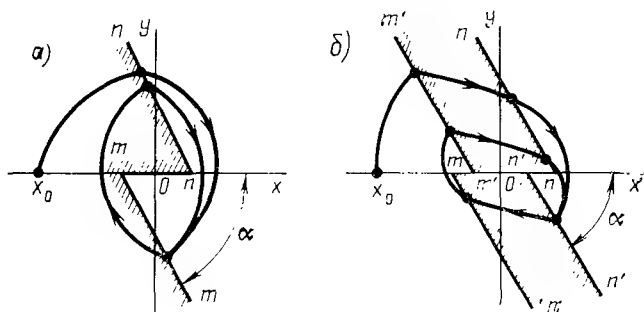


Рис. 14.3

уравнениями, как и в случае единичной обратной связи. Однако наличие члена $T_{o.c}p$ в передаточной функции звена обратной связи обуславливает поворот линий переключения реле влево соответственно уравнениям (14.11) на угол α , определяемый по формуле (14.12). На рис. 14.3, а и б показаны фазовые портреты и линии переключения для нелинейных систем второго порядка при наличии двухпозиционного и трехпозиционного реле с неоднозначными характеристиками.

Таким образом, наличие производной в главной обратной связи влияет на наклон граничных линий, разделяющих области фазовой плоскости. Угол наклона этих линий тем меньше, чем больше $T_{0.c}$, а в случае единичной обратной связи ($T_{0.c} = 0$) угол $\alpha = 90^\circ$.

В областях фазовой плоскости, соответствующих линейным участкам характеристики нелинейного элемента, уравнения фазовых траекторий зависят от постоянной времени обратной связи $T_{0.c}$.

В том случае, когда система имеет неединичную главную обратную связь вида* $K_{0.c}(p) = 1 + k_{0.c}$, вместо (14.7) запишем:

$$\sigma = -(x + k_{0.c} x).$$

Для неидеального реле ($a \neq 0$), например, линии переключения при такой главной обратной связи будут определяться уравнениями:

$$\begin{aligned} x + k_{0.c} x &= a, & \text{или} & & x &= a(1 + k_{0.c})^{-1}; \\ x + k_{0.c} x &= -a, & \text{или} & & x &= -a(1 + k_{0.c})^{-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, жесткая неединичная главная обратная связь вызывает перемещение линии переключения (или граничных линий) без изменения угла их наклона.

§ 14.3. Получение скользящих режимов в релейных системах второго порядка

Скользящим режимом называется режим работы релейной системы, характеризующийся колебательным движением изображающей точки вдоль линии переключения. Из (14.12) видно, что чем сильнее воздействие производной в обратной связи, тем больше поворачиваются линии переключения реле против часовой стрелки. При этом интенсивность затухания колебаний возрастает. В том случае, когда в точке переключения угол наклона линии переключения становится равным наклону или меньше наклона касательной к фазовой траектории, по которой движется изображающая точка после переключения реле (например, точка M_2 на рис. 14.4, а), возникают условия существования скользящего режима [Л.15, 42].

Рассмотрим возникновение скользящего режима, когда задано $x_0 \neq 0$ и $y_0 = 0$, а внешние воздействия отсутствуют.

Пусть начальное состояние релейной системы второго порядка задано точкой M_0 (рис. 14.4, а), от которой изображающая точка будет перемещаться на участке 1 по фазовой траектории типа I до встречи с линией переключения АВ в точке M_1 . В этой точке в результате интенсивного действия корректирующей обратной связи происходит переключение реле, хотя координата x имеет прежний знак (здесь принято идеальное двухпозиционное реле, поэтому имеется только одна линия переключения АВ). При определенном наклоне линии переключения может оказаться, что она близко совпадает с участком 2 фазовой траектории типа II до точки M_2 , поэтому изображающая точка будет

* В данном случае в главную обратную связь введен безынерционный усилитель.

перемещаться до точки M_2 по фазовой траектории типа II. Этот участок $M_1 - M_2$ соответствует работе при переключенном реле. Однако в результате изменения результирующего сигнала на входе реле в точке M_2 произойдет переключение реле в другую сторону, после чего изображающая точка будет перемещаться по траектории типа I. Но как только увеличится результирующий сигнал обратной связи, произойдет переключение реле и изображающая точка будет перемещаться по траектории типа II.

Таким образом, изображающая точка, достигнув точки M_2 , непрерывно переходит с траекторий типа I на траектории типа II и обратно, как бы скользая вдоль линии переключения и асимптотически приближаясь к точке равновесия 0.

Как видно из рис. 14,4, а, скользящий режим возможен на тех участках, где фазовая траектория типа II проходит ниже линии переключения AB (после точки M_2). Аналогичные участки будут иметь место при $x_0 > 0$ в четвертом квадранте.

Если начальное положение изображающей точки соответствовало при $x_0 < 0$ точке M'_0 , то после прихода по траектории типа I в точку M_2 на линии переключения сразу начнется скользящий режим.

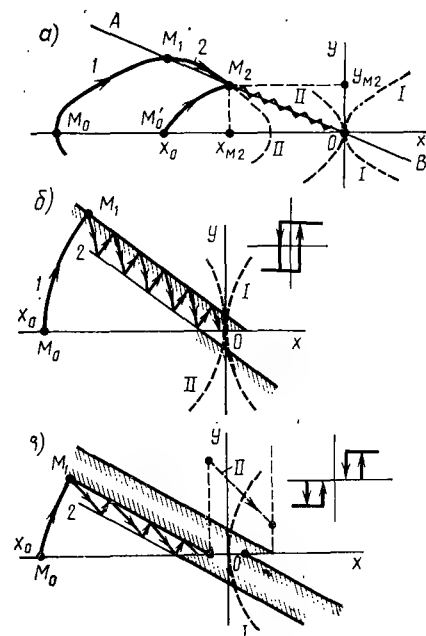


Рис. 14.4

В рассматриваемом примере предполагалось, что переключение реле происходит мгновенно; в результате переключения следуют друг за другом, частота переключений бесконечно велика, а амплитуда колебаний бесконечно мала. Такой скользящий режим называется *предельным*, поскольку он появляется в случае идеального реле (без учеты зоны нечувствительности, неоднозначности и запаздывания).

Если учесть неоднозначность характеристики или зону нечувствительности (или запаздывание при срабатывании реле), то окажется, что переключения реле при скользящем режиме происходят с конечной частотой, а амплитуда колебаний x отличается от нуля. На рис. 14,4, б приведена фазовая траектория скользящего режима работы релейной системы с двухпозиционным реле при неоднозначной характеристике, а на рис. 14,4, в — с трехпозиционным реле при неоднозначной характеристике. При двухпозиционном реле движение изображающей точки происходит по траекториям типов I и II между линией включения и продолжением линии отключения (нижняя линия во II квадранте). При трехпозиционном реле изображающая точка перемещается по фазовым траекториям типов I и II между линией отключения и продолжением

линии включения (аналогично можно указать в четвертом квадранте). В случае трехпозиционного реле система обрабатывает имеющееся рас- согласование включением и отключением только одного из контактов реле, что возможно, если наклон фазовых траекторий типа II в зоне нечувствительности такой, что линия отключения лежит выше участков траекторий, соответствующих отключенному реле (см. рис. 14.4, в).

Если $K(p)$ определяется выражением (14.3), а релейная система представлена структурной схемой, приведенной на рис. 14.1, а, то скользящий режим наступает, когда при трехпозиционном реле выполняется условие

$$T_{0.c} \geq T_0;$$

в случае двухпозиционного реле должно выполняться условие

$$T_{0.c} \geq \frac{T_0}{1 + k_0 S}.$$

В случае идеального двухпозиционного реле при предельном скользящем режиме (см. рис. 14.4, а) результирующий сигнал на входе релейного элемента σ приблизительно равен нулю, поэтому [см. (14.7)]

$$T_{0.c} dx/dt + x \approx 0. \quad (14.13)$$

Это эквивалентно тому, что коэффициент усиления релейного элемента равен бесконечности.

Интегрирование уравнения (14.13) дает экспоненциальный закон, характеризующий убывание выходной переменной и ее производной при скользящем режиме:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_{M_2} e^{-t/T_{0.c}}; \\ y &= y_{M_2} e^{-t/T_{0.c}}. \end{aligned} \right\} \quad (14.14)$$

Это означает, что на участке предельного скользящего режима координаты изменяются по линейным законам и нелинейную систему можно приблизительно считать линейной системой первого порядка.

В случае неидеального скользящего режима выражения (14.14) будут определять средние значения координат за период переключения реле или характеризовать закон изменения огибающих при колебании x и y в период скользящего режима.

На начальном участке движения системы при $x(0) = x_0$ от точки M'_0 до M_2 (см. рис. 14.4, а) переходный процесс будет определяться изображением по Ланласу для выходной переменной с учетом (14.3):

$$X(p) = k_0 S / [p^2 (1 + T_0 p)]. \quad (14.15)$$

Это соответствует скачкообразному воздействию сигнала S с выхода реле на линейную часть системы $K(p)$ без учета обратной связи, поскольку до точки M_2 (когда наступает скользящий режим) сигнал S остается неизменным и x определяется только выражением $K(p)$ и значением S .

Выполняя обратное преобразование Лапласа для (14.15), получим уравнения, характеризующие переходный процесс на начальном участке до скользящего режима:

$$\left. \begin{aligned} x &= k_0 S [t + T_0(e^{-t/T_0} - 1)] - x_0; \\ y &= k_0 S (1 - e^{-t/T_0}). \end{aligned} \right\} \quad (14.16)$$

Выражения (14.16) справедливы до момента, когда $x = x_{M_2}$ и $y = y_{M_2}$, а далее используются выражения (14.14). Уравнения (14.16) определяют переходный процесс на начальном участке $M_0 - M_1$ при любом релейном элементе системы, удовлетворяющей условиям скользящего режима.

Таким образом, при скользящем режиме легко рассчитать переходный процесс, если заданы начальные значения x_0 и y_0 .

В релейной системе второго порядка при идеальном двухпозиционном реле в период предельного скользящего режима, используя усло-

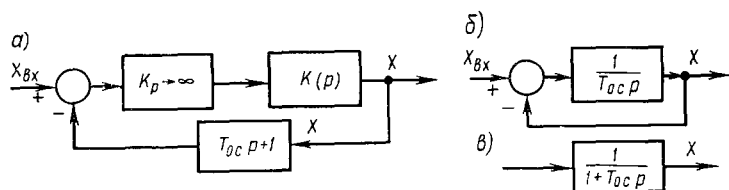


Рис. 14.5

вие (14.13), релейный элемент можно заменить эквивалентным линейным звеном с коэффициентом усиления, стремящимся к бесконечности ($K_p \rightarrow \infty$). Следовательно, для предельного скользящего режима релейную систему (рис. 14.5, а) можно представить эквивалентной структурной схемой в виде интегрирующего звена, охваченного обратной связью (рис. 14.5, б), или просто в виде апериодического звена (рис. 14.5, в). Передаточная функция разомкнутой системы, соответствующая структурной схеме, приведенной на рис. 14.5, б,

$$K_{\text{отв}}(p) = \frac{K(p) K_p}{1 + K(p) K_p T_{0,c} p} \approx \frac{1}{T_{0,c} p}, \quad (14.17)$$

так как $1/K_p \approx 0$ при $K_p \rightarrow \infty$.

Для замкнутой системы в случае предельного скользящего режима

$$W(p) = K_{\text{отв}}(p) / [1 + K_{\text{отв}}(p)] \approx 1 / (1 + T_{0,c} p). \quad (14.18)$$

Этот результат подтверждают выражения (14.14), определяющие экспоненциальный переходный процесс для свободного движения. Предельный скользящий режим характеризуется равенством нулю входного сигнала реле ($\sigma = 0$) и переключениями реле при изменении знака производной этого сигнала. При этом

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma) &= S \quad \text{для } d\sigma/dt < 0 \quad \text{и} \\ \varphi(\sigma) &= -S \quad \text{для } d\sigma/dt > 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим частный случай, когда при определенном значении $T_{0.c}$ и некотором начальном значении x_{01} (точка M_0) в релейной системе, имеющей идеальное двухпозиционное реле, фазовая траектория, пройдя участок 1, после переключения реле проходит на участке 2 через начало координат (рис. 14.6, а). При этом переходный процесс будет иметь минимальное время, а режим работы системы будет оптимальным по быстродействию*. После переключения реле в точке M_1 изображающая точка по фазовой траектории типа II приходит в начало координат, характеризующее состояние покоя. При заданном $T_{0.c}$ скользкий режим отсутствует только для одной определенной группы начальных значений, когда изображающая точка в начальный

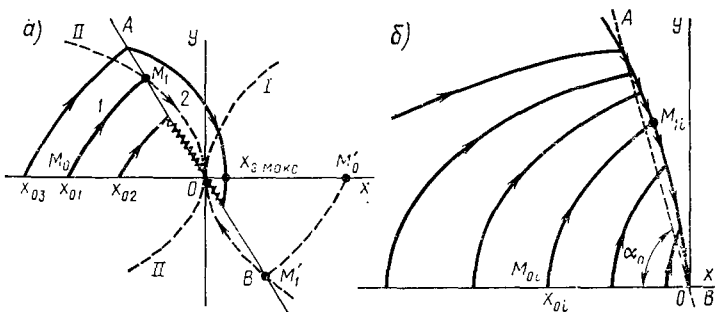


Рис. 14.6

момент оказывается на траектории $M_0M_1OM'_1M'_0$. Во всех других случаях скользкий режим имеет место либо сразу после переключения реле (начальное значение x_{02}), либо после второго переключения реле (начальное значение x_{03}), когда изображающая точка скользит по линии переключения AB в четвертом квадранте. В последнем случае переходный процесс имеет перерегулирование, определяемое значением $x_{\text{макс}}$. Траектория $M_0M_1OM'_1M'_0$ разделяет области начальных значений x_0 и y_0 , когда существуют только скользкий и комбинированный режимы.

Для того чтобы процесс при любых начальных условиях был оптимальным в указанном выше смысле, линией переключения должна быть сама фазовая траектория $M_1OM'_1$, проходящая через начало координат. Такая кривая линия переключения свидетельствует о нелинейном (переменном) характере воздействия корректирующей обратной связи. Функция нелинейной обратной связи зависит от конструкции реле, его запаздывания, скорости изменения выходной координаты и др. В связи с этим для получения оптимального режима релейной системы при любых начальных значениях x_{0i} (рис. 14.6, б) система должна снабжаться специальным вычислительным устройством, формирующим функцию нелинейной обратной связи. Если линия переключения, построенная в зависимости от функции нелиней-

* Более подробно оптимальные системы рассмотрены в гл. 20.

ной обратной связи, несущественно отличается от некоторой прямой переключения AB , то с целью упрощения конструкции регулятора выбирают линейную обратную связь с $T_{o.c} = \operatorname{ctg} \alpha_0$.

§ 14.4. О влиянии неединичных главных обратных связей на диаграмму точечных преобразований

Известно, что неединичные главные обратные связи влияют на положение и наклон граничных линий и линий переключения. Так как диаграмма точечных преобразований (см. § 13.6) строится по данным фазового портрета, то при наличии производной в главной обратной связи в (13.52) следует принять начальные и конечные значения x и y с учетом (14.11):

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= a - T_{o.c} y_0; & y_0 &= u; \\ x_1 &= -a - T_{o.c} y_1; & y_1 &= -v. \end{aligned} \right\} \quad (14.19)$$

Это позволит вместо (13.53) получить

$$\frac{2a}{T_0 k_s} \cdot (1 - \xi) \left(\frac{v}{k_s} + \frac{u}{k_s} \right) = \ln \frac{1 + u/k_s}{1 - v/k_s}, \quad (14.20)$$

где $\xi = T_{o.c}/T_0$ — коэффициент влияния обратной связи.

Следовательно, диаграмма точечных преобразований может быть построена [вместо (13.55)] по выражению

$$(1 - z_i) \exp [(1 - \xi) z_i + a_{\text{кв}}] = (1 + z_{0i}) \exp [-(1 - \xi) z_{0i}], \quad (14.21)$$

где приняты те же обозначения, что и в (13.55).

На основании (14.21) при упрощенном решении задачи могут быть получены вспомогательные кривые аналогично (13.56) и (13.57):

$$\left. \begin{aligned} F_{1\kappa}(z_i) &= (1 - z_i) \exp [(1 - \xi) z_i + a_{\text{кв}}]; \\ F_{0\kappa}(z_{0i}) &= (1 + z_{0i}) \exp [-(1 - \xi) z_{0i}]. \end{aligned} \right\} \quad (14.22)$$

В случае использования жесткой неединичной главной обратной связи начальные и конечные значения x и y можно представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= a/(1 + k_{o.c}); & y_0 &= u; \\ x_1 &= -a/(1 + k_{o.c}); & y_1 &= -v. \end{aligned} \right\} \quad (14.23)$$

Следовательно, жесткая неединичная главная обратная связь приводит только к изменению $a_{\text{кв}}$ в (13.55):

$$a_{\text{кв}} = 2a/[T_0 k_s (1 + k_{o.c})]. \quad (14.24)$$

Обеспечивая или исключая условия, при которых на диаграмме точечных преобразований имеется точка, характеризующая предельный цикл, можно получать устойчивые колебания или исключать их.

§ 14.5. Расчет линейных корректирующих устройств методом гармонической линеаризации

Для расчета корректирующих устройств нелинейной системы можно изменить метод гармонической линеаризации. По методу Л. С. Гольд-рба установлено, что автоколебания в нелинейной системе отсутствуют, если нет пересечения частотных характеристик линейной части системы и нелинейного элемента (см. рис. 13.29). Оставляя неизменной характеристику нелинейного элемента, можно произвести коррекцию линейной части системы, применяя метод А. В. Фатеева и задаваясь желаемой АФХ линейной части системы так, чтобы она не пересеклась с характеристикой нелинейного элемента. Используя АФХ скорректированной системы и желаемую АФХ линейной части системы, можно определить тип и параметры корректирующего устройства (л. § 11.4). Если задача решается с помощью логарифмических характеристик, то для исключения или введения автоколебаний могут быть применены известные в линейной теории методы выбора типа параметров корректирующего устройства (см. § 11.3). При этом определяется ЛАХ системы до коррекции и задается желаемая ЛАХ так, чтобы в системе отсутствовали автоколебания при наличии корректирующего устройства.

Другим важным способом устранения автоколебаний или их установления с определенными частотой и амплитудой при методе Гольд-рба является введение в систему внешних периодических воздействий, которые могут подавить автоколебания и создать вынужденные колебания с заданными частотой и амплитудой.

При использовании метода Е. П. Попова корректирующие устройства определяются по гармонически линеаризованному уравнению (13.88) или (13.88а), содержащему параметры корректирующего устройства. Структурная схема в этом случае должна быть преобразована к виду схемы, представленной на рис. 13.22. Так как характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы содержит параметры корректирующего устройства, то можно построить графики висимостей амплитуды и частоты автоколебаний от исследуемого параметра корректирующего устройства (аналогично рис. 13.33, б и в).

Кроме того, можно получить график зависимости какого-либо параметра системы от параметра корректирующего устройства.

Пример 14.1. Пусть, например, задано характеристическое уравнение линеаризованной системы с жесткой обратной связью, охватывающей нелинейный элемент и часть линейных звеньев системы [Л. 23]:

$$T_1 \frac{d^3 x}{dt^3} + (T_0 + T_1) \frac{d^2 x}{dt^2} + [1 + T_0 k_2 k_{0,c} q(A)] \frac{dx}{dt} + (k_0 k_1 + k_{0,c}) k_2 q(A) x = 0 \quad (14.25)$$

Запишем условие устойчивости по критерию Гурвица:

$$(T_0 + T_1) [1 + T_0 k_2 k_{0,c} q(A)] - T_0 T_1 (k_0 k_1 + k_{0,c}) k_2 q(A).$$

$$T_0 + T_1 + T_0^2 k_2 k_{0,c} q(A) - T_0 T_1 k_0 k_1 k_2 q(A). \quad (14.26)$$

Если нелинейным элементом является трехпозиционное реле с однозначной характеристикой, то значение $q(A)$ ограничено (см. рис. 13.28):

$$0 < q(A) \leq \frac{2S}{\pi a}. \quad (14.27)$$

Учитывая максимальное значение $q(A) = 2S/(\pi a)$ и подставляя его в (14.26), получим неравенство (относительно, например, k_2 в зависимости от $k_{0.c}$), соответствующее устойчивости системы:

$$k_2 < \frac{\pi a (T_0 + T_1)}{2ST_0 (T_1 k_0 k_1 - T_0 k_{0.c})}. \quad (14.28)$$

Граница устойчивости, разделяющая области устойчивого равновесия и автоколебаний, определяется после замены в (14.28) неравенства равенством:

$$k_2 = \frac{\pi a (T_0 + T_1)}{2ST_0 (T_1 k_0 k_1 - T_0 k_{0.c})}. \quad (14.29)$$

По (14.29) может быть построен график $k_2 = f(k_{0.c})$, который в общем случае может иметь вид, указанный на рис. 14.7, а. Из графика видно, что с уве-

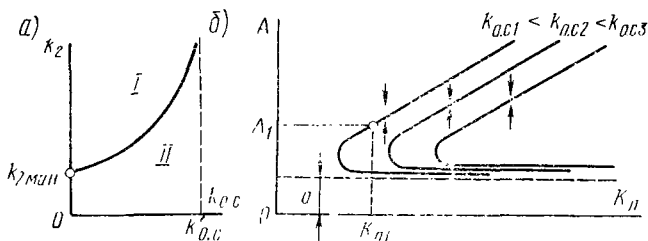


Рис. 14.7

личением $k_{0.c}$ увеличивается k_2 , т. е. расширяется область устойчивости, которая при отсутствии обратной связи ($k_{0.c} = 0$) определяется значением

$$k_{2\min} = \frac{\pi a (T_0 + T_1)}{2ST_0 T_1 k_0 k_1}. \quad (14.30)$$

Интересно отметить, что при выборе коэффициента усиления жесткой отрицательной обратной связи из условия $(T_1 k_0 k_1 - T_0 k'_{0.c}) = 0$:

$$k'_{0.c} = k_0 k_1 T_1 / T_0.$$

нелинейная система третьего порядка с уравнением (14.25) при трехпозиционном реле, имеющем однозначную характеристику, становится устойчивой при любых положительных значениях k_2 ($0 \leq k_2 \leq \infty$). При этом автоколебания в системе невозможны. Если уравнение (14.25) записать в операторной форме и подставить вместо $q(A)$ выражение, соответствующее данной нелинейности, то после замены p на $j\omega$ можно получить уравнения типа (13.90). По ним можно построить кривые зависимостей амплитуды автоколебаний от значений, например, коэффициента усиления линейной части системы $K_{\Sigma} = k_0 k_1 k_2$ для некоторых неизменных значений коэффициента обратной связи $k_{0.c}$ (рис. 14.7, б). Из полученного графика следует, что при увеличении $k_{0.c}$ амплитуда автоколебаний уменьшается для одних и тех же значений K_{Σ} , что способствует стабилизации нелинейной системы. При значениях $K_{\Sigma 1}$, например, для случая $k_{0.c1}$ в системе существуют устойчивые автоколебания с амплитудой A_1 , а для случаев $k_{0.c2}$ и $k_{0.c3}$ они отсутствуют.

Аналогично можно исследовать влияние гибких обратных связей на динамику нелинейных систем [11, 23].

Если структурная схема имеет два нелинейных звена, характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы будет содержать две неизвестных амплитуды A_1 и A_2 на входах нелинейных элементов. Чтобы решить такую задачу, следует дополнительно преобразовать характеристическое уравнение, исключив амплитуду A_2 или A_1 на основании структурной схемы.

Применение корректирующих устройств позволяет получить сколь угодно режим и в системах высокого порядка.

Подавление автоколебаний или их введение в систему при заданной амплитуде и частоте возможно также с помощью внешних периодических воздействий, что устанавливается посредством анализа вынужденных колебаний.

§ 14.6. Вопросы коррекции релейных систем

Заменяв релейный элемент (в случае идеального двухпозиционного реле) условно безынерционным звеном с коэффициентом усиления, стремящимся к бесконечности ($K_p \rightarrow \infty$), при $T_{0.е} = 0$ (см. рис. 14.5, а) получим характеристическое уравнение замкнутой системы [Л.25, 42] для $K(p) \approx k_d/A(p)$:

$$A(p) + K_p k_d = 0. \quad (14.31)$$

Так как коэффициент усиления разомкнутой системы в данном случае стремится к бесконечности ($K = K_p k_d$), то, как известно из линейной теории, система будет устойчивой, если полином $A(p)$ не выше второго порядка.

В случае третьего порядка уравнения (14.31) имеется критическое значение коэффициента усиления. А так как в данном случае $K \rightarrow \infty$, то система третьего (или более высокого) порядка, содержащая двухпозиционное реле с идеальной характеристикой, будет неустойчивой. При этом в системе установятся автоколебания с ограниченной амплитудой в отличие от линейной системы, поскольку характеристика реле имеет ограничение.

Для обеспечения устойчивости релейной системы, имеющей порядок выше второго, необходимо применение корректирующих устройств. Так как вместо релейной системы рассматривается эквивалентная линейная система при $K_p \rightarrow \infty$, то можно воспользоваться результатами исследований структурных схем, допускающих неограниченное увеличение коэффициента усиления [Л.25]. М. В. Мееровым установлено, что для стабилизации систем, допускающих неограниченное увеличение коэффициента усиления, отрицательная обратная связь должна охватывать звенья с наибольшими коэффициентами усиления, причем количество охватываемых звеньев зависит от типа корректирующей обратной связи. Для рассматриваемого случая это означает, что релейный элемент обязательно должен быть охвачен стабилизирующей обратной связью, так как этот элемент представлен звеном с бесконечно большим коэффициентом усиления. Напомним, что если обратная связь выполнена в виде реального дифференцирующего звена, то в системе третьего порядка должно быть охвачено только одно звено, а в систе-

мах выше третьего порядка — не более двух звеньев. Выводы М. В. Месорова могут быть рекомендованы для стабилизации релейных систем высокого порядка, содержащих несколько релейных элементов и несколько стабилизирующих обратных связей произвольного типа. Для участка структурной схемы, содержащей релейный элемент, охваченный обратной связью, на основании (14.17) передаточная функция определяется выражением, обратным передаточной функции обратной связи, а система рассматривается как линейная (см. рис. 14.5) относительно внешних воздействий.

Если внешние воздействия, прикладываемые к системе, имеют значительно меньшую частоту, то относительно этих медленно меняющихся воздействий система рассматривается как линейная [см. § 14.7].

§ 14.7. Компенсация влияния нелинейностей

В некоторых случаях использование нелинейных систем затруднено из-за наличия низкочастотных автоколебаний большой амплитуды. Устранить этот недостаток можно посредством компенсации нелинейностей. При этом нелинейная система относительно некоторых определенных входных сигналов может рассматриваться как линейная.

Применение компенсирующих нелинейностей. Если параллельно или последовательно с основной нелинейностью $\varphi(\sigma)$ системы включить компенсирующую нелинейность $\varphi^{-1}(\sigma)$, имеющую обратный ха-

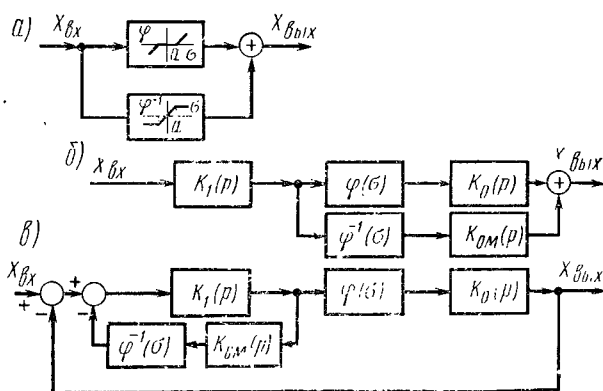


Рис. 14.8

актер, то эквивалентный элемент системы при этом будет линейным и система станет линейной. В этом состоит смысл технической линеаризации с помощью компенсирующих нелинейностей. На рис. 14.8, а показано включение компенсирующей нелинейности параллельно элементу с характеристикой типа зоны нечувствительности и линейного участка; эквивалентный элемент при этом будет линейным. Компенсирующие нелинейности могут быть представлены в виде математических моделей (электронных и др.).

Если нелинейность $\varphi(\sigma)$ обусловлена характеристикой самого объекта $K_o(p)$, то линейризация системы может быть произведена путем параллельного включения модели, состоящей из обратной по типу нелинейности $\varphi^{-1}(\sigma)$ и звена $K_{om}(p)$, являющегося моделью объекта (рис. 14.8, б). В замкнутых нелинейных системах нелинейность объекта $\varphi(\sigma)$ может быть скомпенсирована с помощью отрицательной обратной связи, охватывающей преимущественно линейные элементы и представленной в виде моделей компенсирующей нелинейности $\varphi^{-1}(\sigma)$ и объекта $K_o(p)$ (рис. 14.8, в). В результате система становится линейной относительно сигналов $x_{вх}$.

Вибрационная компенсация нелинейностей. В тех случаях, когда компенсация нелинейности не может быть выполнена из-за невозможности выделения или создания компенсирующей нелинейности, применяется вибрационная компенсация нелинейности. Такая компенсация является наиболее распространенным способом линейризации релейных систем. Хотя релейный элемент обладает существенно нелинейной характеристикой, он может приобрести свойства пропорциональности, если на его вход одновременно с управляющим сигналом подать периодическое воздействие. В зависимости от способа получения периодического воздействия различают вибрационную компенсацию от действия внешних и собственных колебаний.

Рассмотрим основы вибрационной компенсации нелинейности высокочастотным периодическим сигналом. Пусть на входе нелинейного элемента (рис. 14.9, а) с характеристикой $\varphi(\sigma)$ действуют медленно изменяющийся сигнал $x_0(t)$ и периодический сигнал $u(t)$ с нулевым средним значением, частота ω которого достаточно велика, чтобы можно было приближенно считать функцию $x_0(t)$ постоянной в пределах периода $T = 2\pi/\omega$ (рис. 14.9, б):

$$\sigma(t) = x_0(t) + u(t). \quad (14.32)$$

Выходной сигнал нелинейного элемента в этом случае можно представить в виде суммы средней, медленно изменяющейся составляющей $\varphi_1(x_0)$ и колебательной функции $\varphi_2(u)$, близкой к периодической функции с частотой ω :

$$\varphi[\sigma(t)] = \varphi[x_0(t) + u(t)] = \varphi_1(x_0) + \varphi_2(u). \quad (14.33)$$

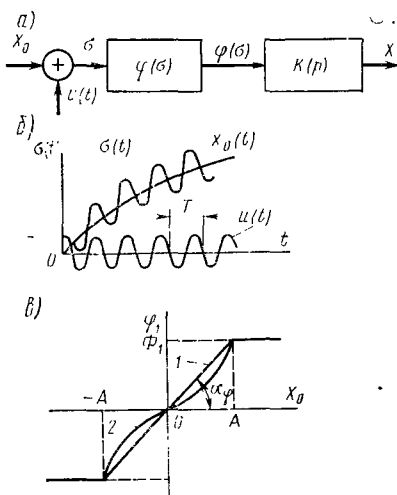


Рис. 14.9

Среднюю составляющую приближенно можно представить как среднее значение выходного сигнала нелинейного элемента за период:

$$\Phi_1[x_0(t)] \approx \frac{\omega}{2\pi} \int_{t-\pi/\omega}^{t+\pi/\omega} \Phi[x_0(t) + u(t)] dt. \quad (14.34)$$

В случае $x_0 = \text{const}$ формула (14.34) является точной и определяет постоянный член ряда Фурье, составленного относительно выходного сигнала нелинейного элемента. Колебательная функция $\Phi_2(u)$ есть сумма гармонических составляющих этого ряда Фурье.

Формула (14.34) тем точнее, чем больше частота ω и чем меньше $x_0(t)$ изменяется в пределах периода T . На рис. 14.9, в представлены кривые $\Phi_1(x_0)$ для идеального двухпозиционного реле при периодической функции $u(t)$ треугольного типа (кривая 1) и синусоидального типа (кривая 2) с частотой ω и амплитудой A . Вид этих кривых 1 и 2 несколько изменится при наличии гистерезиса и зоны нечувствительности.

На основании рис. 14.9, в можно считать, что зависимость $\Phi_1(x_0)$ является линейной для управляющего сигнала x_0 , изменяющегося в пределах $\pm A$. Следовательно, чем больше амплитуда компенсирующих колебаний A , тем шире зона линейности релейного элемента. Однако при этом уменьшается коэффициент усиления k_Φ линейризованного элемента, так как угол наклона α_Φ линейного участка $\Phi_1(x_0)$ уменьшается:

$$k_\Phi = \text{tg } \alpha_\Phi = \Phi_1/A. \quad (14.35)$$

Характеристики $\Phi_1(x_0)$ могут быть получены экспериментально, что позволит определить значения k_Φ и $x_{0\text{макс}} = A$.

Выходной сигнал нелинейного элемента $\Phi[\sigma(t)]$ согласно (14.33) поступает на вход линейной части системы, для которой справедлив принцип суперпозиции. На выходе линейной части системы будет сигнал:

$$x(t) = x_1[\Phi_1(x_0)] + x_2[\Phi_2(u)].$$

При достаточно большой частоте ω линейная часть системы из-за инерционности не будет пропускать компенсирующие колебания $u(t)$, поэтому составляющей $x_2[\Phi_2(u)]$ можно пренебречь. Следовательно, для разомкнутой системы при наличии вибрационных колебаний $u(t)$ на основании формулы (14.35) и структурной схемы (см. рис. 14.9, а) можно записать передаточную функцию:

$$K_n(p) = X_{\text{вых}}(p)/X_0(p) = k_\Phi K(p). \quad (14.36)$$

Выражение (14.36) может быть использовано для определения переходных процессов замкнутой системы при прохождении сигнала $x_0(t)$ методами линейной теории. Это значит, что при $x_{0\text{макс}} \leq A$ (см. рис. 14, 9, в) для частоты ω компенсирующих колебаний $u(t)$, превышающей частоту среза линейной части системы, релейная система может рассматриваться как линейная.

Колебания $u(t)$ могут быть подведены к релейному элементу от постороннего источника либо получены в результате работы реле в виб-

рациональном режиме (линеаризация собственными колебаниями). Процесс линеаризации аналогичен процессу модуляции. Релейный элемент представляет собой модулятор; дополнительное периодическое воздействие $u(t)$ соответствует несущей частоте, а управляющее воздействие $x_0(t)$ — модулирующему сигналу. В релейном элементе при этом происходит широтно-импульсная модуляция без существенных искажений, если отношение частоты сигнала $u(t)$ к частоте сигнала $x_0(t)$ больше трех [Л.42].

Предположим, что в замкнутой релейной системе возникают устойчивые колебания с частотой ω_1 и амплитудой A_1^* , которые для данной системы недопустимы. Чтобы изменить параметры этих автоколебаний, введем в систему внешнее периодическое воздействие $u(t) = Z \sin \omega_{\text{вып}} t$, вызывающее вынужденные колебания с частотой $\omega_{\text{вып}}$ (см. § 13.12). Выбирая определенную амплитуду Z и частоту $\omega_{\text{вып}}$ внешнего воздействия $u(t)$, произведем вибрационную компенсацию нелинейности. Принципиально вводить воздействие $u(t)$ в релейную систему можно в любом месте. Однако для уменьшения мощности независимого генератора периодических колебаний (ГПК) целесообразно воздействие $u(t)$ подавать на вход измерительного устройства или релейного элемента.

Недостаток данного способа — необходимость иметь отдельный независимый генератор ГПК, а достоинство — возможность изменения в широких пределах частоты и амплитуды сигнала $u(t)$.

Этот способ называется также *компенсацией нелинейности вынужденными колебаниями*.

При анализе динамики линеаризованной релейной системы относительно сигналов $x_0(t)$ передаточная функция разомкнутой системы определяется выражением (14.36) для данного способа линеаризации.

В качестве дополнительного периодического воздействия $u(t)$ для компенсации нелинейности могут быть использованы собственные колебания, возникающие при автоколебаниях системы. Так как частота автоколебаний обычно относительно низка, то необходимо применять способы повышения частоты автоколебаний.

Наиболее широко применяется способ создания собственных колебаний контура с помощью обратных связей и некоторых схем включения реле [Л.42]. Если, например, реле охвачено обратной связью в виде инерционного звена первого порядка, то во внутреннем контуре возникнут автоколебания, частота которых и амплитуда зависят от параметров реле и обратной связи.

Эти колебания оказывают на релейный элемент такое же действие, как и колебания, подводимые от внешнего источника. Однако в этом случае происходит ослабление управляющего сигнала в результате действия отрицательной обратной связи, пропускающей медленно изменяющуюся часть $\varphi_1(x_0)$ выходного сигнала реле. При этом величина медленно меняющегося входного сигнала реле будет равна $\mu x_0(t)$, где $\mu < 1$.

Определив коэффициент усиления k_r линеаризованного колебаниями реле (14.35), можно записать передаточную функцию для контура

структурной схемы с реле и обратной связью:

$$K_{p,к}(p) = k_{\phi} / [1 + k_{\phi} K_{o,с}(p)], \quad (14.37)$$

где

$$K_{o,с}(p) = k_{o,с} / (1 + T_{o,с} p).$$

Выражение (14.37) используется при анализе динамики релейной системы относительно сигналов $x_0(t)$ в случае вибрационного режима работы реле.

§ 14.8. О синтезе линейных корректирующих устройств нелинейных систем методом разделения частотных характеристик

Синтез корректирующих устройств некоторых нелинейных систем можно выполнить методом разделения частотных характеристик*. При этом целесообразно применить гармоническую линеаризацию характеристик нелинейных элементов, что позволяет ввести в расчет услов-

ную амплитудную характеристику нелинейного элемента системы [Л.27]:

$$N(A) = q(A) + jq_1(A). \quad (14.38)$$

Характеристическое уравнение гармонически линеаризованной нелинейной системы имеет вид

$$1 + K_{\Sigma}(j\omega) N(A) = 0,$$

откуда запишем исходное уравнение для расчета корректирующих устройств методом разделения частотных характеристик:

$$N(A) K_{\Sigma}(j\omega) = -1. \quad (14.39)$$

Уравнение (14.39) подобно уравнению (8.39), поэтому для оценки динамики нелинейной системы можно использовать характеристику $N(A)$ нелинейного элемента и отрицательную обратную ЛФХ линейной части системы — $K_{\Sigma}^{-1}(j\omega)$:

$$N(A) = -K_{\Sigma}^{-1}(j\omega). \quad (14.40)$$

В том случае, когда характеристики пересекаются, в системе возможны автоколебания (рис. 14.10, а). Чтобы исключить автоколебания в нелинейной системе, необходимо ввести корректирующее устройство

* В данном параграфе рассматривается частная задача коррекции нелинейной системы, в которой необходимо исключить автоколебания и обеспечить устойчивую работу.

и изменить АФХ линейной части системы. Если максимальное значение $|N(A)| \leq 1$, то для нелинейных элементов с однозначной характеристикой вместо (14.39) можно принять $K_{л}(j\omega) = 1$ и использовать рассмотренные методы расчета последовательных и параллельных корректирующих устройств линейных систем (см. § 11.5).

В случае применения последовательного корректирующего устройства нелинейных систем с неоднозначной характеристикой нелинейного элемента частотная функция скорректированной линейной части системы

$$K_{л.ск}(j\omega) = K_{л}(j\omega) K_{к}(j\omega).$$

На основании этого частотная функция корректирующего устройства

$$K_{к}(j\omega) = \frac{[-K_{л}^{-1}(j\omega)]}{[-K_{л.ск}^{-1}(j\omega)]} = \frac{A_{л}^{-1}}{A_{л.ск}^{-1}} e^{i(\varphi_{л} - \varphi_{л.ск})} = A_{к} e^{i\varphi_{к}}. \quad (14.41)$$

Расчет АФХ корректирующего устройства можно выполнить для двух точек (см. рис. 14.10, а):

при $\omega = 0$ принимаем $A_{к}(0) = 1$ и $\varphi_{к}(0) = 0$;

при $\omega_{кр}$ принимаем $A_{к}(\omega_{кр}) = h \cdot N(A)$ и $\varphi_{к}(\omega_{кр}) = 0$ из условия исключения взаимного пересечения характеристик $N(A)$ и $-K_{л.ск}^{-1}(j\omega)$.

Значения $K_{к}(j0)$ и $K_{к}(j\omega_{кр})$ в случае выбора интегро-дифференцирующего устройства позволяют построить АФХ корректирующего устройства (рис. 14.10, б) и рассчитать его параметры.

В случае применения параллельного корректирующего устройства для нелинейных систем с неоднозначной характеристикой нелинейного элемента при расчете используем векторы $K_{охв}^{-1}(j\omega)$ и $K_{л.к}^{-1}(j\omega)$ при $\omega = 0$ и $\omega_{кр}$. Это позволяет найти по формуле (11.66) векторы $K_{о.с}(j0)$ и $K_{о.с}(j\omega_{кр})$.

Вектор $K_{л.к}^{-1}(j\omega_{кр}) = hN(A)$ выбирается из условия исключения взаимного пересечения характеристик $N(A)$ и $-K_{л.ск}^{-1}(j\omega)$. Далее параметры параллельного корректирующего устройства рассчитываются аналогично тому, как указано в § 11.5.

Вопросы для самопроверки

1. Каковы основные задачи коррекции нелинейных систем?
2. Какие средства применяются для коррекции нелинейных систем?
3. Какое влияние оказывают неединичные главные обратные связи на фазовый портрет?
4. В каких случаях в системе второго порядка возникает скользящий режим?
5. Когда исчезает скользящий режим в релейной системе второго порядка?
6. Как рассчитываются корректирующие устройства нелинейных систем при гармонической линеаризации?
7. Для чего применяются компенсирующие нелинейности?
8. Что означает вибрационная компенсация нелинейностей?
9. При каких условиях возможна вибрационная компенсация нелинейности?
10. Какими способами осуществляется вибрационная компенсация нелинейности?
11. Поясните порядок синтеза линейных корректирующих устройств нелинейных систем по методу разделения частотных характеристик.

КАЧЕСТВО ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Основными показателями качества нелинейных систем являются: время переходного процесса t_p , колебательность μ (или M), перерегулирование σ , а также амплитуда A_1^0 и частота ω_1 автоколебаний. Оценить качество переходного процесса нелинейных систем можно точными методами по кривой переходного процесса, косвенными методами и методами вычислительной техники.

При расчете и проектировании нелинейных систем большое значение имеет построение кривой переходного процесса для различных внешних воздействий. Существует несколько методов расчета переходных процессов нелинейных автоматических систем. Наибольшее распространение имеют методы, основанные на гармонической линеаризации, графо-аналитические методы и методы, использующие вычислительные машины. В связи с появлением вычислительной техники графо-аналитические методы имеют ограниченное применение и являются вспомогательными.

Если характеристика нелинейного элемента $\varphi(\sigma)$ является непрерывной и дифференцируемой, то она может быть представлена аналитически сходящимся рядом Тейлора. Типичными примерами нелинейностей такого типа являются кривые намагничивания стальных сердечников. Однако в тех случаях, когда система испытывает большие возмущения, определение переходного процесса по линеаризованному аналитически уравнению может дать малую точность, так как имеют место существенные отклонения от линейной зависимости.

Таким образом, при больших возмущениях метод касательных (разложение в ряд Тейлора) применить нельзя. Необходимо при этом либо составить совокупность линеаризованных уравнений, справедливых на отдельных участках характеристики, либо применить другой более точный метод (метод наименьших квадратов и др.).

§ 15.1. Оценка качества переходного процесса по данным фазового портрета

Фазовый портрет может быть использован для косвенной оценки качества переходного процесса. Если в частном случае фазовая траектория образует предельный цикл, то, отметив на осях значения $x_{\max}$ и $y_{\max}$, можно принять их за параметры эквивалентного эллипса, соответствующего гармоническим колебаниям. Таким образом, при наличии предельного цикла, полагая приближенно, что колебания на выходе системы (линейной части) являются синусоидальными [кривая $x(t)$ на рис. 15.1, а], получим следующие значения амплитуды, частоты и периода (рис. 15.1, а):

$$\left. \begin{aligned} A_1^0 &= x_{\max}; \\ \omega_1 &= y_{\max}/A_1^0; \quad T = 2\pi/\omega_1. \end{aligned} \right\} \quad (15.1)$$

Если фазовая траектория образует кривую, сходящуюся в начале координат (рис. 15.1, б), то по ней могут быть определены частоты и полупериоды затухающих колебаний [кривая $x(t)$ на рис. 15.1, в].

$$\left. \begin{aligned} \omega_{AC} &= 2y_B/AC; & T_{AC} &= \pi/\omega_{AC}; \\ \omega_{CE} &= 2y_D/CE; & T_{CE} &= \pi/\omega_{CE}. \end{aligned} \right\} \quad (15.2)$$

В том случае когда фазовые траектории проходят через начало координат, переходный процесс будет монотонным, если фазовая траектория при данных начальных условиях проходит только в одном

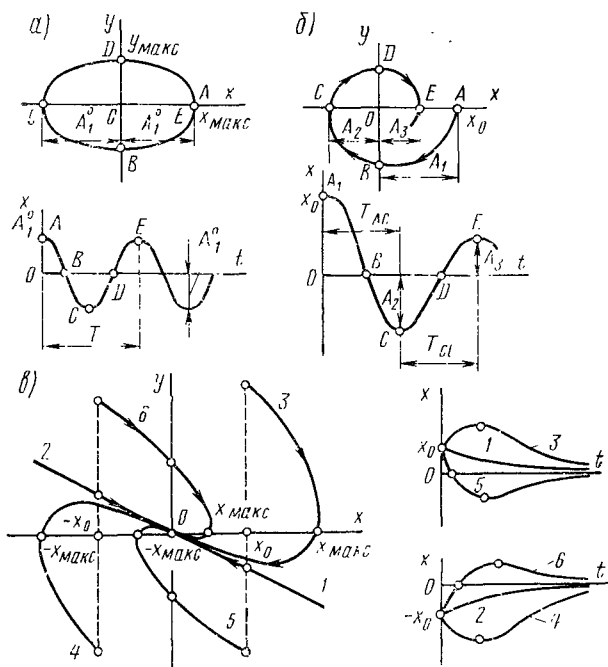


Рис. 15.1

квадранте (кривые 1 и 2 на рис. 15.1, в); если фазовая траектория проходит более чем в одном квадранте (кривые 3, 4, 5 и 6 на рис. 15.1, в), переходный процесс будет с перерегулированием [см. кривые $x(t)$ на рис. 15.1, г соответственно):

$$\sigma\% = (x_{\max} - x_c) 100\% / x_0. \quad (15.3)$$

Время перемещения изображающей точки по фазовой траектории характеризует продолжительность переходного процесса.

§ 15.2. Оценка качества переходного процесса по методу гармонической линеаризации

Косвенная оценка качества переходного процесса. Такая оценка возможна лишь для случая симметричного колебательного процесса (рис. 15.2), что довольно часто имеет место на практике. Кривые $x_1(t)$ и $a_1(t)$ соответствуют затухающему, а кривые $x_2(t)$ и $a_2(t)$ — расходящемуся процессам. В этом случае

$$x = a_0 e^{\xi t} \sin(\omega t + \varphi). \quad (15.4)$$

В нелинейной системе имеет место процесс с медленно изменяющимся показателем затухания $\xi(t)$ и частотой $\omega(t)$:

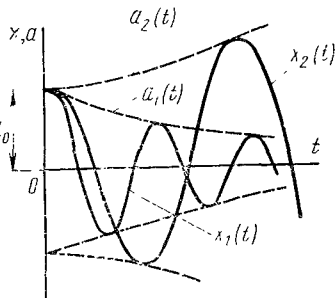


Рис. 15.2

$$x = a \sin \psi, \quad (15.5)$$

где

$$a = A(t);$$

$$da/dt = a\xi(t); \quad \omega(t) = d\psi/dt, \quad (15.6)$$

причем искомыми величинами являются ξ и ω . В случае линейной системы, когда $\xi = \text{const}$, из (15.6) получим частный случай:

$$da/a = \xi dt \quad \text{или} \quad a = a_0 e^{\xi t},$$

что соответствует уравнению (15.4).

В случае нелинейной системы, когда ξ меняется в процессе колебаний, текущее значение амплитуды [см. (15.6)]

$$da/a = \xi(t) dt \quad \text{или} \quad a = a_0 \exp \left(\int_0^t \xi dt \right). \quad (15.7)$$

Нелинейные затухающие (или расходящиеся) колебания можно разложить в соответствующий ряд Фурье, состоящий из суммы затухающих (или расходящихся) гармонических составляющих [Л.23]. При этом по методу гармонической линеаризации принимают во внимание лишь первую гармонику этого разложения. В связи с этим формулы гармонической линеаризации нелинейных элементов при затухающих (или расходящихся) колебаниях будут отличаться от указанных ранее (см. § 13.7). В самом деле, если величина ξ не мала, то, считая амплитуду a переменной величиной, в результате дифференцирования (15.5) с учетом (15.6) запишем

$$dx/dt = -a\omega \cos \psi + a\xi \sin \psi. \quad (15.8)$$

Из (15.5) и (15.8) найдем другие выражения [по сравнению с (13.66)]:

$$\sin \psi = \frac{x}{a}; \quad \cos \psi = \frac{1}{a\omega} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{\xi x}{a\omega}. \quad (15.9)$$

Выходная переменная нелинейного элемента с симметричной нелинейной характеристикой в первом приближении может быть представлена членами первой «гармоники»:

$$x_{н.э.} = a_1 \sin \psi + b_1 \cos \psi,$$

или с учетом (15.9)

$$x_{н.э.} = \frac{a_1}{a} x + \frac{b_1}{a\omega} \frac{dx}{dt} = \frac{b_1 \xi}{a\omega} x, \quad (15.10)$$

где

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(a \sin \psi) \sin \psi d\psi; \quad b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(a \sin \psi) \cos \psi d\psi.$$

Записывая (15.10) в операторной форме, получим

$$X_{н.э.}(p) = q(a) X(p) + q_1(a) \frac{p}{\omega} X(p) = q_1(a) \frac{\xi}{\omega} X(p),$$

где $q(a) = a_1/a$ и $q_1(a) = b_1/a$ — гармонические коэффициенты усиления.

На основании последнего уравнения получено выражение передаточной функции «гармонически» линеаризованного нелинейного звена при затухающем (или расходящемся) колебательном процессе (для симметричных статических нелинейностей):

$$N(p, a) = \frac{X_{н.э.}(p)}{X(p)} = q(a) + q_1(a) \left(\frac{p}{\omega} - \frac{\xi}{\omega} \right). \quad (15.11)$$

В случае однозначных нелинейных характеристик $q_1(a) = 0$, поэтому выражение для $N(p, a)$ совпадает с (13.69), а в случае неоднозначных характеристик $q_1(a) \neq 0$ (обычно q_1 меньше нуля), и выражение (15.11) отличается от (13.70) слагаемым, содержащим ξ .

В общем случае передаточная функция (15.11) зависит от трех неизвестных: a , ω и ξ .

Если $|\xi| \ll \omega$, то слагаемое ξ/ω в (15.11) является малой величиной, а переходный процесс близок к периодическому; при $\xi = 0$ в системе устанавливаются автоколебания.

Для оценки качества переходного процесса нелинейной системы при затухающих (или расходящихся) колебаниях в результате указанной гармонической линеаризации (15.11) можно использовать характеристическое уравнение замкнутой системы, составленное по преобразованной структурной схеме аналогично (13.88):

$$A(p) + B(p) \left[q(a) + \frac{p}{\omega} \xi q_1(a) \right] = 0, \quad (15.12)$$

где $A(p)$ и $B(p)$ — операторы линейной части системы.

Для колебательного процесса вида (15.4) в линейной системе свойственно наличие пары доминирующих комплексных корней характеристического уравнения $p = \xi \pm j\omega$ с постоянными значениями ξ и ω (здесь ξ равно степени устойчивости α_0).

Аналогично и колебательный процесс в нелинейной системе, описываемый приближенно формулами (15.5) и (15.6), определяется меняющимися ξ и ω , которые принадлежат паре комплексных корней $p = -\xi \pm j\omega$ характеристического уравнения «гармонически» линеаризованной системы. Можно найти ξ и ω , заменив в (15.12) p на $\xi + j\omega$:

$$A(\xi + j\omega) + B(\xi + j\omega)[q(a) + jq_1(a)] = 0. \quad (15.13)$$

При высокой степени характеристического уравнения (15.12) выражение (15.13) целесообразно преобразовать путем разложения в ряд по степеням $j\omega$ (при больших ξ) или по степеням ξ (при малых ξ) [Л.23].

Уравнение (15.13) содержит три неизвестных ξ , ω и a .

Диаграммы качества затухания нелинейных колебаний. Если $\xi = 0$, то уравнение (15.13) аналогично (13.88а) и используется для построения областей устойчивости и автоколебаний (см. рис. 13.31, б). При $\xi \neq 0$ уравнение (15.13) позволяет дополнить полученный график и построить диаграмму качества затухания нелинейных колебаний. Е. П. Поповым указано несколько способов построения диаграммы

качества для различных классов нелинейных систем.

Выделив в (15.13) вещественную и мнимую части, получим два уравнения:

$$X(a, \omega, \xi) = 0; \quad Y(a, \omega, \xi) = 0. \quad (15.14)$$

Диаграмма качества затухания нелинейных колебаний строится чаще всего относительно коэффициента усиления k , который входит в (15.14).

Если из одного уравнения (15.14) выразить частоту через a , ξ и k :

$$\omega = f_1(a, \xi, k) \quad (15.15)$$

и подставить ее в другое уравнение (15.14), то можно найти коэффициент усиления

$$k = f_2(a, \xi). \quad (15.16)$$

Придавая величине ξ различные постоянные значения, получим кривые $k = f_3(a)$ в виде семейства линий при $\xi = \text{const}$ (рис. 15.3, а). Используя (15.14), построим также семейство линий $\omega = \text{const}$ (рис. 15.3, б).

Приведенные графики представляют собой диаграмму качества затухания нелинейных колебаний, на основании которой можно построить кривые $\xi(a)$ и $\omega(a)$ и охарактеризовать переходный процесс следующим образом. Линия $\xi = 0$ соответствует отсутствию затухания, когда устанавливаются автоколебания с амплитудой на входе нели-

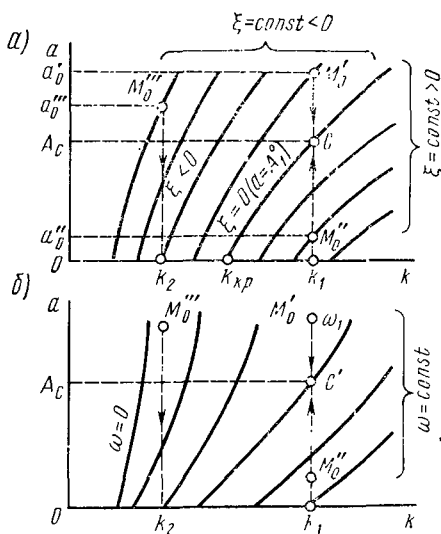


Рис. 15.3

нейного элемента $a = A_1^0$ и частотой ω_1 (например, точка C и соответственно точка C' на рис. 15.3, a и b). Выше линии автоколебаний расположены линии $\xi < 0$, соответствующие затухающим колебаниям, а ниже — линии $\xi > 0$, соответствующие расходящимся колебаниям. Если при $k_1 > k_{кр}$ начальное значение амплитуды $a_0' > A_C$, то колебания затухают, если $a_0'' < A_C$, то колебания расходятся; при значении $k_2 < k_{кр}$ колебания будут затухающими при любых начальных амплитудах a_0 .

Протеканию переходного процесса во времени соответствует движение точки на диаграмме по вертикали (так как амплитуда a в переходном процессе меняется, а коэффициент усиления k сохраняется постоянным), как указано стрелками на рис. 15.3 для точек M_0^i . По-

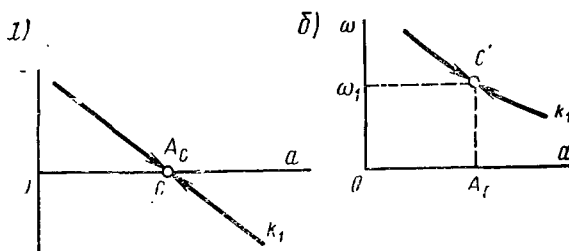


Рис. 15.4

скольку вертикаль, соответствующая коэффициенту k , пересекает линии $\xi = \text{const}$ и $\omega = \text{const}$ при различных амплитудах, можно при заданном k построить графики $\xi(a)$ и $\omega(a)$, как это показано на рис. 15.4 для k_1 .

Для линейных систем значения ξ и ω в переходном процессе неизменны, поэтому линии на диаграмме качества затухания линейных колебаний приобретают вид вертикальных прямых.

Следовательно, в системе, содержащей нелинейный элемент типа насыщения, при амплитудах $a \leq S/k$ линии $\xi = \text{const}$ и $\omega = \text{const}$ будут иметь вид вертикальных прямых, как для всякой линейной системы, а при $a > S/k$ линии будут искривляться за счет нелинейности, вызываемой насыщением (рис. 15.5). Это означает, что показатель затухания ξ (рис. 15.5, a) и частота ω (рис. 15.5, b) в зоне линейности характеристики постоянны, а в зоне насыщения изменяются. Колебания в переходном процессе в нелинейной системе из-за насыщения будут происходить при больших по абсолютной величине ξ для начальных отклонений $a_0 > S/k$ и затухать быстрее, чем в линейной системе. В области неустойчивости линейной системы, например при $k_1 > k_{кр}$, колебания в линейной системе будут расходиться до бесконечности (см. рис. 15.2) с постоянным показателем $\xi_1 > 0$. В нелинейной же системе за счет искривления линий $\xi = \text{const}$ значение ξ по вертикали уменьшается постепенно до нуля в точке C , где устанавливаются устойчивые колебания с определенной амплитудой. Если амплитуда A_C велика, то практически это тоже эквивалентно неустойчи-

ности. Если такая амплитуда допустима, то нелинейность типа насыщения расширяет возможные рабочие пределы изменения параметра k .

Используя приближенные формулы, можно найти время затухания колебательного процесса t_p от a_0 до a_k , величину перерегулирования в относительных единицах $|x_k/a_0|$ и число колебаний m за время переходного процесса:

$$t_p \approx (1/\xi_0) \ln(a_k/a_0); \quad (15.17)$$

$$|x_k/a_0| \approx \exp(\pi \xi_0/\omega_0); \quad (15.18)$$

$$m \approx [\omega_0/(2\pi\xi_0)] \ln(a_k/a_0), \quad (15.19)$$

где ξ_0 и ω_0 — средние величины, определяемые на диаграмме качества начальным и конечным положением точки M_0 ; a_k — величина, определяемая конечным положением этой точки.

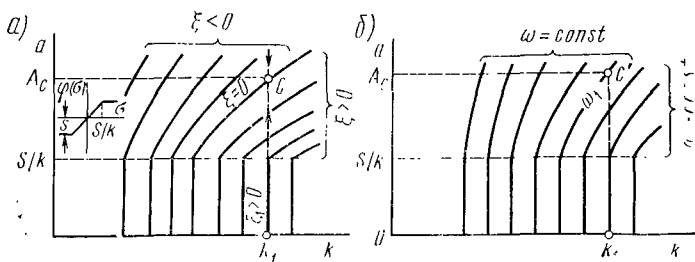


Рис. 15.5

Для автоколебательных процессов (точка C на рис. 15.3, a и 15.5 $a_k = A_c$), для затухающих процессов рекомендуется брать $a_k \approx 0,05 a_0$.

Если начальное положение точки M_0 находится на кривой $\omega = \text{const}$ (или левее этой кривой (см. рис. 15.3, б)), то переходный процесс будет монотонным и формулы (15.17) — (15.19) применять нельзя. Монотонные переходные процессы в нелинейной системе исследуются либо численно-графическими методами, либо методами моделирования.

Построение кривой переходного процесса. Переходные процессы при свободном движении системы в период отработки начальных отклонений могут быть рассчитаны по методу гармонической линеаризации (методы Е. П. Попова и И. И. Кринецкого и др.). Используя диаграмму качества затухания колебаний, введен в рассмотрение некоторый показатель колебательного процесса [Л.23]:

$$T(a) = -|1/\xi(a)|. \quad (15.20)$$

Если на отдельных участках переходного процесса $\xi = \text{const}$, то $T(a) = \text{const}$. Тогда на этих участках $a(t)$ изменяется по экспоненте

$$da/dt = -a/T(a). \quad (15.21)$$

Чтобы построить переходный процесс свободного движения нелинейной системы, получим сначала графики $a(t)$ и $\omega(t)$. График $a(t)$ вычислим на основании формулы, полученной из (15.6), или по кривой $\xi(a)$ (см. рис. 15.4, а), которая определяет угол наклона касательной.

Если при $t = 0$ задано a_0 , то по значению $\xi(a_0)$ находим $T(a_0)$. Далее по оси ординат откладываем a_0 (рис. 15.6, а), а по оси абсцисс — $T(a_0)$; полученные точки B и C соединяем прямой линией, которая на основании (15.21) является касательной к кривой $a(t)$ в начальной точке. Будем считать, что на некотором отрезке CD [принимая произвольно $\approx 0,25T(a_0)$] эта прямая практически совпадает с кривой $a(t)$ до точки, когда амплитуда уменьшалась до a_1 . Затем по данным a_1 и $\xi(a_1)$ найдем $T(a_1)$ и произведем аналогичные построения. В результате получим приближенную кривую $a(t)$, используя которую и график $\omega(a)$, указанный на рис. 15.4, б, построим зависимость $\omega(t)$ (рис. 15.6, б). Таким образом, известные: начальное значение $x_0 = a_0$, фаза $\psi_0 = \pi/2$ и график огибающей $a(t)$. Чтобы построить $x(t)$, следует на оси времени нанести характерные точки t_π — для $x = 0$, $t_{3\pi/2}$ — для x_π (величина перерегулирования) и т. д. Для этого на основании (15.6) запишем

$$\psi = \psi_0 + \int_0^t \omega(t) dt = \frac{\pi}{2} + \int_0^t \omega(t) dt. \quad (15.22)$$

Из (15.22) видно, что для $\psi = \pi$ (точка t_π) время на графике $\omega(t)$ определяется ординатой, ограничивающей площадь, когда интеграл в (15.22) равен $\pi/2$ (см. рис. 15.6, б). Аналогично по площади $S = \pi/2$ определяем последующие характерные точки до тех пор, пока не получим значение a_κ . Далее по данным a_0 , x_π , ограничивающей кривой $a(t)$ и характерным точкам t_π , $t_{3\pi/2}$, $t_{2\pi}$ и т. д. проведем ориентировочно кривую $x(t)$. Полученная кривая (рис. 15.6, в) позволяет оценить качество нелинейного переходного процесса.

Если внешнее воздействие можно привести к эквивалентным начальным значениям, то диаграмма качества может быть использована для построения эквивалентного процесса $x(t)$ при заданном внешнем воздействии.

§ 15.3. Методы численного интегрирования

К приближенным методам расчета переходных процессов нелинейных систем относятся методы численного интегрирования: Адамса, Чанлыгина, Эйлера и др. Эти методы позволяют рассчитывать как

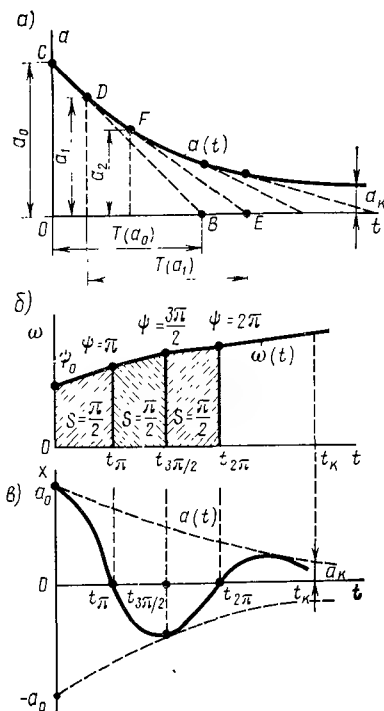


Рис. 15.6

колебательные, так и монотонные процессы. Методы численного интегрирования широко используются при расчетах на электронных цифровых вычислительных машинах (ЭЦВМ).

Метод численного интегрирования Эйлера. Этот метод является наиболее простым и используется иногда для приближенных безмашинных расчетов.

При расчете переходных процессов этим методом знак дифференцирования d у всех переменных x_i и времени t заменяется на знак конечного приращения Δ . Полученные таким образом уравнения системы разрешаются относительно приращений переменных Δx_i , считая Δt заданным и неизменным для всех уравнений в процессе расчета.

Далее предполагается, что на данном отрезке времени Δt переменные изменяются на величину Δx_i относительно предыдущих их значений x'_i , а значение x_i в конце интервала Δt

$$x_i = x'_i + \Delta x_i.$$

Пусть, например, получены следующие уравнения нелинейной системы, когда нелинейные характеристики элементов представлены аналитическими выражениями (применены способы интегрируемой аппроксимации):

$$\left. \begin{aligned} T_1 \frac{dx_1}{dt} + x_1 &= k_1 x_0(t) + k_{0.c1} x_1 - k_{0.c2} x_3 - k_{0.c3} x_4; \\ T_2 \frac{dx_2}{dt} + x_2 &= k_2 x_1; \\ T_3 \frac{dx_3}{dt} + x_3 &= \varphi_1(x_2, x_3) - k_{0.c4} x_4; \\ T_4 \frac{dx_4}{dt} &= x_3 - k_{0.c5} \varphi_2(x_4) \pm f(t). \end{aligned} \right\} \quad (15.23)$$

Расчетные уравнения на основании (15.23) для $t_n = n \cdot \Delta t$ запишем в виде

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_1 &= \frac{k_1 x_0(t) + (k_{0.c1} - 1) x'_1 - k_{0.c2} x'_3 - k_{0.c3} x'_4}{T_1} \Delta t; \\ x_1 &= x'_1 + \Delta x_1; \quad \Delta x_2 = \frac{k_2 x_1 - x'_2}{T_2} \Delta t; \quad x_2 = x'_2 + \Delta x_2; \\ \Delta x_3 &= \frac{\varphi_1(x'_2, x'_3) - x'_3 - k_{0.c4} x'_4}{T_3} \Delta t; \quad x_3 = x'_3 + \Delta x_3; \\ \Delta x_4 &= \frac{x_3 - k_{0.c5} \varphi_2(x'_4) \pm f(t)}{T_4} \Delta t; \quad x_4 = x'_4 + \Delta x_4, \end{aligned} \right\} \quad (15.24)$$

где n — номер шага интегрирования; x'_i — значение переменной на предыдущем шаге; Δt — интервал времени (шаг интегрирования) для численного интегрирования, выбираемый из условия $0,1 T_{\min} \leq \Delta t \leq 0,2 T_{\min}$.

Здесь $T_{\min}$ — наименьшая из всех постоянных времен T_i элементов данной системы.

Результаты расчетов целесообразно записать в таблицу, на основании которой далее строится график переходных процессов. Он может быть построен относительно изменения во времени всех переменных величин системы для любых начальных условий.

Метод может быть применен для расчета переходных процессов любой автоматической системы.

Следует отметить, что метод является простым по подготовке к расчету, но чрезвычайно трудоемким при высоком порядке уравнения системы с многочисленными обратными связями и нелинейностями. Поэтому в настоящее время численные методы применяются в сочетании с вычислительными средствами, что повышает производительность расчетов. Метод Эйлера может использоваться для расчета переходных процессов сложных линейных и нелинейных автоматических систем относительно задающих и возмущающих воздействий. Структура системы, параметры элементов и начальные условия при этом должны быть заданы.

По методу Эйлера точность интегрирования определяется ошибкой, пропорциональной квадрату шага интегрирования. Это можно пояснить следующим образом.

Для заданного нелинейного уравнения первого порядка с начальными условиями $t = t_0$ и $x(t_0) = x_0$ запишем нелинейное уравнение в конечных приращениях:

$$\Delta x_i = \Delta t f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t),$$

где $i = 1, 2, \dots, n$.

Новое значение переменной x_i определим через исходное значение x_{i0k} и приращение Δx_i за интервал Δt относительно t_{0k} :

$$x_i = x_{i0k} + \Delta x_i = x_{i0k} + \Delta t f_i(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, t_0).$$

Для заданных начальных условий $[t = t_0$ и $x_i(t_0) = x_{i0}]$ найдем $f_i(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, t_0)$. Выбрав шаг $h = t - t_0 = \Delta t$, запишем

$$x_i = x_{i0} + h f_i(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, t_0) = x_{i0} + h x'_{i0};$$

$$x'_{i0} = f_i(x_{i0}, t_0).$$

Для k -го шага

$$\left. \begin{aligned} x_i(t_{k+1}) &= x_i(t_k) + h x'_i(t_k); \\ x'_i(t_k) &= f_i[x_i(t_k); t_k]. \end{aligned} \right\} \quad (15.25)$$

Точность метода Эйлера можно определить, если разложить $x(t)$ в ряд Тейлора и сравнить с расчетной формулой (15.25) на некотором шаге k :

$$x_i(t_{k+1}) = x_i(t_k) + x'_i(t_k)h + \frac{x''_i(t_k)}{2!}h^2 + \dots,$$

откуда ошибка для точки внутри шага h :

$$\varepsilon = \left| x_i(t_{k+1}) - \tilde{x}(t_{k+1}) \right| = \frac{x_i''(t_k)}{2!} h^2 + \dots,$$

где $\tilde{x}_i(t_{k+1}) = x_i(t_k) + hx_i'(t_k)$.

Таким образом, приближенно ошибка

$$\varepsilon_i \approx \frac{x_i''}{2} h^2 = h^2.$$

Эта ошибка может быть представлена графически, поскольку приращение переменной Δx_i находится по площади трапеции hx_i' вместо интегрирования

$$\Delta x_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) dt.$$

При интегрировании системы дифференциальных уравнений используется формула (15.25) для каждого уравнения.

Интегрирование уравнений нелинейных систем с помощью ЭЦВМ.

Для облегчения расчета и механизации вычислительных работ целесообразно при интегрировании сложных нелинейных дифференциальных уравнений применять ЭЦВМ. В настоящее время известны следующие методы, использующиеся при интегрировании уравнений на ЭЦВМ: Тейлора, Пикара, Эйлера, Эйлера—Коши, Адамса—Башфорта, Адамса—Штермера, Рунге—Кутта и др.

Наиболее экономичным с точки зрения размещения промежуточных результатов в памяти машины является метод Рунге—Кутта, при котором процесс программирования хорошо освоен. Этот метод является более точным (чем метод Эйлера) в результате введения поправок в расчетные формулы.

Пусть дана система нелинейных дифференциальных уравнений с начальными условиями [при $t = t_0$ значения $x_i(t_0) = x_{i0}$]

$$dx_i/dt = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \text{ где } i = 1, 2, \dots, n.$$

Пронтегрировав в пределах от t_0 до t , получим

$$x_i(t) = x_{i0} + \int_{t_0}^t f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) dt.$$

Допустим, что принят шаг интегрирования h , тогда $t_1 = t_0 + h$ и значение переменной

$$x_i(t_1) = x_{i0} + \int_{t_0}^{t_1} f_i(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, t_0) dt.$$

Для второго шага $(t_2 - t_1) = h - t_0 - 2h$

$$x_i(t_2) = x_{i0} + \int_{t_0}^{t_2} f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) dt = x_{i0} + \\ + \int_{t_0}^{t_1} f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) dt + \int_{t_1}^{t_2} f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) dt.$$

Для k -го шага соответственно будем иметь

$$x_i(t_{k+1}) = x_{ih} + \int_{t_h}^{t_{h+1}} f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) dt = x_{ih} + \Delta x_{ih},$$

где

$$\Delta x_{ih} = \int_{t_h}^{t_{h+1}} f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) dt. \quad (15.26)$$

Задача, таким образом, состоит в вычислении интеграла (15.26), определяющего площадь на координатной плоскости кривой $x_i(t)$. Интеграл (15.26) вычисляется приближенно по формуле

$$\Delta x_{ih} = \frac{1}{6} [\Delta x_{ik}^{(1)} + 2\Delta x_{ik}^{(2)} + 2\Delta x_{ik}^{(3)} + \Delta x_{ik}^{(4)}], \quad (15.27)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta x_{ik}^{(1)} &= hf_i(x_{1h}, x_{2h}, \dots, x_{nh}, t_h); \\ \Delta x_{ik}^{(2)} &= hf_i\left(x_{ih} + \frac{\Delta x_{ik}^{(1)}}{2}, \dots, t_h + h/2\right); \\ \Delta x_{ik}^{(3)} &= hf_i\left(x_{ih} + \frac{\Delta x_{ik}^{(2)}}{2}, \dots, t_h + h/2\right); \\ \Delta x_{ik}^{(4)} &= hf_i\left(x_{ih} + \frac{\Delta x_{ik}^{(3)}}{2}, \dots, t_h + h\right). \end{aligned}$$

По методу Эйлера в отличие от (15.27) принято $\Delta x_{ik} = hf_i(x_{ih}, t_h) = \Delta x_{ik}^{(1)}$, поэтому метод Рунге—Кутты имеет более высокую точность и рекомендуется при расчетах на ЭЦВМ.

При интегрировании уравнений нелинейной системы на ЭЦВМ составляется программа расчета. Методы программирования в настоящее время хорошо разработаны.

§ 15.4. Графо-аналитические методы

В настоящее время при предварительных и проверочных расчетах, а также при отладке программ расчета на вычислительных машинах используются графо-аналитические методы. Практически наиболее удобными при этом являются методы пропорций (А. В. Башарина) и секущих (Д. А. Башкирова). Эти методы позволяют приближенно решить

нелинейные дифференциальные уравнения в результате графических построений.

Графо-аналитические методы позволяют строить кривые переходных процессов при любых внешних воздействиях, в системах с запаздыванием и с переменными параметрами.

Метод пропорций. Этот метод основан на использовании статических характеристик всех элементов и обратных связей и представляет собой графическое решение уравнений в конечных разностях. В результате графических расчетов можно одновременно построить кривые переходных процессов во всех элементах системы; при этом можно проследить влияние характеристик отдельных элементов и обратных связей на переходный процесс.

Прежде чем приступить к графическим построениям, необходимо составить дифференциальные уравнения элементов (или узлов элементов) с учетом действия имеющихся обратных связей, принимая определенные допущения. Эти уравнения должны быть не выше первого порядка. Далее эти уравнения следует разрешать относительно производных выходных переменных элементов, определяемых разностью суммарного установившегося и суммарного текущего значений входных воздействий для каждого элемента системы:

$$A_i dx_i/dt = [f(t) + F_k(x_k) + F_l(dx_l/dt) + F_{sq}(x_s \cdot x_q)] - \Sigma x_{oi}. \quad (15.28)$$

Уравнение статической характеристики каждого элемента в общем случае имеет вид:

$$x_i = \Phi(\Sigma x_{oi}). \quad (15.29)$$

В уравнениях (15.28) и (15.29) x_i — выходная переменная элемента системы; $f(t)$ — внешнее воздействие, прикладываемое на входе элемента; $F_k(x_k)$ — функция выходной переменной k -го элемента, подаваемая через цепь обратной связи; $F_l(dx_l/dt)$ — функция производной выходной переменной l -го элемента; $F_{sq}(x_s \cdot x_q)$ — функция произведения выходных переменных двух каких-либо элементов, подаваемая через цепь нелинейной обратной связи; Σx_{oi} — суммарное текущее значение входных воздействий для данного элемента.

Решение уравнений (15.28) и (15.29), определяющих переходный процесс системы, производится графическим способом. Для этого в уравнении (15.28) заменяем d на Δ и записываем в виде:

$$\frac{\Delta x_i}{[f(t) + F_k(x_k) + F_l(\Delta x_l/\Delta t) + F_{sq}(x_s \cdot x_q)] - \Sigma x_{oi}} = \frac{\Delta t}{A_i}. \quad (15.30)$$

Так как при неизменных во времени параметрах величина A_i является постоянной, то при фиксированном выбранном интервале времени Δt правая часть (15.30) представится постоянной величиной:

$$\Delta x_i / (\Sigma x_{oi \text{ уст}} - \Sigma x_{oi}) = \Delta t / A_i = \text{tg } \alpha_i = \text{const}, \quad (15.31)$$

где $\Sigma x_{oi \text{ уст}}$ — суммарное установившееся значение входных воздействий, определяемое членами квадратной скобки знаменателя (15.30).

Можно указать достаточно простой графический способ решения уравнения (15.31), где суммарное установившееся значение входных воздействий для каждого интервала времени Δt обычно является переменной величиной и определяется значениями переменных, полученных на предыдущем интервале времени. Следовательно, величина $\Sigma x_{0i} \text{ уст}$ для начала интервала времени Δt всегда известна из предыдущих построений (или начальных условий) и заданного во времени внешнего воздействия. Если использовать статическую характеристику (15.29), построенную при одинаковом масштабе по осям в системе координат (рис. 15.7, а), то, откладывая по оси абсцисс величину $\Sigma x_{0i} \text{ уст}$ (точка 1) и проводя луч под углом α_i до пересечения со стати-

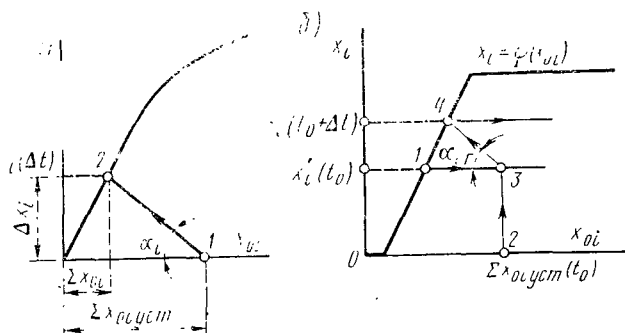


Рис. 15.7

ческой характеристикой, получим в точке пересечения (точка 2) значение x_i , определяемое предыдущим значением x'_i и приращением Δx_i . Для указанного на рис. 15.7, а интервала Δt начальное значение x'_i равно нулю, поэтому для $t = \Delta t$ значение $x_i = \Delta x_i$ определяется суммарным текущим значением входных воздействий Σx_{0i} . Из рис. 15.7, а видно, что левая часть (15.31) действительно составляет тангенс угла наклона, который определяется выбранным интервалом времени Δt и параметрами элемента, входящими в коэффициент A_i . В том случае, когда статическая характеристика элемента (15.29) построена при разных масштабах по осям координат, геометрический угол наклона следует определять с учетом масштабов для x_i и x_{0i} , поскольку числитель и знаменатель левой части (15.31) необходимо разделить на масштабные коэффициенты:

$$\operatorname{tg} \alpha_{ir} = \frac{\Delta t}{A_i} \cdot \frac{m[x_{0i}]}{m[x_i]},$$

где $m[x_{0i}]$ и $m[x_i]$ — масштабы по осям координат.

Чтобы воспользоваться при построениях для любого начального значения x'_i уравнением (15.30), необходимо через точку на статической характеристике соответственно значению x'_i в момент времени t_0 (точка 1) провести горизонталь — линию начального состояния (рис. 15.7, б). Далее из точки на оси абсцисс, соответствующей

известному суммарному установившемуся значению входных воздействий $\Sigma x_{0i \text{ уст}}$ (точка 2), проведем вертикаль до пересечения с линией начального состояния (точка 3). Из полученной точки под углом $\alpha_{i\Gamma}$ проведем луч до пересечения со статической характеристикой (точка 4). Значение выходной переменной x_i , определяемой этой точкой, соответствует моменту времени $t_0 + \Delta t$. В результате аналогичных построений для других интервалов времени будет получена переходная характеристика элемента $x_i(t)$.

Здесь было рассмотрено построение только для одного элемента при заданных значениями $\Sigma x_{0i \text{ уст}}$ в моменты времени $t = 0$ и t_0 . Аналогичные построения выполняются для других элементов, статические характеристики которых наносятся в других координатных осях (квадрантах). Углы построения $\alpha_{i\Gamma}$ для каждого элемента определяются тем же значением Δt (для всех элементов одинаковый интервал времени) своими значениями A_i и масштабами по осям. Взаимосвязь между квадрантами (координатными осями), содержащими статические характеристики, устанавливается на основании принципиальной схемы автоматической системы. Обратные связи отражаются в виде прямых (линейные) или кривых (нелинейные) линий, нанесенных в квадранте данного элемента. Линии обратных связей связаны с тем квадрантом, выходная переменная элемента которого используется для осуществления обратной связи.

Метод секущих. Этот метод основан на свойстве равномерного затухания экспоненты. Кривая переходного процесса в этом случае определяется с помощью построения секущих к кривой $x(t)$ в интервалах времени Δt , поэтому метод называется *методом секущих*.

Дифференциальные уравнения системы в данном случае приводятся к эквивалентным n уравнениям первого порядка. Внешнее воздействие $f(t)$ при построениях используется в виде графика. Поэтому, рассматривая несколько равноотстоящих друг от друга моментов времени t_k , $t_k + \Delta t$, $t_k + 2\Delta t$, ..., можно установить, что отношения значений функций на участке переходного процесса для смежных моментов равны друг другу (рис. 15.8, а):

$$\frac{x(t_k) - c}{x(t_k + \Delta t) - c} = \frac{x(t_k + \Delta t) - c}{x(t_k + 2\Delta t) - c} = \dots = e^{\Delta t/T}, \quad (15.32)$$

где T — постоянная времени, определяемая касательной к любой точке экспоненты.

Если через точки A и B , отстоящие друг от друга на Δt , провести секущую по линии установившегося состояния (точка D), то из подобия треугольников AFD и BED запишем пропорцию:

$$ED/FD = BE/AF.$$

Учитывая (15.32) и обозначая $FD = T_c$, получим

$$\frac{T_c - \Delta t}{T_c} = e^{-\Delta t/T},$$

откуда

$$T_c = \frac{\Delta t}{1 - \exp(-\Delta t/T)}. \quad (15.33)$$

Разлагая знаменатель в ряд, запишем

$$1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{T}\right) = \left[\frac{\Delta t}{T} - \frac{1}{2!}\left(\frac{\Delta t}{T}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\Delta t}{T}\right)^3 - \dots\right]. \quad (15.34)$$

Подставляя (15.34) в (15.33) и выполняя деление, найдем

$$T_c = T \cdot \left[\frac{\Delta t}{2} \left[1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{\Delta t}{T} - 360 \left(\frac{\Delta t}{T} \right)^3 + \dots \right] \right],$$

или приближенно

$$T_c \approx T + \Delta t/2. \quad (15.35)$$

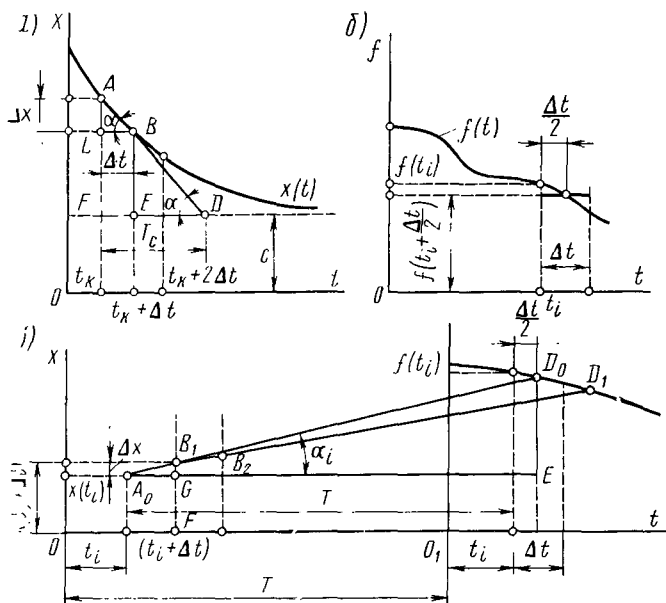


Рис. 15.8

используя подобные треугольники ALB и AFD , получим см. рис. 15.8, а):

$$AL/BL = AF/FD,$$

где $AL = \Delta x$; $BL = \Delta t$;

$$AF = x(t) - c; \quad FD = T_c,$$

поэтому

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t) - c}{T_c}.$$

С учетом (15.35) окончательно получим

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{c - x(t)}{T + \Delta t/2} \operatorname{tg} \alpha. \quad (15.36)$$

Это выражение соответствует постоянному во времени внешнему воздействию $f(t) = \text{const}$, когда неоднородное линейное дифференциальное уравнение имеет вид

$$T dx/dt + x = c. \quad (15.37)$$

Для переменного во времени внешнего воздействия $f(t)$ неоднородное дифференциальное уравнение представится как

$$T dx/dt + x = f(t). \quad (15.38)$$

Полагая, что Δt относительно малое число, заменим в пределах Δt функцию $f(t)$ постоянным числом (рис. 15.8, б), равным $f(t_i + \Delta t/2)$. Тогда вместо (15.38) на каждом интервале Δt будет справедливо уравнение вида (15.37). Поскольку в данном случае $c = f(t_i + \Delta t/2)$, то вместо (15.36) решением уравнения (15.38) на интервалах Δt будет:

$$\frac{\Delta x_i}{\Delta t} \approx \frac{f(t_i + \Delta t/2) - x(t_i)}{T + \Delta t/2} = \text{tg } \alpha_i. \quad (15.39)$$

На основании (15.39) Δx можно определить аналитически или графически.

Рассмотрим графическое построение, позволяющее получить $x(t)$ и являющееся решением уравнения (15.38). Известно, что $\Delta x_i = x(t_i + \Delta t) - x(t_i)$.

При этом вместо (15.39) получим

$$x(t_i + \Delta t) = x(t_i) + \Delta t \cdot \text{tg } \alpha_i. \quad (15.40)$$

Так как приращение [см. (15.39)]

$$\Delta x_i = \Delta t \cdot \text{tg } \alpha_i, \quad (15.41)$$

по заданным $f(t)$, Δt , T и начальным значениям $x(t_i)$ и $f(t_i)$ можно определить угол α_i (рис. 15.8, в) и вычислить Δx .

На рис. 15.8, в показана система координат для $x(t)$ и $f(t)$. Причем из-за того, что в знаменателе (15.39) стоит сумма $T + \Delta t/2$, ось ординат для $f(t)$ смещена вправо на отрезок T .

Если при t_i отложить $x(t_i)$, т. е. найти точку A_0 , и $f(t_i + \Delta t/2)$, т. е. найти точку D_0 , то угол наклона луча $A_0 D_0$ будет равен α_i :

$$\text{tg } \alpha_i = \frac{D_0 E}{A_0 E} = \frac{f(t_i + \Delta t/2) - x(t_i)}{T + \Delta t/2},$$

что соответствует (15.39).

Величины Δx_i и $x(t_i + \Delta t)$ графически определяются после проведения вертикали, проходящей через абсциссу $(t_i + \Delta t)$. Ордината FB_1 равна искомому значению $x(t_i + \Delta t)$, а отрезок $B_1 G$ равен Δx_i . Если теперь точку B_1 принять за исходную и определить значение $f(t_i + \Delta t) + \Delta t/2 = f(t_i + 3\Delta t/2)$, т. е. найти точку D_1 , то в результате аналогичных построений будем иметь точку B_2 и т. д. Точность построения тем выше, чем меньше интервал Δt . Для удобства построений на график наносятся вертикальные линии, проходящие на расстоянии $\Delta t/2$ друг от друга; интервал следует выбирать так, чтобы $2T/\Delta t$

было целым числом. Проводя лучи $A_i D_i$, найдем точки пересечения B_i с вертикалями, соответствующими Δt_i ; соединяя точки B_i плавной кривой, получим график переходного процесса $x(t)$.

Так как автоматическая система содержит несколько элементов, то можно записать несколько взаимосвязанных уравнений первого порядка. Соответственно этим уравнениям строятся графики в нескольких координатных системах, имеющих единую ось абсцисс (ось времени t) и несколько осей ординат, сдвинутых вправо на расстояния, определяемые постоянными времени элементов.

В случае использования внутренних обратных связей и наличия нелинейностей дифференциальные уравнения типа (15.38) приводятся к такому виду, что в правой части находится нелинейная функция $\Phi(t, x, \dots)$:

$$T dx/dt + x = \Phi(t, x, \dots). \quad (15.42)$$

Для графических построений переходных процессов соответственно (15.42) необходимо в осях координат Φ, t нанести точку, определяемую значениями t_i и $\Phi\left[t_i + \frac{\Delta t}{2}; x\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}\right), \dots\right]$.

§ 15.5. О расчете переходных процессов релейных систем

Как было установлено, из-за специфической особенности релейного элемента линейная часть системы подвержена воздействию прямоугольных импульсов постоянной высоты, знак, длительность и относительное расположение которых зависят и от внешнего воздействия и от состояния линейной части системы. Благодаря этому, исследование релейной системы в конечном итоге сводится к исследованию поведения линейной части системы при воздействии на нее указанных импульсов. С этой точки зрения релейные системы являются наиболее простой группой нелинейных систем.

Управляющее воздействие, являющееся выходом релейного элемента и поступающее на линейную часть системы, можно представить в виде суммы воздействий простейшего вида. Следовательно, переходный процесс релейной системы может быть найден путем суммирования реакций линейной части на эти простейшие воздействия. В установившемся периодическом процессе сигналы, поступающие на входы релейного элемента и линейной части системы, будут периодическими функциями времени, которые можно представить либо в виде периодически повторяющейся последовательности импульсов, либо в виде суммы гармонических составляющих ряда Фурье. Таким образом, при расчете переходных процессов реакции линейной части системы на эти простейшие составляющие суммируются.

Представим выходной сигнал двухпозиционного релейного элемента, имеющего однозначную характеристику $\phi(\sigma)$, в виде суммы скачкообразных функций

$$\begin{aligned} \phi(t) = & S \cdot 1(t) - 2S \cdot 1(t - t_1) + 2 \cdot S \cdot 1(t - t_2) - \\ & - 2S \cdot 1(t - t_3) + \dots \end{aligned} \quad (15.43)$$

Уравнение, определяющее переходный процесс на входе линейной части системы, в общем случае для свободного движения системы может иметь вид:

$$A(p) X(p) = B(p) \Phi(p) + C_0(p), \quad (15.44)$$

откуда

$$X(p) = \frac{B(p)}{A(p)} \Phi(p) + \frac{C_0(p)}{A(p)}, \quad (15.45)$$

где $C_0(p)$ — полином, учитывающий ненулевые начальные условия.

Представим (15.43) в операторной форме Лапласа

$$\Phi(p) = \frac{S}{p} (1 - 2e^{-pt_1} + 2e^{-pt_2} - 2e^{-pt_3} + \dots). \quad (15.46)$$

Подставляя (15.46) в (15.45) и вводя обозначение, запишем:

$$X(p) = X_1(p) (1 - 2e^{-pt_1} + 2e^{-pt_2} - 2e^{-pt_3} + \dots) + X_0(p); \quad (15.47)$$

$$X_1(p) = \frac{B(p)S}{p A(p)}; \quad X_0(p) = \frac{C_0(p)}{A(p)}. \quad (15.48)$$

Определяя оригиналы $x_1(t)$ и $x_0(t)$ обычными способами операторного метода, получим решения уравнения (15.47) по участкам в виде сумм функций:

для $0 \leq t \leq t_1$

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t); \quad (15.49a)$$

для $t_1 \leq t \leq t_2$

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t) - 2x_1(t - t_1); \quad (15.49б)$$

для $t_2 \leq t \leq t_3$

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t) - 2x_1(t - t_1) + 2x_1(t - t_2). \quad (15.49в)$$

.....

Остается найти величины $t_1, t_2, t_3, \dots$, определяющие моменты переключения реле. Так как для идеального двухпозиционного реле условием переключения реле является равенство нулю сигнала на входе реле [$\sigma(t) = 0$], то для замкнутой системы при свободном движении моменты переключения реле будут характеризоваться точками пересечения кривой $x(t)$ с осью абсцисс, что легко находится в процессе расчета. Для идеального реле при расчете учитываются условия переключения, определяемые шириной петли гистерезиса a .

§ 15.6. Особенности моделирования нелинейных систем

Нелинейные системы, так же как и линейные, можно исследовать методом моделирования на аналоговых вычислительных машинах* (АВМ). Рассмотрим схемы моделирования типовых нелинейных звеньев на АВМ (табл. 15.1).

* Вопрос о моделировании линейных автоматических систем был рассмотрен в § 12.4. В данном параграфе в дополнение к этому указаны особенности моделирования нелинейных звеньев.

Машинная схема	Нелинейность

Номер схемы	Машинная схема	Нелинейность
6		
7		
8		

Номер схемы	Машинная схема	Нелинейность
9		
10		
11		Произведение двух переменных

Идеальное реле. Схема модели идеального реле (п.1, табл. 15.1) состоит из операционного усилителя, охваченного нелинейной обратной связью, выполненной с помощью диодного ограничителя ДО.

Когда напряжение на входе $U_{вх} = 0$, то напряжение на выходе $U_{вых} = 0$, и диоды заперты опорными напряжениями U_1 и $-U_2$, создаваемыми внешним источником E . Поскольку обратная связь при запертых диодах отсутствует, коэффициент усиления k_1 операционного усилителя равен бесконечности. При этом появление сколь угодно малого напряжения на входе вызывает мгновенное изменение напряжения на выходе от 0 до $-U_2$ или $-U_1$ в зависимости от знака входного напряжения.

Усилитель с насыщением. Схема модели усилителя с насыщением (п. 2, табл. 15.1) отличается от схемы модели идеального реле наличием цепи обратной связи дополнительного сопротивления $R_{0.с}$.

До тех пор пока выходное напряжение не достигнет значений $\pm U_2$ и $-U_1$, операционный усилитель ведет себя как усилитель с коэффициентом усиления k_1 . При достижении выходным напряжением значений $\pm U_2$, $-U_1$ в цепь обратной связи включается нелинейное сопротивление, благодаря которому выходное напряжение ограничивается значениями $\pm U_2$ или $-U_1$ в зависимости от знака входного сигнала. Наклон линейного участка характеристики зависит от величины $R_{o.c.}$.

Усилитель с зоной нечувствительности. В отличие от предыдущих схем в этом случае диодные ограничители ДО ставятся не в цепь обратной связи, а во входную цепь (п. 3, табл. 15.1). В цепь обратной связи включается сопротивление $R_{o.c.}$, т. е. используется обычный масштабный усилитель.

Входное и выходное напряжения усилителя (напряжение после диодных ограничителей) будут равны нулю при $|U_1| \geq U_{вх} \leq U_2$. При $|U_1| \leq U_{вх} \geq U_2$ срабатывают диодные ограничители и модель ведет себя как масштабный усилитель. Наклон линейного участка характеристики зависит от величины $R_{o.c.}$.

Реле с характеристикой типа прямоугольной петли гистерезиса. Схема модели этого реле состоит из двух операционных усилителей Y_1 и Y_2 и диодных ограничителей ДО в цепи обратной связи выходного усилителя Y_2 (п. 4, табл. 15.1).

Выходной усилитель Y_2 срабатывает при $U'_{вх} \approx 0$. Напряжение $U'_{вх} = k_1 U_{вх} + k_2 U_{вмх}$. Приравняв $U'_{вх}$ нулю, получим значения $U_{вх}$ в моменты переключения реле:

$$U_{вх.п} = -(k_2/k_1) U_{вмх}.$$

Подставляя в это выражение значения $-U_1$ и U_2 , найдем

$$U_{вх.п} = -a_1 = -(k_2/k_1) U_2;$$

$$U_{вх.п} = a_2 = (k_2/k_1) U_1.$$

Из этих выражений видно, что ширина петли гистерезиса $a_1 \pm a_2$ модели реле зависит как от коэффициентов передачи, так и от величин опорных напряжений диодных ограничителей.

Нелинейность типа «люфт». Для моделирования люфта должны быть предусмотрены элементы, воспроизводящие зону нечувствительности, а также устройства, сохраняющие неизменным значение выходного сигнала при изменении направления входного сигнала, пока не будет выбран люфт.

В схеме модели (п. 5, табл. 15.1) в качестве элемента запоминания использован операционный усилитель с конденсаторами в цепи обратной связи C_2 и на входе C_1 .

Передаточная функция такого усилителя

$$K(p) = C_1 p' C_2 p = C_1 C_2.$$

При отключении входной цепи (диоды заперты) напряжение на выходе сохраняет свое предшествовавшее значение. Выходное напряжение в пределах зоны нечувствительности

$$U_{вых} = U_{вх} - U_1.$$

Усилитель с ограничением и с зоной нечувствительности. Трепозиционное реле. Схема модели этих элементов (п. 6, табл. 15.1) состоит из операционного усилителя с диодными ограничителями в цепи обратной связи DO_2 и на входе DO_1 . Кроме того, цепь обратной связи содержит сопротивление $R_{0.c}$.

При небольших величинах $R_{0.c}$ по сравнению с $R_{вх}$ имеем модель усилителя с ограничением и с зоной нечувствительности. При включении в цепь обратной связи сопротивления $R_{0.c}$ на порядок большего однократного сопротивления получим характеристику трехпозиционного реле.

Трехпозиционное реле с гистерезисом. Схема модели этого реле может быть составлена из двух схем моделей реле с характеристикой типа прямоугольной петли гистерезиса, сдвинутых относительно оси ординат с помощью напряжения смещения $U_{см}$ (п. 7, табл. 15.1).

После суммирования напряжений моделей реле с характеристиками типа прямоугольной петли гистерезиса получим искомую характеристику модели трехпозиционного реле.

Необходимо отметить, что такая модель не позволяет достаточно точно получить в области зоны нечувствительности напряжение, равное нулю.

Несколько лучшими в этом смысле данными обладает схема (п. 8, табл. 15.1), состоящая из модели трехпозиционного реле (п. 6, табл. 15.1), охваченного положительной обратной связью.

Достоинством этой схемы является использование меньшего числа операционных усилителей. При этом $R_{0.c2} \gg R_{вх}$, а величины U'_1 и U''_2 зависят от U_1 , U'_1 и U_2 , U'_2 соответственно.

Звено запаздывания в сочетании с релейным элементом. Схема модели звена запаздывания в сочетании с релейным элементом (п. 9, табл. 15.1) состоит из модели релейного элемента, интегратора, состоящего из усилителя U_2 с диодными ограничителями DO_2 и емкостью C_2 в цепи обратной связи и модели реле с характеристикой типа прямоугольной петли гистерезиса. Запаздывание создается интегратором и зависит от величин U' , C_2 и k_2 .

Моделирование гладких нелинейностей. При этом применяются специальные блоки, содержащие набор диодных ограничителей (п. 10, табл. 15.1). Так, в машинах МН-7 имеются нелинейные блоки типа БН-10.

На два входа (1 и 3) блока БН-10 подается входной сигнал, причем на вход 1 подается непосредственно входной сигнал, а на вход 3 — входной сигнал после инвертора U_1 . Входы 2 и 4 при этом не используются. Выход блока включается в цепь обратной связи усилителя U_2 .

Пусть задана нелинейная характеристика (рис. 15.9) в относительных единицах. Допустим, что максимальная величина входа $X_{вх} = \pm 1,4$, а выхода $X_{вых} = \pm 2,0$. В качестве базового напряжения операционного усилителя выбираем 100 в. По этим данным найдем масштабные коэффициенты

$$M_{вх} = X_{вх.макс} / 100 = 1,4 \cdot 10^{-2} \text{ в/в;}$$

$$M_{вых} = X_{вых.макс} / 100 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ в/в.}$$

Используя масштабные коэффициенты, строим психодную нелинейную зависимость в координатах входного и выходного напряжения (рис. 15.10). Затем аппроксимируем непрерывную кривую участками прямых линий. Отсчет ведем от начала координат.

Для $X_{вх} > 0$ граница первого участка будет при $U_{вх} = 16,2$ в и $U_{вых} = 15$ в.

В точке первого излома и в последующих точках проводим новую координатную систему, для которой осью абсцисс служит линия, являющаяся продолжением линейного участка кривой, а осью ординат — линия, перпендикулярная к оси абсцисс. Отмечаем, в какой из четырех квадрантов (I—IV) новой координатной системы попадает

участок следующей аппроксимации. Так, первый и второй участки аппроксимации находятся в квадранте I, третий и четвертый — в квадранте IV. Для каждой точки излома указываем напряжения входа и выхода.

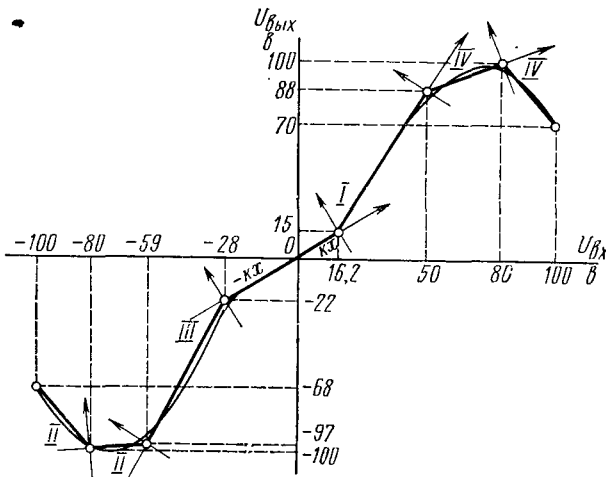


Рис.15.10

Аналогично аппроксимируем и разбиваем на квадранты кривую при $U_{вх} < 0$. Отметим, что оси абсцисс новых координат в этом случае должны быть направлены в сторону начала основной системы координат.

Далее выбираем определенные ячейки нелинейного блока, воспроизводящие соответствующие участки характеристики, знак началь-

ного значения функции $+F(0)$ или $-F(0)$, а также знак начального участка функции $-kx$ или $-kx$.

Моделирование произведения двух функций. Такое моделирование осуществляется также с помощью специальных блоков. Так, в машине МН-7 для этого служат блоки БП-4. В отличие от блока БН-10 на блок БП-4 подаются четыре входных сигнала. Два из них являются непосредственно входными величинами, а два других — входными величинами с обратными знаками. Схема включения блока БП-4 показана в табл. 15.1 (п. 11).

При моделировании произведения необходимо иметь в виду, что

$$U_{\text{вых}} = U_{\text{вх1}} U_{\text{вх2}} / 100.$$

Используя модели типовых нелинейностей, по заданным дифференциальным уравнениям системы можно составить структурную схему набора задачи на модели и получить переходный процесс нелинейной системы. Осциллографируя переходные процессы модели при различных значениях параметров и при различных сигналах на входе системы (или внешних воздействиях), можно выполнить достаточно полное исследование нелинейной системы.

Пример 15.1. Рассмотрим моделирование системы автоматического регулирования скорости вращения двигателя (см. рис. 4.2) с учетом нелинейности характеристики электронного усилителя (учитывается ограничение выходного сигнала). В примере 12.7 было рассмотрено моделирование системы без учета нелинейности.

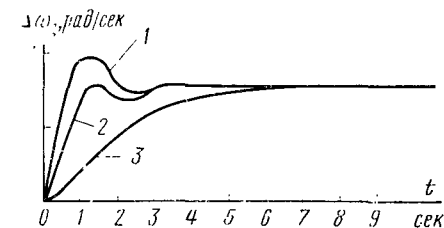


Рис. 15.12

На рис. 15.12 показаны кривые переходного процесса скорректированной системы с учетом последовательного корректирующего устройства КУ (см. рис. 12.22), включенного на рис. 12.21 после модели электронного усилителя: 1 — для линейной системы; 2 — для системы с ограничением сигнала ЭУ $\Delta U_{\text{э.у.макс}} = 5 \Delta U_{\text{э.у.уст}}$; 3 — для системы с ограничением сигнала ЭУ $\Delta U_{\text{э.у.макс}} = 2,5 \Delta U_{\text{э.у.уст}}$.

Ограничение выходного сигнала ЭУ приводит к замедлению переходного процесса, а также к уменьшению амплитуды колебаний нескорректированной системы и перерегулирования в скорректированной системе.

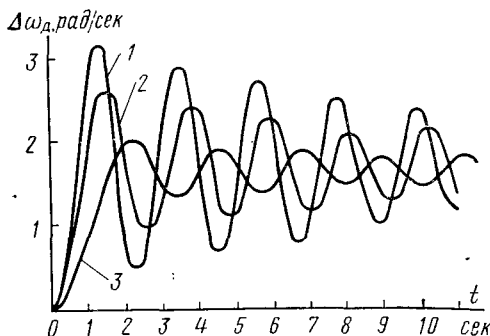


Рис. 15.11

В данном случае (см. рис. 12.21) используется диодный ограничитель ДО в цепи обратной связи модели электронного усилителя (см. п. 2, табл. 15.1).

На рис. 15.11 показаны кривые переходного процесса нескорректированной системы при управляющем воздействии $\Delta U_{\text{э}}$: 1 — для линейной системы; 2 — для системы с ограничением сигнала ЭУ $\Delta U_{\text{э.у.макс}} = 5 \Delta U_{\text{э.у.уст}}$; 3 — для системы с ограничением сигнала ЭУ $\Delta U_{\text{э.у.макс}} = 2,5 \Delta U_{\text{э.у.уст}}$.

Вопросы для самопроверки

1. Как определить показатели качества переходных процессов по фазовому портрету?
2. В каких случаях можно строить кривую переходного процесса по методу Е. П. Попова?
3. Как построить кривую свободной составляющей процесса по диаграмме качества нелинейной системы?
4. В чем состоит особенность расчета переходных процессов методом численного интегрирования?
5. Объясните сущность построений кривой переходного процесса графоаналитическими методами.
6. Как моделируются переходные процессы нелинейных автоматических систем?
7. Изобразите схему модели звена с ограничением выходного сигнала.
8. Нарисуйте схему модели звена с зоной нечувствительности.
9. Составьте схему модели релейного двухпозиционного элемента.
10. Как получить модель релейного трехпозиционного элемента?
11. Изобразите схему модели люфта.
12. Каким образом моделируются непрерывные нелинейные характеристики?

ОСНОВНЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Импульсные автоматические системы в отличие от непрерывных систем работают на импульсных сигналах определенной периодичности. Импульсы характеризуются периодом повторения (цикла) $T_{\text{ц}}$, высотой импульса $h_{\text{и}}$, длительностью $\gamma T_{\text{ц}}$, полярностью и моментом начала импульса. Импульсные системы обычно представляют собой соединение импульсного элемента и некоторой непрерывной части системы. Устройство, формирующее последовательность импульсов, определяемую непрерывным входным сигналом, называется *импульсным элементом*.

Изменение любого параметра импульсов (высоты, длительности, периода повторения) в зависимости от входного сигнала называется *модуляцией* импульсов входным сигналом.

Импульсные системы могут быть как линейными, так и нелинейными. В данном разделе рассматриваются только линейные импульсные системы.

Глава 16

АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

Динамику импульсной автоматической системы можно рассматривать в виде реакции непрерывной части системы на серию импульсов, чередующихся с заданным периодом. Конечные значения переменных для предыдущего цикла являются начальными для последующего цикла и т. д. Зная закон изменения внешнего воздействия, приведенного ко входу импульсного элемента, можно определить форму импульсов, поступающих на вход непрерывной части системы, и рассчитать переходный процесс на всем промежутке регулирования. Однако этот метод не позволяет исследовать устойчивость системы в целом и оценить влияние параметров на динамику системы.

Для устранения указанного недостатка было предложено контролировать процесс регулирования не непрерывно во времени, а дискрет-

но один раз за период, например, в момент начала каждого цикла. В связи с этим в работах П. Е. Жуковского и Хорта для исследования импульсных систем регулирования был применен аппарат дифференциально-разностных уравнений. В последние годы для исследования импульсных автоматических систем используются дискретное преобразование Лапласа и частотный метод, позволяющий применять известные в линейной теории методы анализа [Л.43].

§ 16.1. Классификация импульсных элементов и систем

Импульсные элементы классифицируются обычно в зависимости от характера модуляции импульсов.

К первому типу импульсных элементов относятся элементы, преобразующие непрерывный входной сигнал в последовательность импульсов, высота которых пропорциональна значениям его входной переменной в моменты съема (рис. 16.1). Такие элементы яв-

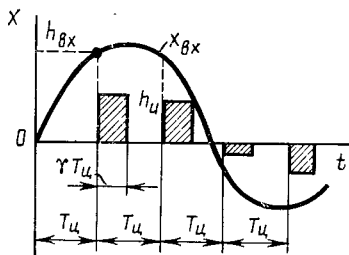


Рис. 16.1

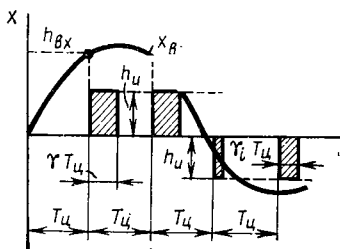


Рис. 16.2

ляются *амплитудно-импульсными модуляторами (АИМ)*. Длительности импульсов γT_u представляет собой рабочий интервал; обычно в течение этого промежутка времени автоматическая система замкнута и находится под действием импульса. При этом $0 \leq \gamma \leq 1$ — скважность импульсов, характеризующая отношением длительности импульса к периоду T_u . Интервал между соседними импульсами называется *паузой*, в течение которой автоматическая система разомкнута. Для импульсного элемента первого типа характерно постоянство длительности импульсов при постоянном периоде повторения, поэтому скважность импульсов $\gamma = \text{const}$. Коэффициент усиления импульсного элемента $k_{н.з}$ представляет собой отношение высоты импульса h_u к входной величине в моменты съема $h_{\theta x}$. Импульсный элемент первого типа обычно является линейным усилителем и его характеристика $h_u = f(h_{\theta x}) = k_{н.з} h_{\theta x}$ линейна.

Ко второму типу импульсных элементов относятся элементы, преобразующие непрерывный входной сигнал в последовательность импульсов, длительность которых пропорциональна значениям его входной переменной в моменты съема (рис. 16.2). Такие элементы называются *широотно-импульсными модуляторами (ШИМ)*. В-

сота и периодичность импульсов здесь неизменны, а скважность γ изменяется на каждом периоде повторения импульсов.

Кроме указанных двух основных типов импульсных элементов существуют такие, которые преобразуют непрерывную входную переменную в последовательность импульсов постоянной высоты и длительности, но с различными знаками, зависящими от полярности входного сигнала. Имеются также импульсные элементы типа ключа или прерывателя, на выходе которых сигнал имеет прямоугольную форму (рис. 16.3). Более полная классификация импульсных элементов приведена в [Л.43]. Импульсные элементы, амплитуда и длительность рабочего импульса которых неизменны, называются *элементами I рода*. Если амплитуда или длительность рабочего импульса изменяется в течение действия импульса, то импульсные элементы называются *элементами II рода* (рис. 16.3).

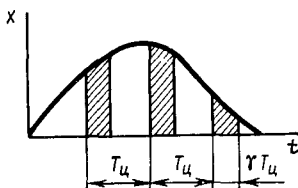


Рис. 16.3

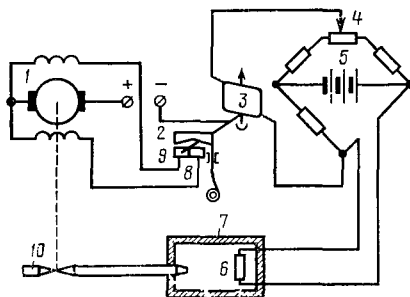


Рис. 16.4

Импульсные элементы могут различаться также по конструктивному исполнению (механические, электромеханические, электрические и электронные).

Указанные основные типы импульсных элементов определяют основные классы и особенности работы импульсных автоматических систем.

Импульсные системы делятся на системы с АИМ (I типа) и системы с ШИМ (II типа), которые могут быть как I рода, так и II рода.

Рассмотрим принципиальную схему импульсной системы стабилизации температуры (рис. 16.4). Температура печи 7 (управляемый объект) измеряется термометром сопротивления 6, являющимся одним из плеч моста 5. В диагональ моста включен гальванометр 3 с падающей дужкой 2. При изменении температуры печи стрелка гальванометра отклоняется и падающая дужка прижимает ее к контактам 8 или 9, замыкая цепь исполнительного двигателя 1. В результате его вращения меняется положение клапана 10, регулирующего подачу топлива (или теплоносителя). Заданное значение выходной переменной (температуры), которое должно поддерживаться регулятором, устанавливается задатчиком температуры 4. Двигатель, а следовательно, и клапан управляются импульсами, формируемыми импульсным элементом второго типа, коэффициент усиления которого может достигать величины $\approx 10^4$. В случае необходимости может быть введено корректирующее устройство любого типа — механическое, электромеханическое, электрическое, термоэлектрическое и т. д.

Импульсный элемент может быть в прямой цепи или в цепи обратной связи. Обычно структурную схему приводят к виду схемы с эквивалентной непрерывной частью и импульсным элементом. Импульсные системы могут быть замкнутыми и разомкнутыми с последовательным соединением импульсного элемента и непрерывной части системы.

§ 16.2. Об особенностях исследования динамики импульсных систем

Динамика импульсных систем может быть охарактеризована дифференциально-разностными уравнениями.

Выходная переменная импульсного элемента I типа:

$$x_{\text{вых}} = k_{\text{и.э}} x_{\text{вх}} \quad \text{при} \quad k_{\text{и.э}} = \text{const}; \quad \gamma = \text{const}.$$

Для n -го периода уравнение импульсного элемента первого типа записывается в следующем виде:

$$\text{при } nT_{\text{ц}} \leq t \leq nT_{\text{ц}} + \gamma T_{\text{ц}}$$

$$x_{\text{вых}} = k_{\text{и.э}} x_{\text{вх}}; \quad (16.1a)$$

$$\text{при } nT_{\text{ц}} + \gamma T_{\text{ц}} < t < (n+1)T_{\text{ц}}$$

$$x_{\text{вых}} = 0. \quad (16.1б)$$

Зависимости вида (16.1a) и (16.1б) характеризуют импульсы на выходе элемента.

32 Составление расчетной схемы импульсной системы. При исследовании импульсных систем исходную структурную схему следует привести к расчетной; в ней импульсный элемент представлен в виде двух

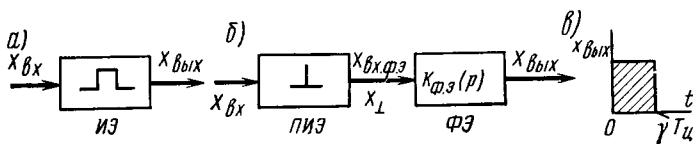


Рис. 16.5

частей — простейшего импульсного элемента ПИЭ и формирующего элемента ФЭ. Первая часть позволяет ввести фиктивные мгновенные импульсы $x_{\perp}$ бесконечно малой длительности (существуют только в моменты времени $nT_{\text{ц}}$ и равны нулю в другие моменты), равные по высоте величине входного сигнала импульсного элемента в дискретные моменты счема. Формирующий элемент представляется таким эквивалентным непрерывным элементом, который превращает мгновенные фиктивные импульсы в импульсы заданной формы, соответствующей выходным импульсам реального импульсного элемента системы. Если, например, импульсный элемент имеет на выходе импульсы прямоугольной формы (рис. 16.5, а), то формирующий элемент должен преобразовывать мгновенные импульсы в импульсы заданной прямоугольной формы (рис. 16.5, б).

Обычно рассматриваемые импульсные элементы имеют прямоугольную форму выходных импульсов. Для прямоугольного импульса на выходе импульсного элемента первого типа (рис. 16.5, в)

$$x_{\text{вых}}(t) = k_{\text{и.э}} [x_{\text{вх}}(t) - x_{\text{вх}}(t - \gamma T_{\text{ц}})], \quad (16.2)$$

где $x_{\text{вх}}(t)$ — значение входного сигнала в момент съема.

Уравнение (16.2) справедливо для любого n -го импульса.

Если применить преобразование Лапласа, то вместо (16.2) запишем

$$X_{\text{вых}}(p) = k_{\text{и.э}} [1 - \exp(-p\gamma T_{\text{ц}})] X_{\text{вх}}(p). \quad (16.3)$$

Выходная переменная формирующего элемента должна соответствовать выходной переменной импульсного элемента:

$$X_{\text{ф.э}}(p) = X_{\text{вых}}(p). \quad (16.4)$$

Выходная переменная формирующего элемента является импульсной переходной функцией для сигналов $x_{\perp}$, поэтому передаточная функция формирующего элемента $K_{\text{ф.э}}^I(p)$ равна изображению выходной переменной $X_{\text{ф.э}}(p)$:

$$K_{\text{ф.э}}^I(p) = X_{\text{ф.э}}(p). \quad (16.5)$$

Используя (16.3) — (16.5), получим передаточную функцию формирующего элемента, соответствующего импульсному элементу с АИМ (I типа) при $X_{\text{вх}}(p) = 1/p$:

$$K_{\text{ф.э}}^I(p) = k_{\text{и.э}} [1 - \exp(-p\gamma T_{\text{ц}})]/p. \quad (16.6)$$

Для других типов импульсных элементов формирующий элемент будет отличаться от полученного в данном случае. Так, для импульсного элемента второго типа,

например, формирующий элемент является нелинейным. Таким образом, структурная схема импульсной системы, приведенная к расчетной схеме, состоит из простейшего им-

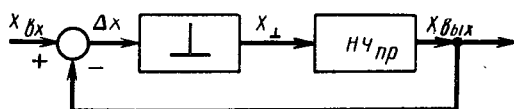


Рис. 16.6

пульсного элемента ПИЭ и приведенной непрерывной части НЧ, в которую входит формирующий элемент и линейная часть системы (рис. 16.6).

Понятие о ретчатой функции. Непрерывная функциональная зависимость может быть представлена так называемой *ретчатой функцией* $f[nT_{\text{ц}}]$, значения которой изменяются только в дискретные моменты времени через период цикла $T_{\text{ц}}$. Между этими значениями ретчатая функция равна нулю (рис. 16.7, а).

В общем случае одна и та же ретчатая функция может соответствовать различным непрерывным и разрывным функциям, если только их ординаты в дискретные моменты времени $t = nT_{\text{ц}}$ равны значениям (дискретам) ретчатой функции (рис. 16.7, б). Таким образом, ретчатая функция не может полностью отразить свойства непрерывной

функции, которую она представляет. Обычно используется понятие *смещенной решетчатой функции*, в которой $t = nT_{\Pi} + \Delta t$, когда дискретные значения функции выбираются для смещенных на Δt относительно nT_{Π} моментов времени. Если параметр Δt изменять непрерывно от 0 до T_{Π} , то решетчатая функция становится тождественной определенной непрерывной функции.

Часто оказывается удобным считать расстояние между дискретными значениями функции равным единице. При этом вводится понятие

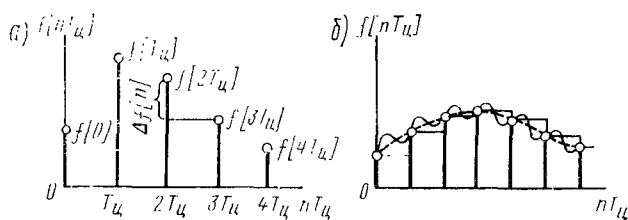


Рис. 16.7

об относительной переменной времени $\bar{t} = t/T_{\Pi} = n$, а решетчатая функция представляется в виде функции $f[n]$. Для смещенной решетчатой функции

$$\bar{t} = \frac{nT_{\Pi}}{T_{\Pi}} + \frac{\Delta t}{T_{\Pi}} = n + \varepsilon,$$

где ε — параметр смещения в относительной форме.

Следовательно, смещенная решетчатая функция представляется в виде функции $f[n, \varepsilon]$. Если Δt изменять от 0 до T_{Π} , то ε будет изменяться от 0 до 1.

Скорость изменения решетчатой функции характеризуется разностью первого порядка, которая является аналогом производной непрерывной функции времени.

Разность первого порядка (первая разность) решетчатой функции $f[n]$:

$$\Delta f[n] = f[n+1] - f[n]. \quad (16.7)$$

Геометрически первая разность представляет собой разность между последующей $[(n+1)\text{-й}]$ и предыдущей $(n\text{-й})$ ординатами решетчатой функции (см. рис. 16.7, а).

Разность второго порядка (вторая разность) решетчатой функции $f[n]$:

$$\Delta^2 f[n] = \Delta f[n+1] - \Delta f[n]. \quad (16.8)$$

После подстановки значений первых разностей получим

$$\Delta^2 f[n] = f[n+2] - 2f[n+1] + f[n]. \quad (16.9)$$

Разность k -го порядка определяется рекуррентным соотношением

$$\Delta^k f[n] = \Delta^{k-1} f[n+1] - \Delta^{k-1} f[n], \quad (16.10)$$

или, в общем виде,

$$\Delta^k f[n] = \sum_{v=0}^k (-1)^v \binom{k}{v} f[n+k-v], \quad (16.11)$$

где $\binom{k}{v} = \frac{k!}{v!(k-v)!}$ — биномиальные коэффициенты.

Сумма решетчатой функции

$$\sum_{m=0}^{n-1} f[m] = \sum_{m=1}^n f[n-m] \quad (16.12)$$

является аналогом интеграла непрерывной функции.

Составление разностных уравнений. Соотношение между решетчатой функцией и ее разностями различных порядков определяет уравнение в конечных разностях, или *разностное уравнение*. Если такое соотношение линейно, то разностное уравнение называется *линейным*. Разностное уравнение может быть также и с переменными во времени коэффициентами, и нелинейным. Соответственно этому импульсные системы разделяются на линейные, нелинейные и системы с переменными параметрами [Л.16].

После составления разностного уравнения для импульсного элемента необходимо все уравнения остальных элементов системы привести также к разностной форме.

Предположим, что задана система уравнений импульсной системы для объекта, датчика, обратной связи и импульсного элемента соответственно:

$$\left. \begin{aligned} T_0 \frac{d\varphi}{dt} + \varphi &= \mu - \lambda; \\ \delta\eta - \varphi &= 0; \\ \sigma &= x_{\text{вх}} - \eta; \\ \mu[n+1] &= \mu[n] + k_{\text{и.э.}} \sigma[n]. \end{aligned} \right\} \quad (16.13)$$

В данном случае динамика импульсного элемента определяется разностным уравнением первого порядка. Первые три уравнения следует привести к разностной форме. Второе и третье уравнения являются алгебраическими, поэтому их переменные можно записать в форме решетчатых функций, которые эквивалентны соответствующим непрерывным функциям:

$$\left. \begin{aligned} \delta\eta[n] - \varphi[n] &= 0; \\ \sigma[n] &= x_{\text{вх}}[n] - \eta[n]. \end{aligned} \right\} \quad (16.14)$$

Дифференциальное уравнение объекта, в котором полагаем $\lambda = 0$ и для начала цикла ($t = 0$) заменяем μ на $\mu[n]$ и φ на $\varphi[n]$, позволяет получить значение $\varphi[n+1]$ в конце цикла ($t = T_0$). При этом сначала находится решение дифференциального уравнения объекта

$$T_0 \frac{d\varphi}{dt} + \varphi = \mu$$

в виде суммы свободной и вынужденной составляющих:

$$\varphi = \varphi_{\text{вын}} + \varphi_{\text{св}}.$$

Вынужденная составляющая определяется правой частью:

$$\varphi_{\text{вын}} = \mu;$$

а свободная составляющая — однородным уравнением

$$T_0 d\varphi/dt + \varphi = 0,$$

откуда

$$\varphi_{\text{св}} = C e^{-t/T_0}.$$

Следовательно,

$$\varphi = \mu + C e^{-t/T_0}. \quad (16.15)$$

Постоянная интегрирования C находится из начальных условий при $t = 0$ с учетом $\varphi = \varphi[n]$ и $\mu = \mu[n]$ [см. (16.15)]:

$$\varphi[n] = \mu[n] + C,$$

откуда

$$C = \varphi[n] - \mu[n].$$

Таким образом, вместо (16.15) можно записать

$$\varphi = \mu[n] + (\varphi[n] - \mu[n]) e^{-t/T_0}. \quad (16.16)$$

Чтобы окончательно определить выражение разностного уравнения объекта, необходимо в (16.16) подставить предел $t = T_{\text{ц}}$ и принять в левой части

$$\varphi[n+1] = \mu[n] + (\varphi[n] - \mu[n]) e^{-T_{\text{ц}}/T_0}$$

или

$$\varphi[n+1] - \varphi[n] e^{-T_{\text{ц}}/T_0} = \mu[n] - \mu[n] e^{-T_{\text{ц}}/T_0}. \quad (16.17)$$

Разностное уравнение (16.17) означает, что непрерывная функция на выходе объекта заменена эквивалентной решетчатой функцией.

После совместного решения уравнений импульсного элемента [см. (16.13)] и уравнений (16.14) и (16.17) получим общее разностное уравнение импульсной автоматической системы.

В общем случае разностное уравнение m -го порядка импульсной автоматической системы записывается в виде

$$\begin{aligned} a_0 \Delta^m x[n] + a_1 \Delta^{m-1} x[n] + \dots + a_m x[n] = \\ = b_0 \Delta^k f[n] + b_1 \Delta^{k-1} f[n] + \dots + b_h f[n] \end{aligned} \quad (16.18)$$

или

$$\begin{aligned} a'_0 x[n+m] + a'_1 x[n+m-1] + \dots + a'_m x[n] = \\ = b'_0 f[n+k] + b'_1 f[n+k-1] + \dots + b'_k f[n]. \end{aligned} \quad (16.19)$$

Следует указать, что в пределе при $T_{\text{ц}} \rightarrow 0$ разностное уравнение (16.18) переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} A_0 \frac{d^m x(t)}{dt^m} + A_1 \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + A_m x(t) = \\ = B_0 \frac{d^k f(t)}{dt^k} + B_1 \frac{d^{k-1} f(t)}{dt^{k-1}} + \dots + B_k f(t), \end{aligned} \quad (16.20)$$

где

$$A_i = \lim_{T_{\text{ц}} \rightarrow 0} [T_{\text{ц}}^i a_i]; \quad B_i = \lim_{T_{\text{ц}} \rightarrow 0} [T_{\text{ц}}^i b_i]. \quad (16.21)$$

Дифференциально-разностное уравнение импульсной автоматической системы вида (16.19) полностью определяет динамику импульсной системы в пределах каждого n -го цикла.

§ 16.3. Исследование устойчивости системы непосредственно по разностному уравнению

Устойчивость линейных импульсных автоматических систем по аналогии с непрерывными системами определяется свойствами свободных колебаний, зависящих от корней характеристического уравнения.

В отличие от решения обыкновенного однородного дифференциального уравнения вида

$$x_{\text{св}} = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t},$$

решение однородного дифференциально-разностного уравнения представляется как

$$x_{\text{св}}[n] = \lambda^n, \quad (16.22)$$

где λ — корень характеристического уравнения.

Подставив (16.22) в левую часть (16.19), с учетом $x[n+1] = \lambda^{n+1}$ получим характеристическое уравнение импульсной системы после сокращения на λ^n :

$$a_0 \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_m = 0. \quad (16.23)$$

Свободная составляющая (16.22) при этом стремится к нулю (устойчивая система), если $|\lambda| < 1$ и число циклов n стремится к бесконечности (аналогично непрерывному регулированию, когда $t \rightarrow \infty$). Следовательно, условия устойчивости импульсной системы запишется в виде

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{\text{св}}[n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n \rightarrow 0. \quad (16.24)$$

Процесс (16.24) будет затухающим монотонным для положительных λ_i и колебательным для отрицательных λ_i (рис. 16.8, а). Если же $|x_{\text{св}}[n]| \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то система неустойчива. При этом возможна и монотонная, и колебательная неустойчивость. Если один из кор-

ней λ_i по модулю больше единицы и положительный, то неустойчивость колебательна, так как λ_i^n возрастает по модулю и имеет положительное значение при четных n и отрицательное — при нечетных n (рис. 16.8, б).

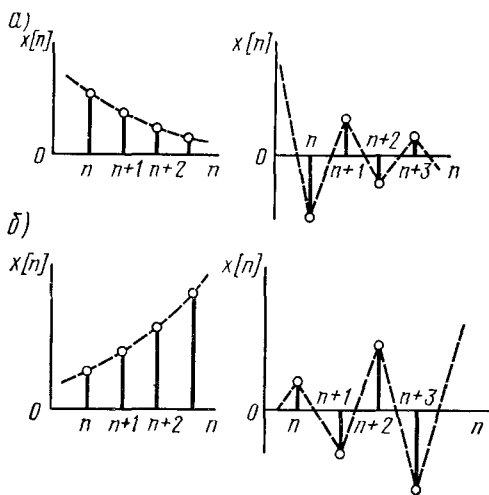


Рис. 16.8

Для устойчивости импульсной автоматической системы необходимо и достаточно, чтобы все корни λ характеристического уравнения (16.23) были меньше единицы по модулю. Графически это означает, что на плоскости корней λ_i область устойчивости ограничивается окружностью радиуса $R = 1$ с центром в начале координат (рис. 16.9, а). Все корни устойчивой импульсной системы

должны быть расположены внутри указанного единичного круга.

Следовательно, непосредственным способом определения устойчивости импульсной автоматической системы по методу дифференциальных уравнений является вычисление корней λ_i характеристического уравнения вида (16.23). В тех случаях, когда уравнение (16.23) имеет высокий порядок, применение этого способа затруднительно. Поэтому целесообразно использовать критерии устойчивости, разработанные в теории импульсных систем.

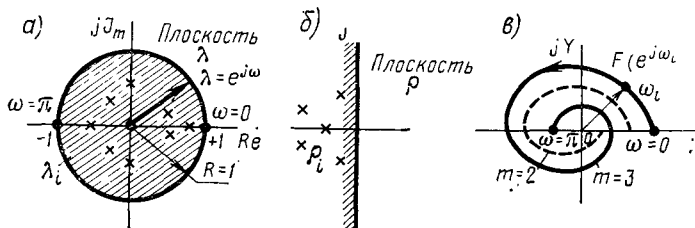


Рис. 16.9

ческого уравнения вида (16.23). В тех случаях, когда уравнение (16.23) имеет высокий порядок, применение этого способа затруднительно. Поэтому целесообразно использовать критерии устойчивости, разработанные в теории импульсных систем.

§ 16.4. Критерии устойчивости импульсных систем

Существуют косвенные способы, позволяющие, не решая уравнения, установить, все ли корни по модулю меньше единицы (критерии устойчивости).

Можно указать два косвенных способа исследования устойчивости импульсной системы без решения характеристического уравнения. Один из них основан на дополнительном преобразовании характеристического уравнения (ρ -преобразование) и применении критериев Рауса и Гурвица; другой — на построении годографа вектора характеристического уравнения (аналог критерия А. В. Михайлова).

Метод ρ -преобразования характеристического уравнения. Для перехода от единичного круга на комплексной плоскости переменной λ к левой полуплоскости новой переменной ρ используется конформное преобразование. При этом новая переменная ρ связана со старой λ посредством дробно-рационального преобразования:

$$\lambda = (1 + \rho) (1 - \rho)^{-1}. \quad (16.25)$$

После подстановки (16.25) в характеристическое уравнение (16.23) и преобразований получим новое характеристическое уравнение

$$d_0 \rho^m + d_1 \rho^{m-1} + d_2 \rho^{m-2} + \dots + d_{m-1} \rho + d_m = 0. \quad (16.26)$$

Область устойчивости на комплексной плоскости корней ρ после указанного преобразования соответственно (16.26) определяется левой полуплоскостью (рис. 16.9, б). В связи с этим к уравнению (16.26) могут быть применены алгебраические критерии Рауса и Гурвица, рассмотренные при анализе непрерывных систем (см. гл.8).

Метод ρ -преобразования (конформного преобразования в комплексной плоскости) является громоздким и требует сложных преобразований.

Аналог критерия Михайлова. В теории непрерывных систем при построении кривой Михайлова использовалась подстановка $p = j\omega$ в характеристическом уравнении замкнутой системы.

Я. З. Цыпкин в 1948 г. предложил аналогичный способ в теории импульсных систем с использованием характеристического уравнения вида (16.23). Поскольку границей области устойчивости на комплексной плоскости переменного λ является окружность единичного радиуса, было предложено выразить ее аналитически в виде показательной комплексной функции (см. рис. 16.9, а):

$$\lambda = e^{j\omega} = \cos \omega + j \sin \omega; \quad 0 \leq \omega \leq 2\pi. \quad (16.27)$$

Если подставить (16.27) в характеристическое уравнение (16.23), то при изменении ω можно построить годограф характеристического вектора импульсной системы:

$$F(e^{j\omega}) = a_0 e^{j\omega m} + a_1 e^{j\omega(m-1)} + \dots + a_{m-1} e^{j\omega} + a_m.$$

После выделения вещественной и мнимой частей последнее выражение представим в виде

$$F(e^{j\omega}) = X(\omega) + jY(\omega),$$

где

$$\left. \begin{aligned} X(\omega) &= a_0 \cos m\omega + a_1 \cos(m-1)\omega + \dots + a_{m-1} \cos \omega + a_m; \\ Y(\omega) &= a_0 \sin m\omega + a_1 \sin(m-1)\omega + \dots + a_{m-1} \sin \omega. \end{aligned} \right\} \quad (16.28)$$

При изменении ω от 0 до π можно вычислить значения $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ и на комплексной плоскости построить кривую (рис. 16.9, в). Формулировка критерия устойчивости импульсных систем аналогична формулировке критерия Михайлова: для устойчивости линейной импульсной системы необходимо и достаточно, чтобы вектор $F(e^{j\omega})$ при изменении ω от 0 до π повернулся против часовой стрелки на угол $m\pi$ (см. рис. 16.9, в), где m — степень характеристического уравнения (16.23); в противном случае система будет неустойчивой*.

Сплошная кривая на рис. 16.9, в соответствует устойчивой системе третьего порядка.

Если годограф кривой $F(e^{j\omega})$ проходит через начало координат, то система находится на границе устойчивости.

Аналогично исследованию непрерывных систем в данном случае можно применить следствие критерия о перемежаемости корней, определяемых по $X(\omega)$ и $Y(\omega)$. Следует указать также дополнительное (необходимое) условие устойчивости по данному критерию.

Учитывая, что $F(e^{j\omega})|_{\omega=0} = F(1)$ и $F(e^{j\omega})|_{\omega=\pi} = F(-1)$, можно установить следующее:

а) устойчивой импульсной системе нечетного порядка соответствуют значения $F(1) > 0$ и $F(-1) < 0$ (например, сплошная кривая на рис. 16.9, в для системы третьего порядка);

б) устойчивой импульсной системе четного порядка соответствуют значения $F(1) > 0$ и $F(-1) > 0$ (например, штриховая кривая на рис. 16.9, в для системы второго порядка).

Исследуя систему на устойчивость, необходимо проверить выполнение этих необходимых условий.



§ 16.5. Понятие о дискретном преобразовании Лапласа

Для исследования импульсных систем Я. З. Цыпкиным предложен метод, основанный на использовании дискретного преобразования Лапласа, который позволяет как и при исследовании непрерывных систем ввести понятия о передаточных и частотных функциях, а также о частотных характеристиках импульсных систем.

Рассмотрим предварительно изображение Лапласа для единичной решетчатой функции $1[nT_u]$. Единичную решетчатую функцию с периодом чередования T_u можно представить следующей суммой:

$$1[nT_u] = 1'(0) + 1'(t - T_u) + 1'(t - 2T_u) + \dots + 1'(t - nT_u),$$

где $1'$ — импульсы единичной величины и бесконечно малой длительности.

Применив далее к правой части обычное преобразование Лапласа, получим изображение единичной решетчатой функции:

$$L\{1[nT_u]\} = 1 + e^{-pT_u} + e^{-2pT_u} + \dots + e^{-npT_u} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-pT_u n}. \quad (16.29)$$

* Для непрерывных систем угол поворота вектора в два раза меньше и при $0 \leq \omega \leq \infty$ равен $m\pi/2$.

С учетом формулы для суммы бесконечной прогрессии (из теории рядов) запишем

$$L\{1[nT_{\text{ц}}]\} = (1 - e^{-pT_{\text{ц}}})^{-1} = (1 - e^{-q})^{-1}, \quad (16.30)$$

где $q = pT_{\text{ц}}$ — комплексный параметр.

Поскольку $p = \sigma + j\omega$, то $\underline{q} = (\sigma + j\omega)T_{\text{ц}} = \sigma T_{\text{ц}} + j\omega T_{\text{ц}}$. Если ввести относительные величины $\bar{\sigma} = \sigma T_{\text{ц}}$ и $\bar{\omega} = \omega T_{\text{ц}}$, то получим комплексный параметр в относительных единицах $\bar{q} = \bar{\sigma} + j\bar{\omega}$.

Прямое дискретное преобразование. Так как сумма решетчатой функции соответствует интегралу, то по аналогии с обычным преобразованием Лапласа Я. З. Цыпкин [Л.43] применил дискретное преобразование, являющееся функциональным преобразованием решетчатых функций $f[n, \epsilon]$:

$$F^*(q, \epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} f[n, \epsilon], \quad (16.31)$$

где $F^*(q, \epsilon)$ — изображение решетчатой функции в форме дискретного преобразования; $q = \bar{\sigma} + j\bar{\omega}$ — комплексное число, называемое параметром дискретного преобразования ($\bar{\omega} = 0 \div 2k\pi$ — относительная частота); $f[n, \epsilon]$ — решетчатая функция, называемая оригиналом; ϵ — параметр смещения, изменяющийся в пределах от 0 до 1.

Формула (16.31) соответствует прямому дискретному преобразованию. Связь между оригиналом и изображением записывается аналогично ранее принятому с введением вместо символа L нового символа D :

для $\epsilon = 0$

$$F^*(q) = D\{f[n]\} \rightarrow f[n];$$

для $\epsilon \neq 0$

$$F^*(q, \epsilon) = D\{f[n, \epsilon]\} \rightarrow f[n, \epsilon].$$

Смещенная решетчатая функция используется в случае представления непрерывной функции в дискретной форме, поскольку одной решетчатой функции без смещения могут соответствовать различные непрерывные функции (см. рис. 16.7, б).

Для применения прямого дискретного преобразования необходимо, чтобы решетчатые функции были преобразуемыми, т. е. соответствовали сходимости ряда (16.31).

Изображение, например, единичной решетчатой функции $f[n] = 1[n]$ с учетом уравнения (16.31) и значения $\epsilon = 0$

$$F^*(q) = D\{1[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} \cdot 1 = 1 + e^{-q} + e^{-2q} + \dots + e^{-nq}.$$

Пределом этого ряда является сумма бесконечной геометрической прогрессии:

$$D\{1[n]\} = (1 - e^{-q})^{-1} = e^q (e^q - 1)^{-1}.$$

Аналогично находят изображения для других решетчатых функций [Л.43]. Эти изображения являются функцией от e^q .

Если сопоставить изображение единичной функции в форме обычного и дискретного преобразований Лапласа, то оператору p можно поставить в соответствие выражение $(1 - e^{-q})$.

Поскольку изображения решетчатых функций зависят от e^q , то функции $F(q, \epsilon)$ на комплексной плоскости переменной q будут периодическими вдоль мнимой оси:

$$F^*(q, \epsilon) = F^*((q \cdot j \cdot 2\pi j k), \epsilon).$$

Обратное дискретное преобразование Лапласа. Если известно изображение решетчатой функции, то оригинал ее может быть определен по формулам обращения:

$$\left. \begin{aligned} f[n] &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\pi}^{c+j\pi} F^*(q) e^{qn} dq = D^{-1}\{F^*(q)\}; \\ f[n, \epsilon] &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\pi}^{c+j\pi} F^*(q, \epsilon) e^{qn} dq = D^{-1}\{F^*(q, \epsilon)\}. \end{aligned} \right\} \quad (16.32)$$

Для вычисления этих интегралов применяются либо специальные таблицы (см. приложение II), либо формулы разложения (подобно теоремам разложения Хевисайда в обычном преобразовании Лапласа).

Важную роль при использовании дискретного преобразования Лапласа играют правила и теоремы, которые устанавливают соответствие между операциями, производимыми в области оригиналов и изображений. Эти правила и теоремы дают возможность весьма просто, минуя непосредственное суммирование, которое обычно оказывается затруднительным, найти изображение многих решетчатых функций. Кроме того, они позволяют применить дискретное преобразование Лапласа к решению разностных уравнений и к исследованию установившихся и переходных процессов в импульсных системах.

z-преобразование. Если рассмотреть другие преобразования решетчатых функций, то можно установить родственность между ними и дискретным преобразованием Лапласа.

Наиболее широко применяется z-преобразование, которое можно рассматривать как модификацию дискретного преобразования Лапласа, использующего подстановку вида

$$e^q = z. \quad (16.33)$$

Формула z-преобразования, получаемая из (16.31) с учетом $\epsilon \rightarrow 0$, имеет вид

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] z^{-n}. \quad (16.34)$$

Для обратного z-преобразования применяется интеграл:

$$f[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint F(z) z^{-n+1} dz. \quad (16.35)$$

Такая модификация приводит к тому, что изображение $F(z)$ является функцией переменной z , а область устойчивости характеризуется единичным кругом на комплексной плоскости z аналогично λ (см. рис. 16.9, а). В приложении III приведены таблицы изображений $F(z)$ для наиболее распространенных типовых функций [Л.43].

Используя дискретное преобразование Лапласа, можно составить структурную схему импульсной системы, которую следует привести к расчетной схеме (см. рис. 16.6).

§ 16.6. Определение передаточной функции импульсной системы

В теории линейных импульсных систем, как и в теории линейных непрерывных систем, важную роль играет понятие передаточной функции. Определим передаточную функцию разомкнутой импульсной системы как отношение изображений в форме дискретного преобразования Лапласа выходной переменной разомкнутой системы к входной:

$$K^*(q, \varepsilon) = X_{\text{вых}}^*(q, \varepsilon) / X_{\text{вх}}^*(q, 0).$$

При этом выходная переменная должна быть представлена в виде эквивалентной решетчатой функции.

Передаточная функция разомкнутой импульсной системы может быть выражена через импульсную переходную характеристику приведенной непрерывной части с помощью формулы прямого дискретного преобразования Лапласа. Чтобы получить передаточную функцию разомкнутой импульсной системы, надо применить дополнительное дискретное преобразование Лапласа к относительной передаточной функции приведенной непрерывной части:

$$K^*(q, \varepsilon) = \frac{X_{\text{вых}}^*(q, \varepsilon)}{X_{\perp}^*(q)} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \exp[(q + 2\pi jr)\varepsilon] K(q + 2\pi jr), \quad (16.36)$$

где $K(q)$ — относительная передаточная функция приведенной непрерывной части:

$$K(q) = T_{\text{ц}}^{-1} [K(p)]|_{p=q/T_{\text{ц}}}. \quad (16.37)$$

Используя справочные таблицы дискретного преобразования Лапласа [Л.43], для некоторых типовых функций можно получить $K^*(q, \varepsilon)$.

Так как в передаточную функцию приведенной непрерывной части входит передаточная функция последовательно включенного формирующего элемента, то передаточная функция (16.36) импульсных систем, содержащих различные импульсные элементы при одинаковых непрерывных частях, будет различной.

Для импульсного элемента I т и II а передаточная функция формирующего элемента (16.6) в относительной форме

$$K_{\text{ф.э}}^{-1}(q) = \frac{k_{\text{н.э}}}{T_{\text{ц}}} \left[\frac{1 - \exp(-pT_{\text{ц}}\gamma)}{p} \right]_{p=q/T_{\text{ц}}} = k_{\text{н.э}} \frac{1 - \exp(q\gamma)}{q}. \quad (16.38)$$

Если известна передаточная функция линейных звеньев непрерывной части без импульсного элемента $K(p)$, то может быть получено соответствующее выражение $K_H(q)$. Относительная передаточная функция приведенной непрерывной части импульсной системы I типа [с учетом (16.38)]:

$$K(q) = k_{н.э} \frac{1 - \exp(-q\gamma)}{q} K_H(q). \quad (16.39)$$

На основании (16.39) можно представить структурную схему разомкнутой импульсной системы I типа с указанием относительных передаточных функций и двух параллельных каналов прямой цепи, сигналы которых вычитаются (рис. 16.10, а).

Таким образом, имея передаточную функцию $K(p)$ в обычной форме для непрерывных звеньев и передаточную функцию формирующего элемента для импульсных систем I типа (с импульсным элементом I типа), найдем передаточную функцию разомкнутой системы.

Используя (16.36) и полагая при приближенных исследованиях $\varepsilon = 0$, на основании (16.39) запишем

$$K_I^*(q) = K_{н.э}^{(1)} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{1 - \exp[-(q + 2\pi jr)\gamma]}{(q + 2\pi jr)\gamma} K_H(q + 2\pi jr), \quad (16.40)$$

где $K_{н.э}^{(1)} = k_{н.э}\gamma$ — эквивалентный коэффициент усиления импульсного элемента I типа.

В тех случаях, когда скважность γ незначительна по величине ($\gamma \ll 1$), выражение (16.40) можно несколько упростить. Если под знаком суммы (16.40) принять $\gamma \rightarrow 0$, то, раскрывая неопределенность по правилу Лопиталя, найдем

$$K_I^*(q) = K_{н.э}^{(1)} \sum_{r=-\infty}^{\infty} K_H(q + 2\pi jr). \quad (16.41)$$

На основании (16.41) запишем относительную передаточную функцию разомкнутой импульсной системы I типа для случая бесконечно малой скважности:

$$K(q) = K_{н.э}^{(1)} K_H(q). \quad (16.42)$$

Такое же выражение можно получить, если преобразовать (16.39) к виду

$$K^*(q) = K_{н.э}^{(1)} \frac{1 - \exp(-q\gamma)}{q\gamma} K_H(q),$$

а далее принять $\gamma \rightarrow 0$ и раскрыть неопределенность по правилу Лопиталя. С учетом (16.42) структурная схема для случая $\gamma \rightarrow 0$ будет иметь более простой вид (рис. 16.10, б).

Для импульсных систем II типа (с импульсным элементом II типа) при различных дискретных моментах m скажность [Л.43]:

$$\gamma_m = \kappa |x_{\text{вх}}[m]|,$$

где κ — коэффициент широтной модуляции.

Полагая, что имеют место малые изменения входной переменной $x_{\text{вх}}[m]$, когда $\gamma \ll 1$, передаточную функцию формирующего элемента можно представить в виде звена с коэффициентом передачи:

$$K_{\text{н.э}}^{(2)} = k_{\text{н.э}} \kappa.$$

При этом предполагаем, что высота мгновенных импульсов пропорциональна входной переменной (как в импульсных элементах I типа). Это позволяет привести импульсную систему II типа к эквивалентной импульсной системе I типа.

Следовательно, передаточную функцию разомкнутой импульсной системы II типа можно определить приближенным выражением, полагая в (16.36) величину $\varepsilon = 0$:

$$K_{\text{II}}^*(q) = K_{\text{н.э}}^{(2)} \sum_{r=-\infty}^{\infty} K_{\text{н}}(q + 2\pi jr). \quad (16.43)$$

Выражения (16.40) и (16.43) характеризуют передаточную функцию разомкнутой импульсной системы непосредственно через передаточные функции непрерывной линейной части. Эти выражения справедливы также при наличии звеньев с запаздыванием и распределенными параметрами, что учитывается передаточной функцией $K(p)$.

На основании (16.40) и (16.43) структурная схема замкнутой импульсной системы будет представлена относительно дискретных сигналов на входе и выходе (рис. 16.10, в).

Так же как и для линейных непрерывных систем, по структурной схеме замкнутой системы (см. рис. 16.10, в) получим передаточные функции:

для замкнутой импульсной системы

$$W^*(q) = K^*(q) [1 + K^*(q)]^{-1}; \quad (16.44)$$

для ошибки

$$W_{\Delta x}^*(q) = [1 + K^*(q)]^{-1}, \quad (16.44a)$$

где $K^*(q)$ — определяется соответственно выражениями (16.40), (16.41) или (16.43).

Используя передаточные функции разомкнутой и замкнутой систем, запишем соответственно операторные уравнения в форме дискретного преобразования Лапласа:

$$X_{\text{вых}}^*(q) = K^*(q) X_{\text{вх}}^*(q) \div \frac{B^*(q)}{A^*(q)} X_{\text{вх}}^*(q);$$

$$X_{\text{вых}}^*(q) = W^*(q) X_{\text{вх}}^*(q) \div \frac{K^*(q)}{1 + K^*(q)} X_{\text{вх}}^*(q).$$

При заданной форме входного сигнала $x_{\text{вх}}(t)$ получим $X_{\text{вх}}^*(q)$ для эквивалентной решетчатой функции и найдем изображения в форме дискретного преобразования Лапласа выходной переменной разомкнутой и замкнутой систем. Это позволяет в некоторых случаях по формулам обратного дискретного преобразования Лапласа определить эквивалентную решетчатую функцию $x_{\text{вых}}[n]$. Указанные уравнения характеризуют поведение импульсных систем только в дискретные моменты времени и не учитывают поведение систем между ними, так как было принято $\varepsilon = 0$. В общем случае исследования импульсных систем необходимо принять $\varepsilon \neq 0$.

По выражениям передаточных функций импульсных систем или операторным уравнениям запишем характеристические уравнения. Например, для замкнутой системы

$$1 + K^*(q) = A^*(q) + B^*(q) = 0. \quad (16.45)$$

Уравнение (16.45) замкнутой системы аналогично выражению (16.23), полученному из дифференциально-разностного уравнения импульсной системы, и может использоваться для исследования устойчивости системы указанными выше методами.

По выражению (16.44 а) можно составить операторное дискретное уравнение относительно ошибки (входного сигнала импульсного элемента), что позволит определить процесс для ошибки:

$$\Delta X^*(q) = \frac{1}{1 + K^*(q)} X_{\text{вх}}^*(q). \quad (16.46)$$

§ 16.7. Понятие о частотных функциях и характеристиках импульсных систем

Чтобы получить частотные функции, необходимо в передаточных функциях импульсной системы заменить переменную преобразования q на $j\bar{\omega}$:

$$K^*(j\bar{\omega}, \varepsilon) = K_0^*(\bar{\omega}, \varepsilon) e^{j\varphi^*(\bar{\omega}, \varepsilon)} \quad (16.47)$$

$$W^*(j\bar{\omega}, \varepsilon) = W_0^*(\bar{\omega}, \varepsilon) e^{-j\theta^*(\bar{\omega}, \varepsilon)}, \quad (16.48)$$

где $K_0^*(\bar{\omega}, \varepsilon)$ и $W_0^*(\bar{\omega}, \varepsilon)$ — модули для разомкнутой и замкнутой импульсных систем;

$\varphi^*(\bar{\omega}, \varepsilon)$ и $\theta^*(\bar{\omega}, \varepsilon)$ — фазы для разомкнутой и замкнутой систем.

В общем случае по (16.36), заменив q на $j\bar{\omega}$, можно записать частотную функцию импульсной системы

$$K^*(j\bar{\omega}, \varepsilon) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \exp[j(\bar{\omega} + 2\pi r)\varepsilon] K[j(\bar{\omega} + 2\pi r)] \quad (16.49)$$

Частотные функции для импульсных систем I и II типа на основании (16.40) и (16.43) при $\varepsilon \rightarrow 0$ будут иметь вид:

$$K_I^*(j\bar{\omega}) = K_{н.э}^{(1)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1 - \exp[-j(\bar{\omega} + 2\pi r)\gamma]}{j(\bar{\omega} + 2\pi r)\gamma} K_{н} [j(\bar{\omega} + 2\pi r)]; \quad (16.50)$$

$$K_{II}^*(j\bar{\omega}) = K_{н.э}^{(2)} \sum_{r=-\infty}^{\infty} K_{н} [j(\bar{\omega} + 2\pi r)]. \quad (16.51)$$

В случае $\gamma \rightarrow 0$ для импульсной системы I типа на основании (16.41) получим выражение, аналогичное (16.51):

$$K_I^*(j\bar{\omega}) = K_{н.э}^{(1)} \sum_{r=-\infty}^{\infty} K_{н} [j(\bar{\omega} + 2\pi r)]. \quad (16.52)$$

Частотные функции могут быть выражены также через импульсную переходную функцию непрерывной части системы [Л. 43].

При фиксированном ε (включая $\varepsilon = 0$) частотная функция $K^*(j\bar{\omega}, \varepsilon)$ указывает на изменение модуля (амплитуды) и фазы установившейся решетчатой выходной переменной при различных частотах входной переменной. Это изменение частотной функции в зависимости от относительной частоты $\bar{\omega}$, представленное графически, определяет *частотную характеристику импульсной системы*.

Можно установить, что частотные функции и характеристики по л о с т ь ю определяются изменением $\bar{\omega}$ в интервале $-\pi \leq \bar{\omega} \leq \pi$ или $0 \leq \bar{\omega} \leq \pi$. При этом частотные характеристики, так же как и в непрерывных системах, широко используются при исследовании устойчивости и качества импульсных систем.

Частотные характеристики могут быть построены различными способами. Рассмотрим, например, построение частотной характеристики импульсной системы по выражению $K^*(j\bar{\omega})$, подобному (16.51) и (16.52):

$$K^*(j\bar{\omega}) = K_{н.э} \sum_{r=-\infty}^{\infty} K_{н} [j(\bar{\omega} + 2\pi r)]. \quad (16.53)$$

Для импульсных систем первого типа (при $\gamma \rightarrow 0$) и второго типа (при малых изменениях входной величины $x_{вх} [m]$ и $\gamma \ll 1$) частотная характеристика разомкнутой системы определяется выражением (16.53) и может быть построена по частотной характеристике непрерывной части $K_{н}(j\bar{\omega})$. Последняя при этом получается из амплитудно-фазовой характеристики непрерывной части разомкнутой системы $K(j\omega)$. Для заданного интервала регулирования $T_{ц}$ находится относительная частота $\bar{\omega}_i = \omega_i T_{ц}$ и вместо ω_i на кривую $K(j\omega)$ наносятся значения $\bar{\omega}_i$. (рис. 16.11, а). В связи с учетом отрицательного r в (16.53) кривая $K(j\omega)$ должна быть также построена для отрицательных частот (штриховая кривая на рис. 16.11, а). Задаваясь далее значениями $\bar{\omega} = \bar{\omega}_i \leq \pi$, отмечаем на частотной характеристике $K(j\omega)$ непрерывной части точки, соответствующие $\bar{\omega}_i$, $\bar{\omega}_i - 2\pi$, $\bar{\omega}_i - 4\pi$, ...,

$\omega_i + 2\pi, \bar{\omega}_i + 4\pi, \dots$ Сумма векторов, проведенных из начала координат к этим точкам, определяет значение вектора искомой характеристики без учета коэффициента $K_{н.э}$. Чтобы учесть $K_{н.э}$, следует изменить масштаб по осям для $K^*(j\bar{\omega})$ в $K_{н.э}$ раз по сравнению с масштабом для $K(j\omega)$.

Поскольку при достаточно больших частотах $\bar{\omega}$ модуль частотной характеристики $|K^*(j\bar{\omega})| \rightarrow 0$, то в сумме равенства (16.53) можно ограничиться небольшим числом слагаемых, обычно двумя [Л. 43]:

$$K^*(j\bar{\omega}) = K_{н.э} \{K_n(j\bar{\omega}) + K_n[j(\bar{\omega} - 2\pi)]\}. \quad (16.54)$$

На основании (16.54) характеристика $K^*(j\bar{\omega})$ строится очень просто — из каждой точки $\bar{\omega}_i < \pi$ частотной характеристики $K_n(j\bar{\omega})$, как из начала координат, проводят векторы $K_n[j(\bar{\omega}_i - 2\pi)]$. Со-

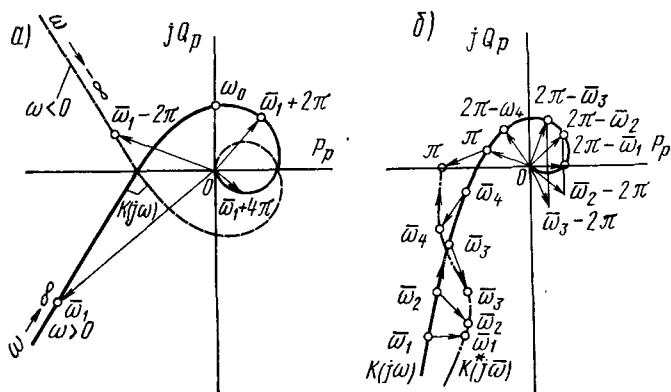


Рис. 16.11

единив концы полученных векторов плавной кривой, получают частотную характеристику $K^*(j\bar{\omega})$, масштаб для которой должен учитывать коэффициент $K_{н.э}$. Если строится кривая $K^*(j\bar{\omega}, \epsilon)$, то каждый результирующий вектор должен быть повернут в положительном или отрицательном направлении с учетом $\exp[j(\bar{\omega} + 2\pi)\epsilon]$, как это следует из (16.49).

Для импульсной системы I типа, когда $\gamma \neq 0$ и имеет конечную величину ($0 < \gamma < 1$), выражение для $K^*(j\bar{\omega})$ будет более сложным, чем (16.50). Чтобы упростить его, используем преобразование:

$$\begin{aligned} \frac{1 - e^{-ja}}{ja} &= \frac{e^{-j\frac{a}{2}} - e^{-j\frac{a}{2}}}{ja} e^{-j\frac{a}{2}} = \frac{\cos \frac{a}{2} - j \sin \frac{a}{2} - \cos \frac{a}{2} + j \sin \frac{a}{2}}{ja} e^{-j\frac{a}{2}} = \\ &= \frac{\sin \frac{a}{2}}{a/2} e^{-j\frac{a}{2}}. \end{aligned} \quad (16.55)$$

Учитывая (16.55) вместо (16.50) запишем

$$K_1^*(j\bar{\omega}) = K_{н.г}^{(1)} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{\bar{\omega} + 2\pi r}{2} \gamma}{\frac{\bar{\omega} + 2\pi r}{2} \gamma} e^{-j \frac{\bar{\omega} + 2\pi r}{2} \gamma} K_{н} [j(\bar{\omega} + 2\pi r)]. \quad (16.56)$$

При построении частотной характеристики импульсной системы I типа по выражению (16.56) можно также ограничиться только двумя слагаемыми:

$$K_1^*(j\bar{\omega}) = K_{н.г1}(j\bar{\omega}) K_{н}(j\bar{\omega}) + K_{н.г2}(j\bar{\omega}) K_{н}[j(\bar{\omega} - 2\pi)], \quad (16.57)$$

где

$$\left. \begin{aligned} K_{н.г1}(j\bar{\omega}) &= K_{н.г}^{(1)} \frac{\sin \frac{\bar{\omega}}{2} \gamma}{\frac{\bar{\omega}}{2} \gamma} e^{-j \frac{\bar{\omega}}{2} \gamma}; \\ K_{н.г2}(j\bar{\omega}) &= K_{н.г}^{(1)} \frac{\sin \frac{\bar{\omega} - 2\pi}{2} \gamma}{\frac{\bar{\omega} - 2\pi}{2} \gamma} e^{-j \frac{\bar{\omega} - 2\pi}{2} \gamma}. \end{aligned} \right\} \quad (16.58)$$

В процессе построения определяются векторы $K_{н}(j\bar{\omega}_i)$ и $K_{н}[j(\bar{\omega}_i - 2\pi)]$, которые соответственно (16.58) изменяются по модулю и поворачиваются на некоторые углы. Далее полученные векторы складываются. Проводя плавную кривую через концы результирующих векторов, полученных для $\bar{\omega}_i$, найдем частотную характеристику соответственно (16.57).

При уточненных расчетах для $\varepsilon \neq 0$ в выражениях (16.58) добавляются множители $\exp(-j\bar{\omega} \varepsilon)$ и $\exp[-j(\bar{\omega} - 2\pi) \varepsilon]$ соответственно. Таким образом, для каждого значения ε следует строить частотные характеристики $K_1^*(j\bar{\omega}, \varepsilon)$, которые имеют различный вид.

Так как частотные характеристики $K_1^*(j\bar{\omega})$ для положительных и отрицательных частот симметричны относительно оси абсцисс, можно при нанесении $\bar{\omega}$ на кривую $K_{н}(j\bar{\omega})$ использовать кривую $K(j\bar{\omega})$ для $\bar{\omega} > 0$, отмечая векторы для частот $\bar{\omega}_i$ и $2\pi - \bar{\omega}_i$. На рис. 16.11, б построена частотная характеристика некоторой импульсной системы по (16.54). Векторы $K_{н}[j(\bar{\omega}_i - 2\pi)]$ проводятся зеркально векторам $K_{н}[j(2\pi - \bar{\omega}_i)]$ относительно оси абсцисс и далее переносятся в точки $\bar{\omega}_i$ на $K_{н}(j\bar{\omega})$.

При построении частотных характеристик импульсных систем выражение для $K^*(j\bar{\omega}, \varepsilon)$ можно представить в виде суммы вещественной и мнимой частей:

$$K^*(j\bar{\omega}, \varepsilon) = P_p^*(\bar{\omega}, \varepsilon) + jQ_p^*(\bar{\omega}, \varepsilon).$$

Вещественные и мнимые части следует строить и суммировать для $0 < \bar{\omega} < \pi$.

Частотные характеристики замкнутой импульсной системы определяются при построении кривых по частотным функциям $W^*(j\bar{\omega})$, полученным после замены в (16.44) q на $j\bar{\omega}$ и соответствующих преобразований. При этом используются методы, известные из теории непрерывных систем, что позволяет построить $W^*(j\bar{\omega}, \epsilon)$ по известным $K^*(j\bar{\omega}, \epsilon)$. Можно также построить вещественную и мнимую частотные характеристики замкнутой импульсной системы [Л. 43]. Построенные таким образом частотные характеристики используются для исследования динамики импульсных систем.

§ 16.8. Исследование устойчивости импульсных систем по частотным характеристикам

Частотные характеристики $K^*(j\bar{\omega}, \epsilon)$ разомкнутой импульсной системы являются аналогами амплитудно-фазовых характеристик непрерывных систем, поэтому для исследования устойчивости импульсных систем может использоваться аналог критерия Найквиста. Чтобы применить его, надо построить частотные характеристики $K^*(j\bar{\omega}, \epsilon)$ и предварительно установить устойчивость разомкнутой импульсной системы.

Известно [Л. 43], что если непрерывная часть линейной импульсной системы устойчива, то устойчива разомкнутая импульсная систе-

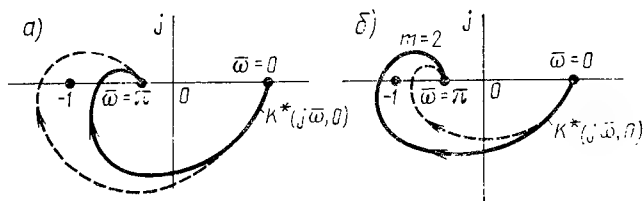


Рис. 16.12

ма, и наоборот. Следовательно, добавление импульсного элемента к разомкнутой непрерывной линейной системе не изменяет ее устойчивости.

Аналог критерия Найквиста применительно к импульсным системам может быть сформулирован следующим образом:

1) импульсная замкнутая система устойчива, если частотная характеристика $K^*(j\bar{\omega}, \epsilon)$ устойчивой разомкнутой системы не охватывает точку с координатами $(-1; j 0)$ при изменении $\bar{\omega}$ от 0 до π (рис. 16.12, а); в противном случае система неустойчива (штриховая кривая на рис. 16.12, а);

2) импульсная замкнутая система устойчива, если частотная характеристика $K^*(j\bar{\omega}, \epsilon)$ неустойчивой разомкнутой системы

о х в а т ы в а е т точку с координатами $(-1; j 0)$ $m/2$ раз при изменении ω от 0 до π , где m — число корней с положительной вещественной частью характеристического уравнения непрерывной части разомкнутой системы (рис. 16.12, б); в противном случае система неустойчива (штриховая кривая на рис. 16.12, б).

Устойчивость астатических импульсных систем по данному критерию определяется аналогично устойчивости по критерию Найквиста для непрерывных систем. Если частотная характеристика импульсной системы нормирована, то роль критической точки играет точка с координатами $(-1/K; j 0)$, где K — коэффициент нормирования. Для импульсных систем, непрерывная часть которых содержит звено с запаздыванием, все изложенное выше справедливо, если в качестве исходной при построении $K_t^*(j\omega, \epsilon)$ используется амплитудно-фазовая характеристика с учетом запаздывания $K_t(j\omega)$.

Можно установить, что введение импульсного элемента иногда является сильным средством стабилизации неустойчивых замкнутых непрерывных систем, что можно оценить, анализируя расположение $K^*(j\omega)$ и $K(j\omega)$ относительно критической точки. При этом предлагается [Л. 43] выбирать интервал $T_{ц}$ из условия (см. рис. 16.11, а)

$$T_{ц} \geq \pi/\omega_0,$$

где ω_0 — частота, при которой АФХ непрерывной части разомкнутой системы пересекает положительную мнимую полуось.

Из указанного свойства стабилизации с помощью импульсного элемента следует, что устойчивость импульсной замкнутой системы зависит от интервала $T_{ц}$.

44 § 16.9. Качество переходного процесса импульсных систем

Качество переходного процесса импульсных систем, как и непрерывных систем, может быть определено по графику $x_{вых}(t)$, соответствующему решетчатой функции $x_{вых}[n]$, которая находится в результате расчета с использованием дискретного преобразования Лапласа или решения дифференциально-разностных уравнений системы. Кроме того, как и в теории непрерывных систем, важную роль играют методы косвенной оценки качества переходного процесса.

Рассмотрим основные методы оценки качества косвенными способами и посредством определения переходного процесса.

Косвенные оценки качества могут быть основаны на использовании понятий степеней устойчивости и колебательности, интегральных оценок и др. [Л. 43].

Степень устойчивости $\bar{\xi}$. Степень устойчивости импульсных систем определяется абсолютной величиной действительной части ближайшего к мнимой оси комплексной плоскости q корня характеристического уравнения замкнутой системы:

$$\bar{\xi} = \min |\operatorname{Re} q_v|. \quad (16.59)$$

Степень устойчивости может быть аperiodической или колебательной в зависимости от типа ближайшего к мнимой оси корня. Степень устойчивости, как известно, характеризует скорость затухания переходного процесса и позволяет приближенно определить длительность

$$n_p \leq 3/\bar{\xi}.$$

Полученное значение $\bar{\xi}$ является относительной величиной. Абсолютная величина степени устойчивости находится с учетом времени цикла $T_{ц}$:

$$\xi = \bar{\xi}/T_{ц}.$$

Чтобы определить степень устойчивости $\bar{\xi}$, необходимо использовать подстановку в выражение для $K^*(q)$ вместо q новой переменной ($q - \bar{\xi}$), где $\bar{\xi} > 0$. В результате этого исследуется некоторая фиктивная импульсная система с границей устойчивости, характеризваемой степенью устойчивости $\bar{\xi}$, что может быть выполнено с помощью указанных выше критериев. То значение $\bar{\xi}$, при котором фиктивная система находится на границе устойчивости, является искомой степенью устойчивости.

Непрерывные системы всегда имеют конечную степень устойчивости, а в импульсных системах степень устойчивости может достигать бесконечности. При этом абсолютные значения отрицательных вещественных корней равны бесконечности.

Если характеристическое уравнение записывается в виде

$$a_l e^{lq} + a_{l-1} e^{(l-1)q} + \dots + a_1 e^q + a_0 = 0,$$

то степень устойчивости достигает бесконечности при

$$a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_{l-1} = 0, \quad (16.60)$$

поскольку в этом случае все корни характеристического уравнения равны минус бесконечности.

В системе с бесконечной степенью устойчивости переходный процесс при возмущениях в виде единичного скачка заканчивается в определенное конечное число интервалов. Условие (16.60) называется *условием конечной длительности* переходного процесса*. Параметры, удовлетворяющие этому условию, считаются оптимальными по условиям обеспечения бесконечной степени устойчивости.

Степень колебательности. Степенью колебательности устойчивой импульсной системы называется абсолютная величина отношения мнимой части ближайшего к мнимой оси корня характеристического уравнения к его действительной части:

$$\bar{\eta} = \bar{\omega}/\bar{\xi}. \quad (16.61)$$

* Автоматическое управление при конечной длительности переходного процесса иногда называется финитным управлением.

Графически $\bar{\eta}$ представляет собой тангенс угла наклона луча, проведенного из начала координат через ближайший к мнимой оси корень характеристического уравнения.

Расчет степени колебательности может быть сведен также к исследованию устойчивости некоторой фиктивной системы. Для этого в характеристическом уравнении переменная q заменяется на новую с учетом (16.61):

$$q = -\bar{\xi} + j\bar{\omega} = \bar{\omega}(j - 1/\bar{\eta}).$$

К полученному новому характеристическому уравнению

$$G^* [\bar{\omega}(j - \bar{\eta}^{-1})] = 0$$

применяются критерии устойчивости, позволяющие определить значение $\bar{\eta}$, при котором система находится на границе устойчивости. Степень колебательности характеризует колебательность дискретного процесса в моменты съема $\bar{t} = n$.

Аналоги интегральных оценок. Косвенными оценками, учитывающими не только длительность процесса, но и его отклонение, могут служить с у м м а р н ы е оценки, являющиеся аналогами интегральных оценок непрерывных систем.

Пусть сигнал на входе импульсного элемента замкнутой системы

$$x[n] = x_{\text{вх}}[n] - x_{\text{вх}}[n] = \Delta x[n].$$

Тогда при воздействии единичного скачка переходный процесс можно оценить величинами

$$I_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (x[n] - x[\infty]);$$

$$I_2 = \sum_{n=0}^{\infty} (x[n] - x[\infty])^2,$$

где $x(\infty)$ — установившееся значение сигнала (ошибка или статическое отклонение системы).

В импульсных системах часто встречается случай, когда $x[\infty] = 0$, поэтому

$$I_1 = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]; \quad (16.62)$$

$$I_2 = \sum_{n=0}^{\infty} x^2[n]. \quad (16.63)$$

Аналог линейной интегральной оценки (16.62) используется для неколебательных процессов, при этом сумма, согласно теореме о площади дискретного преобразования Лапласа [Л. 43],

$$I_1 = \Delta x^*(0) = \frac{dW_{\Delta x}^*(q)}{dq} = \left\{ \frac{d}{dq} \cdot \frac{1}{[1 \nrightarrow K^*(q)]} \right\}_{q=0}. \quad (16.64)$$

Для колебательных процессов используется аналог квадратичной интегральной оценки (16.63), при этом сумма определяется по передаточной функции [Л. 43] относительно ошибки (16.44а):

$$I_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |W_{\Delta x}^*(j\bar{\omega})|^2 d\bar{\omega} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{G^*(j\bar{\omega})}{H^*(j\bar{\omega})} \right|^2 d\bar{\omega}. \quad (16.65)$$

Наилучшей является та импульсная система, для которой указанные суммарные оценки минимальны. Значения параметров системы, при которых эти оценки минимальны, называются *оптимальными* с точки зрения качества переходного процесса.

Коэффициенты ошибок. Точность импульсных систем в установившемся режиме может быть охарактеризована коэффициентами ошибок. В импульсных системах установившееся значение ошибки можно определить по изображению для ошибки в форме дискретного преобразования Лапласа. Применяя теорему о конечном значении, получим (записывая $x[n]$ вместо $\Delta x[n]$)

$$x[\infty] = x[n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^q - 1}{e^q} X^*(q). \quad (16.66)$$

На основании передаточной функции импульсной системы относительно ошибки вместо (16.66) запишем

$$x[\infty] = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{e^q - 1}{e^q} \cdot \frac{1}{1 \mp K^*(q)} X_{\text{вх}}^*(q). \quad (16.67)$$

Выражение (16.67) является общим для определения установившегося значения ошибки при любой форме входного сигнала $x_{\text{вх}}(t)$.

В случае постоянных воздействий, прикладываемых на входе системы в виде единичного скачка, на основании (16.67) найдем

$$x[\infty] = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{1}{1 \mp K^*(q)} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{A^*(q)}{A^*(q) \mp B^*(q)}. \quad (16.68)$$

Чтобы оценить установившийся режим импульсной системы, необходимо (16.68) разложить в ряд по степеням члена $(e^q - 1)$ и записать в виде предела суммы [Л. 43]:

$$x[\infty] = \lim_{q \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (e^q - 1)^n,$$

где коэффициенты ошибок

$$b_n = \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n}{d(e^q)^n} \cdot \frac{A^*(q)}{A^*(q) \mp B^*(q)}.$$

Эти коэффициенты характеризуют ошибку лишь в моменты съема. Чтобы получить информацию о действительном поведении системы в любой момент времени, надо выразить установившееся значение ошибки через коэффициент смещения ϵ [Л. 43]. При этом установившаяся

ся ошибка пропорциональна разностям внешнего воздействия на входе системы $\Delta^k f[n-k, 0]$:

$$x[\infty, \varepsilon] = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(\varepsilon) \Delta^k f[n-k, 0].$$

Коэффициенты ошибок с учетом смещения

$$C_k(\varepsilon) = \frac{1}{k!} [\varepsilon^{(-k)} - (-1)^k d_k(\varepsilon)].$$

Здесь принято, что

$$\varepsilon^{(-k)} = \varepsilon(\varepsilon + 1) \dots (\varepsilon + k - 1); \quad \varepsilon^{(0)} = 1;$$

$$d_k(\varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} h'_3[m, \varepsilon] m^{(k)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{d(\varepsilon^q)^k} W^*(q, \varepsilon) \right],$$

где $h'_3[m, \varepsilon]$ — импульсная переходная функция замкнутой системы.

При получении $x[\infty, \varepsilon]$ была использована интерполяционная формула Ньютона для функции внешнего воздействия:

$$f[n, \varepsilon] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{(-k)}}{k!} \Delta^k f[n-k, 0].$$

Формула (16.67) позволяет определить требования, которым должна удовлетворять импульсная система, чтобы быть астатической при любом входном воздействии. Если требуется, чтобы система обладала астатизмом первого порядка по отношению к постоянному воздействию, необходимо выполнить условие

$$x[\infty] = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{1}{1 + K^*(q)} = \lim_{q \rightarrow 0} W_{\Delta x}^*(q) = 0,$$

т. е. передаточная функция $W^*(q)$ должна иметь в точке $q = 0$ (или $\varepsilon^q = 1$) нуль первого порядка, что означает наличие в числителе члена $(\varepsilon^q - 1)$. При астатизме второго порядка необходимо наличие нуля второго порядка для $W_{\Delta x}^*(q)$ в точке $q = 0$ и т. д.

Использование частотных характеристик для исследования переходного процесса. Так же как и в теории непрерывных систем, существует однозначная связь между частотными и переходными характеристиками импульсных систем. Это вытекает из связи дискретного преобразования Лапласа с рядами Фурье.

Если разделить частотную функцию импульсной замкнутой системы на вещественную и мнимую составляющие:

$$W^*(j\bar{\omega}, \varepsilon) = P^*(\bar{\omega}, \varepsilon) + jQ^*(\bar{\omega}, \varepsilon),$$

то для импульсной переходной характеристики (при исчезающем входном воздействии) можно записать [Л. 43]:

при $n > 0$

$$h'[n, \varepsilon] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} P^*(\bar{\omega}, \varepsilon) \cos \bar{\omega} n d\bar{\omega};$$

при $n = 0$

$$h' [0, \varepsilon] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} P^* (\bar{\omega}, \varepsilon) d\bar{\omega}.$$

При входном воздействии в виде единичного скачка переходная характеристика

$$h [n, \varepsilon] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} P^* (\bar{\omega}, \varepsilon) \frac{\sin \frac{\bar{\omega} (2n+1)}{2}}{\sin \frac{\bar{\omega}}{2}} d\bar{\omega}.$$

В ряде случаев оценить качество переходного процесса импульсных систем можно с помощью частотных характеристик.

Если построить амплитудно-частотную характеристику замкнутой системы $|W^* (j\bar{\omega})| = A_s^* (\bar{\omega})$, то отношение максимальной ее величины $A_{\max}^*$ к значению при нулевой частоте $A^* (0)$ будет определять затухание (или колебательность) процесса. В данном случае рассматривается относительная величина пиков модуля $A_s^* (\bar{\omega})$, поскольку из-за периодичности частотной характеристики таких пиков будет бесчисленное множество (рис. 16.13, а).

Амплитудно-частотная характеристика замкнутой импульсной системы $A_s^* (\bar{\omega})$ может быть построена с помощью частотной характеристики разомкнутой системы $K^* (j\bar{\omega})$ и амплитудной круговой диаграммы. Используя эту диаграмму, а также график кривой $K^* (j\bar{\omega})$,

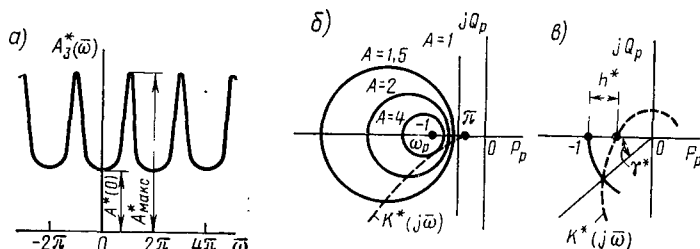


Рис. 16.13

можно определить $A_{\max}^*$ по индексу окружности, которой касается указанная кривая, помня, что в точке касания частота является резонансной ω_p . Чем больше $A_{\max}^*$, тем ближе частотная характеристика $K^* (j\bar{\omega})$ проходит около критической точки и, следовательно, тем меньше запас устойчивости (рис. 16.13, б). В данном случае может быть введено понятие о запасе устойчивости по модулю h^* и по фазе γ^* (рис. 16.13, в).

В тех случаях, когда импульсная система неустойчива или не удовлетворяет заданным показателям качества переходного процесса применяются средства стабилизации и коррекции.

О расчете переходных процессов. Расчет переходных процессов импульсной системы можно выполнить с помощью обратного дискретного преобразования Лапласа. При этом находится решетчатая функция выходной переменной системы, которая будет характеризовать значения переменной в дискретные моменты съема $\bar{t} = n$.

В большинстве случаев такой расчет переходных процессов импульсных систем сложен, поскольку требуется предварительно находить корни полинома знаменателя изображения $X^*(q)$. Для некоторого упрощения расчета могут быть использованы определенные рекуррентные соотношения или вещественная частотная характеристика замкнутой импульсной системы [Л. 43].

Пример 16.1. Определим переходный процесс системы с АИМ (рис. 16.14), если линейная часть состоит из интегрирующего звена с передаточной функцией $K(p) = k/p$; $k = 1$ 1/сек. Параметры импульсов заданы: $T_{ц} = 2$ сек; $\gamma = 0,8$. Построим переходный процесс при $x_{вх}(t) = 1(t)$.

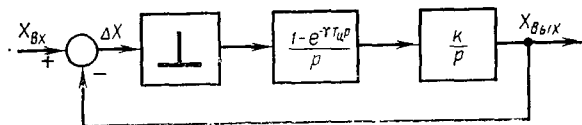


Рис. 16.14

Дифференциальные уравнения системы запишем в следующем виде:

при $nT_{ц} < t < (n+1)T_{ц}$

$$dx_{вых}/dt = k\Delta x[n, T_{ц}];$$

при $(n+1)T_{ц} < t < (n+2)T_{ц}$

$$dx_{вых}/dt = 0.$$

Введем относительное время $\bar{t} = t/T_{ц}$, тогда соответственно получим

$$dx_{вых}/d\bar{t} = kT_{ц} \Delta x[n];$$

$$dx_{вых}/d\bar{t} = 0.$$

В результате решения этих уравнений с учетом $\Delta x[n] = 1[n] - x_{вых}[n]$ и $\bar{t} = n+1$ найдем $x_{вых}[n+1] = (1 - k\gamma T_{ц}) x_{вых}[n] + k\gamma T_{ц} \cdot 1[n]$, или в численном виде

$$x_{вых}[n+1] = 0,6 x_{вых}[n] + 1,6 \cdot 1[n].$$

Модуль корня характеристического уравнения в данном случае меньше единицы ($\lambda = -0,6$), следовательно, рассматриваемая импульсная система устойчива.

Для $x_{вх}[n] = 1[n]$ вынужденная составляющая выходного сигнала $x_{вых}[n] = 1[n]$, поэтому переходный процесс в течение рабочего импульса определяется уравнением

$$x_{вых}[n] = C\lambda^n + 1.$$

С учетом начальных условий [$x_{вых}(0) = 0$ и $C = -1$] получим.

$$x_{вых}[n] = 1 - (-0,6)^n. \quad (16.69)$$

По уравнению (16.69) построен график переходного процесса (рис. 16.15). При этом учитывалось, что в период рабочего импульса ($\gamma=0,8$) выходная переменная нарастает с постоянной скоростью, а в период паузы скорость равна нулю. Переходный процесс является колебательным: $\sigma = 60\%$, $\bar{t}_p = 6,0$ (или $t_p = 12,0$ сек).

Если $\gamma = 1$, то $\lambda = -1$, что соответствует границе устойчивости. В том случае, когда γ , k и T_{Π} соответствуют условию $1 - k\gamma T_{\Pi} = 0$, получим переходный процесс конечной длительности. В данном случае $k = 1$, $T_{\Pi} = 2$ сек, поэтому $\gamma = 1/2 = 0,5$.

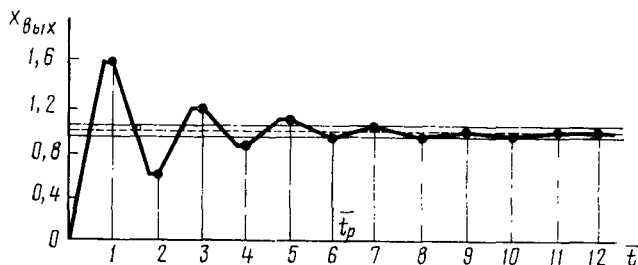


Рис. 16.15

Пример 16.2. Определим переходный процесс системы (см. рис. 16.14) методом дискретного преобразования Лапласа, используя данные примера 16.1. Передаточная функция приведенной непрерывной части системы

$$K_{\Pi}(p) = \frac{1 - e^{-\gamma T_{\Pi} p}}{p} \cdot \frac{k}{p}.$$

С учетом (16.37)

$$K_{\Pi}(p) = \frac{1 - e^{-\gamma q}}{q} \cdot \frac{k T_{\Pi}}{q} = (1 - e^{-\gamma q}) \frac{k T_{\Pi}}{q^2}.$$

Для определения передаточной функции разомкнутой импульсной системы $K^*(q)$ используем дополнительное дискретное преобразование Лапласа, согласно которому [см. Л. 43]

$$D \left\{ \frac{1}{q^2} \right\} = \frac{e^q}{(e^q - 1)^2} + \frac{e^q}{e^q - 1} e;$$

$$D \{ e^{-\gamma q} F(q) \} = e^{-q} F^*(q, 1 \div \varepsilon - \gamma).$$

Следовательно,

$$K^*(q, \varepsilon) = k T_{\Pi} \left[\frac{e^q}{(e^q - 1)^2} + \frac{e^q}{e^q - 1} e - \frac{1}{(e^q - 1)^2} - \frac{1 \div \varepsilon - \gamma}{e^q - 1} \right],$$

или при $\varepsilon = 0$

$$K^*(q) = k T_{\Pi} \left[\frac{e^q - 1}{(e^q - 1)^2} - \frac{1 - \gamma}{e^q - 1} \right] = \frac{k T_{\Pi} \gamma}{e^q - 1}.$$

Передаточная функция замкнутой системы

$$W^*(q) = \frac{K^*(q)}{1 + K^*(q)} = \frac{k T_{\Pi} \gamma}{e^q - (1 - k T_{\Pi} \gamma)}.$$

Система устойчива, так как корни знаменателя $W^*(q)$ по модулю меньше единицы: $\lambda = 1 - k T_{\Pi} \gamma = 1 - 1,6 = -0,6$, т. е. результат получается тот же, что и в предыдущем примере.

$$X_{\text{вых}}^*(q) = W^*(q) \cdot X_{\text{вх}}^*(q).$$

Изображение входной переменной

$$X_{\text{вх}}^*(q) = D \{1[n]\} = e^q (e^q - 1)^{-1}.$$

Следовательно,

$$X_{\text{вых}}^*(q) = \frac{kT_{\text{ц}} \gamma}{e^q - (1 - kT_{\text{ц}} \gamma)} \cdot \frac{e^q}{e^q - 1}.$$

Разложим правую часть (кроме e^q в числителе) на сумму простейших членов:

$$\begin{aligned} \frac{kT_{\text{ц}} \gamma}{[e^q - (1 - kT_{\text{ц}} \gamma)] (e^q - 1)} &= \frac{A}{e^q - (1 - kT_{\text{ц}} \gamma)} + \frac{B}{e^q - 1} = \\ &= \frac{e^q (A + B) - [A + (1 - kT_{\text{ц}} \gamma) B]}{[e^q - (1 - kT_{\text{ц}} \gamma)] (e^q - 1)}, \end{aligned}$$

откуда

$$A + B = 0; \quad A + (1 - kT_{\text{ц}} \gamma) B = -kT_{\text{ц}} \gamma$$

или $B = 1, \quad A = -1.$

Таким образом,

$$X_{\text{вых}}^*(q) = \frac{-e^q}{e^q - (1 - kT_{\text{ц}} \gamma)} + \frac{e^q}{e^q - 1}.$$

На основании таблиц изображений и оригиналов (см. приложение II) имеем:

$$\begin{aligned} -\frac{e^q}{e^q - (1 - kT_{\text{ц}} \gamma)} &\dot{\rightarrow} -(1 - kT_{\text{ц}} \gamma)^n; \\ \frac{e^q}{e^q - 1} &\dot{\rightarrow} 1[n] = 1, \end{aligned}$$

поэтому оригинал решетчатой функции

$$x_{\text{вых}}[n] = -(1 - kT_{\text{ц}} \gamma)^n + 1 = 1 - (-0,6)^n,$$

что совпадает с выражением (16.69). Переходный процесс будет аналогичен процессу, приведенному на рис. 16.15.

§ 16.10. Особенности расчета импульсных систем по методу z -преобразования

Передаточная функция импульсной системы при z -преобразовании получается на основе расчетной схемы. Передаточные функции разомкнутой и замкнутой систем при этом запишутся в виде

$$K^*(z) = P^*(z)/Q^*(z); \quad W^*(z) = K^*(z)/[1 + K^*(z)].$$

Дискретная передаточная функция определяется с помощью z -преобразования импульсной переходной функции приведенной непрерывной части системы, так как передаточная функция выражается через импульсную переходную функцию с помощью преобразования Лапласа. Имея импульсную переходную функцию $h'(t)$, по таблице z -преобразований можно непосредственно записать функцию $K^*(z)$ для приведенной непрерывной части (см. приложение III).

Функция $K(p)$ может быть преобразована к виду функции $K^*(z)$, например, по методу Боксера—Тэлера [Л. 36].
Используя (16.33), запишем

$$p = (1/T_n) \ln z.$$

Если разложить $\ln z$ в ряд

$$\ln z = 2 \left(y + \frac{1}{3} y^3 + \frac{1}{5} y^5 + \dots \right),$$

где

$$y = (1 - z^{-1}) / (1 + z^{-1}),$$

то, ограничиваясь первым членом разложения, можно получить

$$\frac{1}{p} = \frac{T_n}{\ln z} = \frac{T_n}{2} \cdot \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} = p^{-1}. \quad (16.70)$$

Формула (16.70) называется z -преобразованием относительно p . Аналогично могут быть получены выражения для p^{-k} [Л. 36].

$$\left. \begin{aligned} p^{-2} &= \frac{T_n^2}{12} \cdot \frac{1 + 10z^{-1} + z^{-2}}{(1 - z^{-1})^2}; \\ p^{-3} &= \frac{T_n^3}{2} \cdot \frac{z^{-1} + z^{-2}}{(1 - z^{-1})^3}; \\ p^{-4} &= \frac{T_n^4}{6} \cdot \frac{z^{-1} + 4z^{-2} + z^{-3}}{(1 - z^{-1})^4} - \frac{T_n^4}{720}; \\ p^{-5} &= \frac{T_n^5}{24} \cdot \frac{z^{-1} + 11z^{-2} + 11z^{-3} + z^{-4}}{(1 - z^{-1})^5}; \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (16.71)$$

Если известна передаточная функция приведенной непрерывной части импульсной системы, то, представив ее (посредством деления всех членов числителя и знаменателя на p^n) в виде функции p^{-k} , после подстановки (16.70) и (16.71) получим выражение $K^*(z)$.

В общем случае для преобразования $K(p)$ используется модифицированное z -преобразование, для некоторых типовых функций которого составлены таблицы [Л. 16, 36].

Модифицированное z -преобразование учитывает параметр смещения m и позволяет получить $K(z, m)$.

После того, как определена передаточная функция замкнутой системы, можно определить z -изображение выходной переменной при заданной форме входного сигнала и по формулам обращения найти оригинал функции переходного процесса. Аналогично дискретному преобразованию Лапласа здесь также широко используют справочные таблицы соответствия изображений и оригинала типовых функций предварительно разложив изображение на простейшие дроби.

При исследовании устойчивости в случае z -преобразования должно быть решено характеристическое уравнение замкнутой системы, составленное по $W^*(z)$:

$$F^*(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0.$$

Если модули всех корней меньше единицы ($|z| < 1$), то система устойчива.

Пример 16.3. Определим устойчивость импульсной системы с АИМ, изображенной на рис. 16.14, по методу z -преобразования, если линейная часть имеет передаточную функцию

$$K(p) = \frac{k_0}{p(T_1 p + 1)}. \quad (16.72)$$

Приведенная непрерывная часть системы с учетом формирующего звена имеет передаточную функцию

$$K_{\Pi}(p) = (1 - e^{-\gamma T_{\Pi}}) \cdot \frac{K}{p^2(T_1 p + 1)},$$

где $K = k_{\Pi} \cdot k_0$.

Численные значения параметров системы заданы: $K = 2$ 1/сек; $T_1 = 1$ сек; $T_{\Pi} = 1$ сек; $\gamma = 0,8$.

Передаточную функцию $K_{\Pi}(p)$ запишем в виде

$$K_{\Pi}(p) = \frac{K}{T_1} (1 - e^{-\gamma T_{\Pi}}) \left(-\frac{T_1^2}{p} + \frac{T_1}{p^2} + \frac{T_1^2}{p + 1/T_1} \right).$$

На основании этого выражения и таблиц изображений по Лапласу и z -преобразования (см. приложение III) получим передаточную функцию разомкнутой системы

$$K^*(z) = K \frac{[T_1(d - d^{(1-\gamma)}) + T_{\Pi}\gamma]z + [T_1(d^{(1-\gamma)} - d) - T_{\Pi}\gamma d]}{(z-1)(z-d)},$$

где $d = e^{-T_{\Pi}/T}$.

Передаточная функция замкнутой системы

$$\begin{aligned} W^*(z) &= \frac{K^*(z)}{1 + K^*(z)} = \\ &= \frac{K \{ [T_1(d - d^{(1-\gamma)}) + T_{\Pi}\gamma]z + [T_1(d^{(1-\gamma)} - d) - T_{\Pi}\gamma d] \}}{z^2 - \{ (1-d) - K [T_1(d - d^{(1-\gamma)}) + T_{\Pi}\gamma] \} z + \{ d + \{ d - K [T_1(d^{(1-\gamma)} - d) - T_{\Pi}\gamma d] \} \}}. \end{aligned}$$

Устойчивость импульсной системы в данном случае определяется полюсами функции $W^*(z)$ или корнями характеристического уравнения с учетом значений параметров:

$$z^2 - 0,672z + 0,684 = 0, \quad (16.73)$$

откуда $z_{1,2} = 0,336 \pm j 0,755$. Следовательно, $|z| = 0,76 < 1$ и импульсная система (см. рис. 16.14) при заданных параметрах и (16.72) устойчива.

§ 16.11. Понятие о методе ω -преобразования

Исследовать устойчивость импульсных систем можно и с помощью ω -преобразования. В этом случае

$$z = (1 + \omega)/(1 - \omega).$$

Это позволяет отобразить единичный круг плоскости z в левую полуплоскость на комплексной плоскости переменной ω . После такого преобразования получим характеристическое уравнение

$$b_0 \omega^n + b_1 \omega^{n-1} + \dots + b_{n-1} \omega + b_n = 0,$$

к которому можно применить критерий Гурвица. В соответствии с этим критерием запишем следующие условия устойчивости:

для $n = 1$

$$b_0 - a_1 > 0; \quad b_1 = a_0 - a_1 > 0;$$

для $n = 2$

$$b_0 = a_0 + a_1 + a_2 > 0;$$

$$b_1 = 2(a_0 - a_2) > 0;$$

$$b_2 = a_0 - a_1 + a_2 > 0;$$

для $n = 3$

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 > 0;$$

$$3(a_0 - a_3) - a_1 - a_2 > 0;$$

$$a_0(a_0 - a_2) - a_3(a_3 - a_1) > 0;$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 > 0;$$

$$a_0^2 - a_3^2 - a_0 a_2 + a_1 a_3 > 0.$$

Для рассмотренной в примере 16.3 системы, например, на основании (16.73) получим

$$2,356\omega^2 + 0,632\omega + 1,012 = 0,$$

где $b_0 = 2,356 > 0$, $b_1 = 0,632 > 0$ и $b_2 = 1,012 > 0$, т. е. условие устойчивости импульсной системы второго порядка выполняется.

Известно, что критерий Гурвица не позволяет выбрать параметры по заданным показателям качества, поэтому более удобным оказывается применение частотных методов.

Для перехода от z -преобразования к ω -преобразованию могут быть использованы справочные таблицы [Л. 16], составленные для типовых функций.

Рассматриваемое ω -преобразование соответствует отображению единичной окружности плоскости z в мнимую ось на плоскости ω , поэтому к функциям $K^*(\omega)$ могут быть применены частотные методы.

Учитывая (16.33), переменную ω выразим через круговую частоту (при $p = j\omega$):

$$\omega = \frac{z - 1}{z + 1} = \frac{e^{j\omega T_{ц}} - 1}{e^{j\omega T_{ц}} + 1} = \frac{e^{j\frac{\omega}{2} T_{ц}} - e^{-j\frac{\omega}{2} T_{ц}}}{e^{j\frac{\omega}{2} T_{ц}} + e^{-j\frac{\omega}{2} T_{ц}}}.$$

Используя формулы Эйлера, получим

$$\omega = j \operatorname{tg} \frac{\omega T_{\Pi}}{2} = jv; \quad (16.74)$$

$$v = \operatorname{tg} \frac{\omega T_{\Pi}}{2} = \operatorname{tg} \frac{\bar{\omega}}{2}. \quad (16.75)$$

На основании (16.75) обычную круговую частоту ω выразим через псевдо частоту v :

$$\omega = \frac{2}{T_{\Pi}} \cdot \operatorname{arctg} v. \quad (16.76)$$

Следовательно, подставляя (16.74) в выражение $K^*(\omega)$, получим частотные функции и используем частотный метод исследования импульсных систем.

Еще одним способом перехода от $K^*(z)$ к частотным функциям является обратный переход от z -преобразования к дискретному преобразованию Лапласа ($z = e^q$; $q = j\bar{\omega}$).

О расчете импульсных систем методом логарифмических характеристик. Используя замену $\omega = jv$, получим частотную функцию разомкнутой системы

$$K^*(jv) = A^*(v) e^{j\varphi^*(v)} = P_p(v) + jQ_p(v),$$

по которой построим либо АФХ, либо логарифмические характеристики.

Логарифмическая амплитудная характеристика определяется так же, как и в теории непрерывных систем:

$$G^* = 20 \lg A^*(v),$$

а логарифмическая фазовая характеристика $\varphi^*(v)$ характеризуется отношением мнимой и вещественной частей:

$$\varphi^*(v) = \operatorname{arctg} [Q_p(v)/P_p(v)].$$

При построении ЛАХ по оси ординат откладывается коэффициент усиления в децибелах, а при построении фазовой характеристики — угол в градусах. Соответственно по оси абсцисс откладывается псевдо частота в декадах или применяется логарифмическая сетка. Поскольку при исследовании импульсных систем относительная частота $\bar{\omega}$ изменяется в диапазоне от 0 до π , то соответственно (16.75) псевдо частота изменяется в диапазоне от 0 до ∞ .

Ранее было установлено, что частотная характеристика разомкнутой системы имеет конечное значение при $\bar{\omega} = \pi$, поэтому при больших v ЛАХ (кривая G^* , рис. 16.16) стремится к постоянной величине $20 \lg A(\pi)$, а фазовая характеристика — к значению $\varphi^* = 0$ или $\varphi^* = 180^\circ$.

Логарифмические характеристики импульсных систем могут быть построены либо по шаблонам типовых звеньев, либо по методу линейной асимптотической аппроксимации.

При построении логарифмических частотных характеристик импульсных систем выражения $K^*(\omega)$ в большинстве случаев представлены в виде суммы передаточных функций, что значительно усложняет построение. Несмотря на это, расчет с помощью логарифмических характеристик чрезвычайно удобен, позволяет исследовать устойчивость и качество переходного процесса, а также выбрать корректирующие устройства по заданным показателям качества с использованием известных в теории непрерывных систем номограмм, графиков и таблиц.

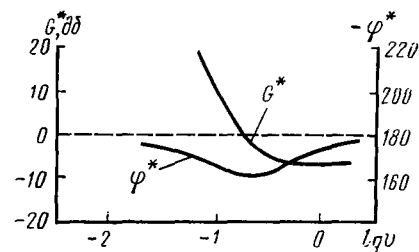


Рис. 16.16

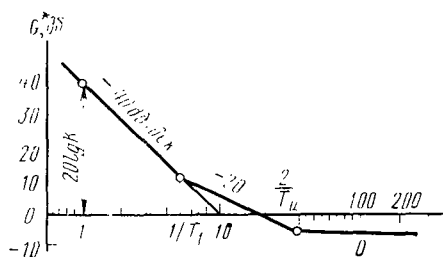


Рис. 16.17

В некоторых случаях передаточная функция $K^*(\omega)$ преобразуется к частотной с использованием вместо (16.74) выражения

$$\omega \approx j(T_{\Sigma}/2)\Omega^*, \quad (16.77)$$

где Ω^* — условная частота.

Полученная частотная функция используется для построения логарифмических характеристик обычными способами.

Пример 16.4. Построим ЛАХ импульсной системы, если, например, задана ω -передаточная функция [Л. 33]

$$K^*(\omega) = \frac{KT_{\Sigma}^2}{4} \cdot \frac{\left(1 + 2 \frac{T_1}{T_{\Sigma}} \omega\right)(1 - \omega)}{\omega^2}.$$

После подстановки (16.77) получим

$$K^*(j\Omega^*) = \frac{K(1 + jT_1\Omega^*)\left(1 - j\frac{T_{\Sigma}}{2}\Omega^*\right)}{(j\Omega^*)^2}. \quad (16.78)$$

Соответственно (16.78) при заданных параметрах ($K = 100$ 1/сек²; $T_{\Sigma} = 0,054$ сек; $T_1 = 0,2$ сек) обычными способами построим логарифмические частотные характеристики в логарифмическом масштабе или в полулогарифмической сетке (рис. 16.17).

§ 16.12. Особенности моделирования импульсных систем

При исследовании импульсных систем важное место занимают методы, использующие непрерывные моделирующие устройства и цифровые преобразователи.

Модель разомкнутой импульсной системы состоит из последовательных моделей соединенных моделей импульсного элемента и непрерывной части системы. Модель замкнутой импульсной системы образуется замыканием модели соответствующей разомкнутой импульсной системы. Непрерывная часть импульсной системы моделируется обычным способом.

Модель цифрового регулятора или импульсного элемента можно строить либо в виде фильтра из усилительных и запаздывающих звеньев, либо в виде фильтра с импульсным модулятором на выходе. В обоих случаях в схему модели должен входить элемент, запоминающий дискретные значения входа и выхода на один или несколько периодов повторения импульсов.

Модель импульсного элемента иногда называется *имитатором*. Модель импульсного элемента типа АИМ преобразует непрерывный сигнал в импульсы, высоты которых равны значениям непрерывного сигнала в дискретные моменты времени nT_c (рис. 16.18, а). Схема модели, осуществляющей амплитудно-импульсную модуляцию со скважностью $\gamma = 1$, показана на рис. 16.18, б.

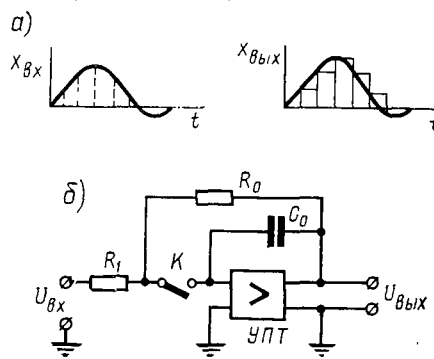


Рис. 16.18

Чтобы построить имитатор, целесообразно использовать стандартные операционные усилители той модели, на которой набираются уравнения непрерывной части моделируемой дискретной системы. В этом случае задача сопряжения имитатора или импульсного элемента с непрерывной частью системы решается просто.

Широкое распространение получила схема имитатора, представляющая собой типовую схему задания начальных условий на интеграторах машины (см. рис. 16.18, б). Схема состоит из операционного усилителя постоянного тока УПТ и ключа K , периодически замыкающегося на короткие промежутки времени. Период замыкания должен быть равен требуемому периоду дискретности T_c . Параметры схемы выбираются таким образом, чтобы за время замыкания ключа ΔT_0 конденсатор C_0 успел зарядиться до напряжения, равного входному. Это означает, что постоянная времени заряда конденсатора $\tau_{зар} = R_1 C_0$ должна быть значительно меньше ΔT_0 , но при этом $\Delta T_0 \ll T_c$. Для того чтобы амплитуда ступенчатого сигнала на выходе имитатора равнялась дискретным значениям входного сигнала, необходимо равенство сопротивлений R_1 и R_0 . В качестве периодически замыкающегося ключа K можно использовать контакт трехпозиционного поляризованного реле. Период замыкания задается отдельным генератором, например типа НГПК. Напряжение прямоугольной формы, снимаемое с этого генератора, проходит через дифференцирующую цепь и питает обмотку возбуждения поляризованного реле. Дифференцирующая цепь обеспечивает значение $T_c \gg \Delta T_0$.

Чтобы получить $0 < \gamma < 1$, необходимо на выходе имитатора

поставить дополнительный ключ, время замыкания которого должно совпадать с моментом замыкания ключа на входе, а размыкание должно производиться через время импульса $\gamma T_{\text{н}}$.

Пример 16.5. Определим методом моделирования график $x_{\text{вых}}[n]$ для импульсной системы с АИМ I рода, рассмотренной в примере 16.1. Схема набора на модели типа МН-7 с учетом имитатора I показана на рис. 16.19. На рис. 16.20, a

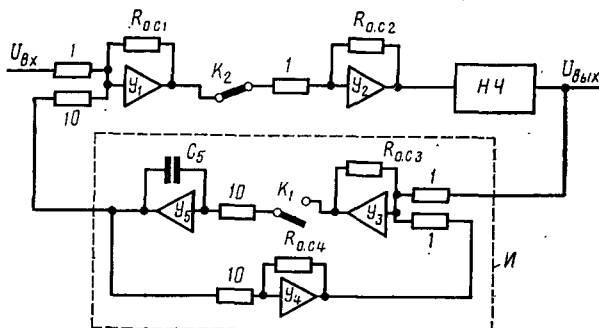


Рис. 16.19

показаны графики $x_{\text{вых}}[n]$ и $x_{\text{н.л.}}[n]$ для $\gamma = 0,8$ (сплошные) и $\gamma = 1$ (штриховые), а на рис. 16.20, б — графики для $\gamma = 0,5$ при единичном входном воздействии. График $x_{\text{вых}}[n]$ на рис. 16.20, а совпадает с полученным аналитически графиком на рис. 16.15.

Из сопоставления графиков на рис. 16.20, *а* и *б* следует, что для данной системы качество процесса тем лучше, чем меньше γ (при $\gamma = 0.5$ получено наи-

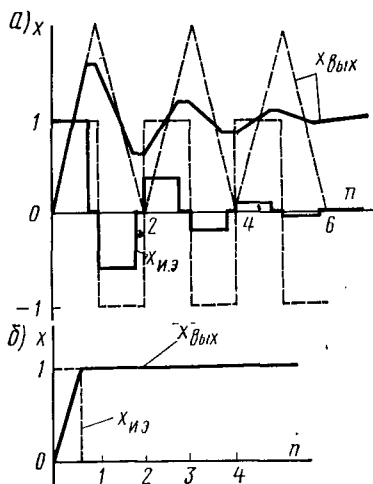


Рис. 16.20

меньшее время переходного процесса, равное одному периоду цикла). Таким образом, изменяя скважность, можно получить различные показатели качества процесса регулирования. В случае $\gamma = 1$ процесс является незатухающим колебательным (см. штриховые линии на рис. 16.20, а).

Если импульсный элемент является прерывателем (типа ключа), то его моделью будет ключ (АИМ II рода). В связи с этим на схеме (см. рис. 16.19) останется только один ключ K_2 , а имитатор исключится. Полученные в результате моделирования данной импульсной системы с прерывателем (АИМ II рода) процессы показаны на рис. 16.21: a — для $\gamma = 0,8$; b — для $\gamma = 0,5$. Из сопоставления рисунков видно, что чем больше γ , тем быстрее заканчивается процесс.

Аналогично указанному могут быть составлены модели других импульсных элементов и определен переходный процесс импульсной системы.

Пример 16.6. Определим методом моделирования график $x_{\text{вых}}[n]$ для импульсной системы, рассмотренной в примере 16.3.

Модель непрерывной части системы в данном случае соответствует передаточной функции

$$K(p) = 2[p(p+1)]^{-1}.$$

Переходные процессы системы с АИМ I рода показаны на рис. 16.22, а.

При заданных численных значениях параметров система устойчива, что совпадает с результатом аналитического исследования в примере 16.3. Переходный процесс в системе является колебательным затухающим.

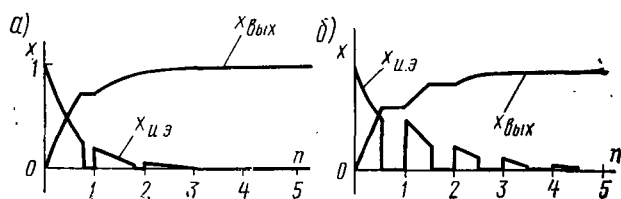


Рис. 16.21

На рис. 16.22, б показаны переходные процессы той же системы при тех параметрах в случае АИМ II рода (импульсный элемент типа ключа). Переходный процесс системы в этом случае является менее колебательным, чем при АИМ I рода.

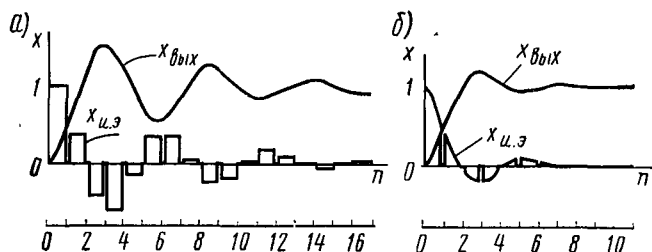


Рис. 16.22

Сопоставляя графики переходных процессов систем с АИМ I и II рода, можно сделать вывод, что система с АИМ II рода при прочих равных условиях имеет больший запас устойчивости, чем система с АИМ I рода.

Вопросы для самопроверки

1. Каково основное отличие импульсных систем от непрерывных?
2. Приведите классификацию импульсных элементов и систем.
3. Как составляется расчетная схема импульсной системы?
4. Чем отличаются решетчатые функции от непрерывных?
5. Как составляются разностные уравнения импульсных систем?
6. Как исследуется устойчивость импульсных систем по разностным уравнениям?
7. Для каких функций введено понятие о дискретном преобразовании Лапласа (приведите его основные формулы)?
8. Как используется дискретное преобразование Лапласа для исследования динамики импульсных систем?
9. Как построить АФХ импульсных систем и по ним определить устойчивость?
10. Каким образом можно оценить качество переходного процесса импульсных систем?
11. В чем состоит особенность z-преобразования и как применить его для расчета импульсных систем?

12. Как построить логарифмические характеристики импульсных систем?
13. В чем состоит особенность ω -преобразования и как оно применяется при расчете импульсных систем?
14. Какова особенность моделирования импульсных систем?

Глава 17

КОРРЕКЦИЯ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

Коррекция импульсных систем производится аналогично коррекции непрерывных систем. Это необходимо в тех случаях, когда при изменении настроечных параметров (в том числе и периода цикла T_c) невозможно получить требуемые показатели качества.

Корректирующие устройства импульсных систем можно разделить на две основных группы — непрерывные и дискретные.

§ 17.1. Применение непрерывных корректирующих устройств

Последовательная коррекция. В этом случае корректирующее устройство *КУ* включается последовательно на входе либо импульсного элемента *ИЭ* (рис. 17.1, а), либо непрерывной части *НЧ* (рис. 17.1, б). Это позволяет изменить частотные характеристики приведенной непрерывной части. Аналогичного эффекта можно достичь при изменении формы импульсов, что соответствует введению формирующего элемента,

который можно рассматривать как непрерывное корректирующее устройство.

Определение параметров последовательного корректирующего устройства непрерывного типа сложно, так как в данном случае корректирующее устройство при расчетах включается в приведенную непрерывную часть.

Наиболее простой способ расчета состоит в замене дискретной системы непрерывной системой, динамика которой близка к импульсной. Такая замена будет тем справедливее, чем ближе импульсная система к непрерывной, т. е. чем меньше интервал дискретности и больше инерционность непрерывной части системы.

Если импульсная система содержит импульсный элемент первого типа, то расчетная структурная схема (рис. 17.2, а) будет иметь простейший импульсный элемент, выходной сигнал которого является решетчатой функцией, и формирующий элемент с передаточной функ-

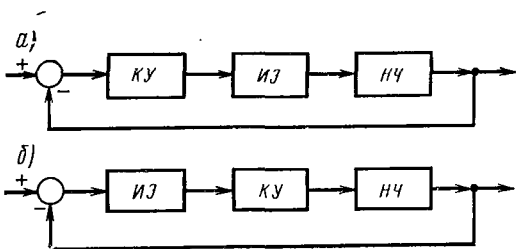


Рис. 17.1

цией (16.38). При малом периоде T_{Π} [см. (16.56)] частотная функция импульсной системы (для $u = 0$)

$$K_{\text{ск}}(j\omega T_{\Pi}) = K_{\text{и.з}}^{(1)} e^{-\frac{j\omega\gamma T_{\Pi}}{2}} K_{\text{к}}(j\omega T_{\Pi}) K(j\omega T_{\Pi}), \quad (17.1)$$

где принято

$$\frac{\sin(\omega\gamma T_{\Pi}/2)}{\omega\gamma T_{\Pi}/2} \approx 1.$$

Из (17.1) следует, что исходную импульсную систему при малом T_{Π} можно заменить приближенной непрерывной системой (рис. 17.2, б) с передаточной функцией:

$$K_{\text{экрв}}(q) = K_{\text{и.з}}^{(1)} K_{\text{к}}(q) K(q) e^{-q\frac{\gamma}{2}}. \quad (17.2)$$

На основании (17.2) приближенная непрерывная система, соответствующая импульсной, отличается от непрерывной части импульсной системы наличием безынерционного звена с коэффициентом усиления $K_{\text{и.з}}^{(1)}$ и звена с запаздыванием $\tau = \gamma T_{\Pi}/2$ (при $\gamma \approx 1$ можно принять $\tau = T_{\Pi}/2$).

После замены импульсной системы приближенной непрерывной системой параметры корректирующего устройства определяются методами расчета непрерывных систем, в частности логарифмическим методом.

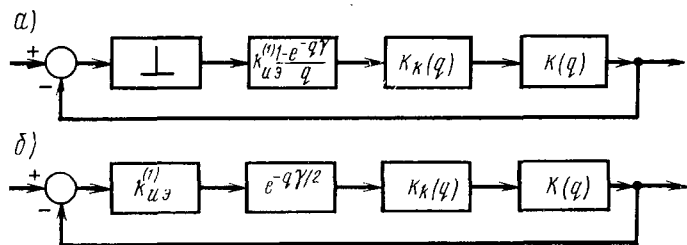


Рис. 17.2

Если импульсная система рассчитывается с помощью ω -преобразования, то параметры корректирующего устройства определяются по методу логарифмических характеристик импульсной системы. Однако после получения ω -передаточной функции корректирующего устройства возникает задача его синтеза.

Параллельная коррекция. Параллельное включение корректирующего устройства может быть согласным (рис. 17.3, а) или встречным в виде обратной связи (рис. 17.3, б).

Рассмотрим согласное включение корректирующего устройства параллельно некоторой непрерывной части (штриховая на рис. 17.3, а), что эквивалентно применению обратной связи, охватывающей импульсный элемент (рис. 17.3, б). Структурную схему можно привести к виду, когда параллельная цепь охватывает всю приведенную непрерывную часть системы (рис. 17.4, а). Обозначим при этом через $K_{\Pi}(q)$ пере-

точную функцию приведенной непрерывной части и через $K_{к.п}(q)$ передаточную функцию корректирующей параллельной цепи. Тогда передаточная функция разомкнутой импульсной системы

$$K_{ск}^*(q) = K_{п}^*(q) + K_{к.п}^*(q).$$

При $q = j\bar{\omega}$ частотная функция

$$K_{ск}^*(j\bar{\omega}) = K_{п}^*(j\bar{\omega}) + K_{к.п}^*(j\bar{\omega}). \quad (17.3)$$

Частотную характеристику скорректированной разомкнутой импульсной системы определим суммой векторов частотных характеристик приведенной непрерывной части и эквивалентной параллельной цепи (рис. 17.4, б).

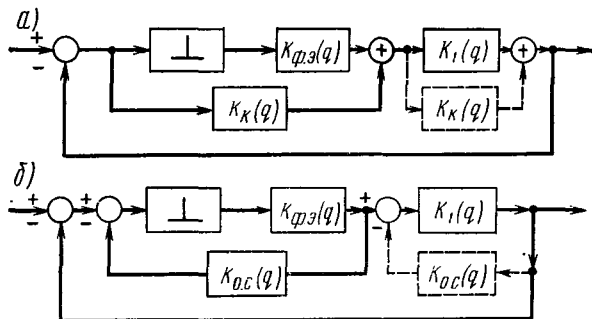


Рис. 17.3

Из (17.3) следует, что решение обратной задачи — определение частотной характеристики параллельной корректирующей цепи — может быть выполнено с помощью выражения

$$K_{к.п}^*(j\bar{\omega}) = K_{ск}^*(j\bar{\omega}) - K_{п}^*(j\bar{\omega}),$$

если известна желаемая частотная характеристика импульсной системы. Далее можно воспользоваться справочными таблицами [Л. 43],

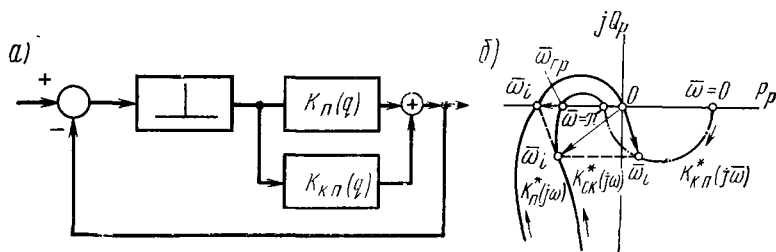


Рис. 17.4

по которым с учетом вида кривой $K_{к.п}^*(j\bar{\omega})$ определяется передаточная функция $K_{к.п}(q)$ и составляется принципиальная схема корректирующего устройства.

Аналогично решается задача по расчету параметров звена корректирующей обратной связи.

Параметры параллельных корректирующих устройств могут быть выбраны с помощью логарифмических характеристик, если используется ω -преобразование.

§ 17.2. Применение дискретных корректирующих устройств

Коррекция импульсных систем возможна также при помощи дополнительных импульсных цепей. Их особенность состоит в том, что выходная переменная представляет собой последовательность модулированных импульсов. Дополнительная импульсная цепь изменяет закон модуляции импульсов. Дискретное корректирующее устройство

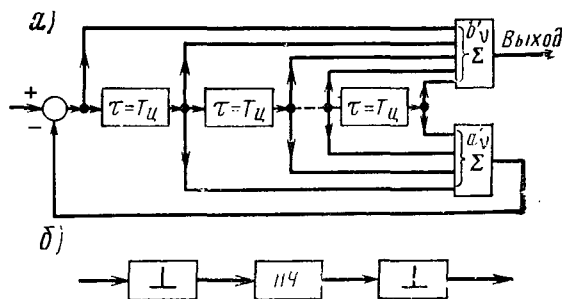


Рис. 17.5

во может быть представлено или в виде импульсного фильтра из элементов запаздывания (рис. 17.5, а), или в виде цифрового вычислительного устройства, или в виде эквивалентной импульсной системы, на выходе которой включен также импульсный элемент (рис. 17.5, б).

Если время запаздывания $\tau = T_u$, то передаточная функция дискретного корректирующего устройства, состоящего из элементов запаздывания,

$$K_{\text{д.к}}^*(q) = \frac{\sum_{v=0}^l b'_{l-v} e^{-qv}}{1 + \sum_{v=0}^l a'_{l-v} e^{-qv}},$$

где коэффициенты b'_v и a'_v определяются параметрами звеньев с запаздыванием.

Такое же выражение передаточной функции получается и по правилам структурных преобразований (см. рис. 17.5, а).

Подбором коэффициентов b'_v и a'_v можно в широких пределах изменять передаточную функцию дискретного корректирующего устройства.

Для корректирующего устройства типа эквивалентной импульсной системы передаточная функция определяется обычным для импульсных систем способом. Изменение параметров в этом случае достигается подбором непрерывной части корректирующего устройства. Однако здесь выражение $K_{\text{д.к}}^*(q)$ будет сложнее, чем в обычной импульсной

системе. Импульсная коррекция позволяет легко осуществить процессы конечной длительности.

Дискретные корректирующие устройства могут быть последовательными и параллельными.

Последовательная коррекция. При последовательной коррекции дискретное корректирующее устройство ДКУ включается между импульсным элементом ИЭ и непрерывной частью НЧ исходной импульс-

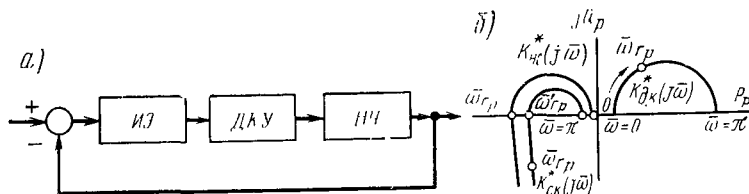


Рис. 17.6

ной системы (рис. 17.6, а). Передаточная функция скорректированной системы в данном случае будет определяться произведением:

$$K_{ск}^*(q) = K_{\partial,к}^*(q) K_{нс}^*(q).$$

В общем случае в передаточную функцию $K_{\partial,к}^*(q)$ может входить передаточная функция формирующей части основного импульсного элемента, а в $K_{нс}^*(q)$ — передаточная функция формирующей части дополнительного импульсного элемента.

Заменяв q на $j\bar{\omega}$, получим частотную функцию

$$K_{ск}^*(j\bar{\omega}) = K_{\partial,к}^*(j\bar{\omega}) K_{нс}^*(j\bar{\omega}). \quad (17.4)$$

На основании (17.4) частотная характеристика скорректированной импульсной системы определяется произведением векторов частотных характеристик дискретного корректирующего устройства и нескорректированной системы (рис. 17.6, б). Корректирующее устройство при этом рассчитывается по известной частотной характеристике нескорректированной системы и заданной по условиям качества частотной характеристике скорректированной системы:

$$K_{\partial,к}^*(j\bar{\omega}) = K_{ск}^*(j\bar{\omega}) / K_{нс}^*(j\bar{\omega}). \quad (17.5)$$

В случае использования ω -преобразования коррекция рассчитывается методом логарифмических характеристик.

При последовательной дискретной коррекции корректирующее устройство должно вносить положительный фазовый сдвиг на частотах $\bar{\omega}_{гр} \leq \bar{\omega} \leq \pi$.

Параллельная коррекция. Если дискретное корректирующее устройство ДКУ включено параллельно непрерывной части НЧ (рис. 17.7, а), то при определенных условиях передаточная функция скорректированной импульсной системы

$$K_{ск}^*(q) = K_{\partial,к}^*(q) + K_{нс}^*(q). \quad (17.6)$$

В общем случае в передаточные функции $K_{\partial,к}^*(q)$ и $K_{ис}^*(q)$ может входить передаточная функция формирующей части основного импульсного элемента.

Заменив в (17.6) q на $j\bar{\omega}$, получим частотную функцию скорректированной системы:

$$K_{ск}^*(j\bar{\omega}) = K_{\partial,к}^*(j\bar{\omega}) \cdot K_{ис}^*(j\bar{\omega}). \quad (17.7)$$

Соответственно (17.7) частотная характеристика скорректированной системы определяется суммой векторов частотных характеристик нескорректированной системы и дискретного корректирующего устройства.

Параметры дискретного корректирующего устройства рассчитываются либо по характеристикам нескорректированной системы

и заданной по условиям качества скорректированной системы, либо по логарифмическим характеристикам при использовании ω -преобразования, либо по корневым годографам.

Схема включения дискретного корректирующего устройства в виде обратной связи (рис. 17.7, б) может быть заменена эквивалентной схемой с согласным параллельным включением корректирующего устройства.

В практике проектирования автоматических систем иногда применяется параллельное согласное включение дискретного корректирующего устройства в непрерывных системах, что способствует улучшению качества таких систем. При этом системы рассчитываются методами импульсных систем.

Дискретные корректирующие устройства позволяют обеспечить любые виды переходных процессов (без перерегулирований, конечной длительности и др.) в зависимости от передаточной функции непрерывной части. Однако они требуют более сложного оборудования, чем непрерывные. Другим существенным недостатком дискретных корректирующих устройств, ограничивающим их применение в импульсных системах, является невозможность полного устранения скрытых колебаний между моментами съема.

Для коррекции импульсных систем используются также корректирующие устройства, работающие в функции внешнего воздействия. При этом коррекция по внешнему воздействию не влияет на устойчивость импульсных систем.

§ 17.3. Непрерывное регулирование как граница импульсного регулирования

Если период цикла $T_{ц}$ достаточно мал по сравнению с основными постоянными времени и инерционных звеньев непрерывной части импульсной системы, то систему можно рассматривать с достаточной для практики точностью как непрерывную и применять к ней методы ис-

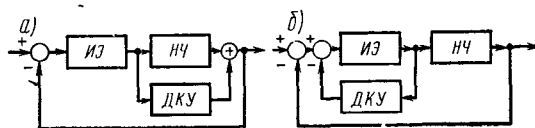


Рис. 17.7

следования непрерывных систем. Необходимость использования специальных методов исследования для импульсных систем возникает лишь в случае соизмеримости величины T_{Π} и постоянных времени звеньев системы.

При $T_{\Pi} \rightarrow 0$ естественно ожидать, что свойства импульсной системы будут приближаться к свойствам соответствующей непрерывной системы. Этот вопрос рассматривался ранее, когда было получено выражение (17.2) для импульсной системы I типа.

Действительно, при заданной частоте $\bar{\omega}_1 = \omega_1 T_{\Pi}$ значение T_{Π} будет тем меньше, чем больше значение ω_1 . [Если для $\omega > \omega_1$ модуль частотной характеристики приведенной непрерывной части очень мал и значениями $|K(j\omega)|$ при $\omega > \omega_1$ можно пренебречь, то из (16.50) и (16.51) можно установить, что

$$K^*(j\bar{\omega}) = K^*(j\omega T_{\Pi}) = \frac{1}{T_{\Pi}} K_{\text{н.э}} K(j\omega).$$

Следовательно, можно записать следующий предел:

$$\lim_{T_{\Pi} \rightarrow 0} T_{\Pi} K^*(p T_{\Pi}) = K_{\text{н.э}} K(p).$$

Таким образом, при $T_{\Pi} \rightarrow 0$ передаточная функция разомкнутой импульсной системы I и II типов стремится к передаточной функции непрерывной системы, состоящей из безынерционного усилителя $K_{\text{н.э}}$ (где $K_{\text{н.э}}^{(1)} = k_{\text{н.э}} \cdot \gamma$ или $K_{\text{н.э}}^{(2)} = k_{\text{н.э}} \kappa$) и из непрерывной части импульсной системы. Следовательно, при исследовании эквивалентной непрерывной системы следует вместо импульсного элемента принять безынерционное звено с передаточной функцией $K_{\text{н.э}}$ [Л. 43].

Для малых значений T_{Π} полученный вывод справедлив при существовании неравенства

$$T_{\Pi} |\operatorname{Re} q_v| \ll 1,$$

где $|\operatorname{Re} q_v|$ — наибольший модуль корня характеристического уравнения.

Кроме того, можно установить, что если при $\omega > \omega_{\text{ср}}$ модуль частотной характеристики $|K^*(j\bar{\omega})| \rightarrow 0$, то при $T_{\Pi} < \pi/\omega_{\text{ср}}$ свойства разомкнутых импульсных систем тождественны свойствам соответствующих непрерывных систем. Этот вывод тесно связан с теоремой В. А. Котельникова.

Следовательно, принцип импульсного регулирования можно применить для объектов с медленно протекающими процессами, что позволяет осуществить большие усиления и упростить аппаратуру, не изменяя при этом динамические свойства процессов (по сравнению с непрерывным принципом). Кроме того, принцип импульсного регулирования позволяет также обосновать вибрационную линеаризацию релейных систем, поскольку наложение внешних колебаний высокой частоты превращает релейную систему в импульсную систему II типа. В случае периода внешних колебаний $T_{\Pi} < \pi/\omega_{\text{ср}}$ такая система будет вести себя как линейная непрерывная система. Однако условие экви-

равалентности разомкнутых импульсной и непрерывной систем далеко не всегда достаточно для эквивалентности замкнутых систем. Дополнительное условие, определяющее эквивалентность также замкнутых импульсной и соответствующей непрерывной систем, устанавливается из рассмотрения частотных характеристик разомкнутых систем с учетом величины граничной частоты $\bar{\omega}_{гp}$, при которой частотная характеристика $K(j\bar{\omega})$ приведенной непрерывной части системы пересекает отрицательную вещественную полуось (см., например, рис. 17.4, а и рис. 17.6, б). Установлено [Л. 43], что в случае $\bar{\omega}_{гp} < \pi$ для эквивалентности замкнутых импульсной и соответствующей непрерывной системы достаточно, чтобы $T_{ц} \rightarrow 0$; в случае же $\bar{\omega}_{гp} = \pi$ кроме этого условия необходимо, чтобы мал был коэффициент усиления

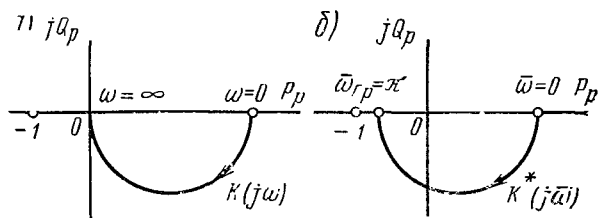


Рис. 17.8

ния разомкнутой импульсной системы по сравнению с критическим. Следует указать, что при малых $T_{ц}$ значение $\bar{\omega}_{гp} = \pi$, если непрерывная часть импульсной системы представляет собой звено первого или второго порядка либо если разность степеней числителя и знаменателя передаточной функции непрерывной части не превышает двух. И только для таких систем в условие эквивалентности импульсной и соответствующей непрерывной системы следует включать требование о малости коэффициента усиления разомкнутой импульсной системы по сравнению с критическим, так как соответствующие непрерывные системы при высоких частотах ведут себя как звенья первого или второго порядка без потери устойчивости. Тем не менее импульсная система при определенном (критическом) коэффициенте усиления разомкнутой системы может оказаться неустойчивой. В качестве примера приведем частотные характеристики непрерывной системы первого порядка (рис. 17.8, а) и импульсной системы, имеющей непрерывную часть первого порядка (рис. 17.8, б). Легко установить, что непрерывная система устойчива при любом коэффициенте усиления, в то время как импульсная система может оказаться неустойчивой при некотором коэффициенте усиления, большем критического.

Итак, для эквивалентности импульсной и соответствующей непрерывной замкнутых систем необходимо, чтобы выполнялось, во-первых, неравенство $T_{ц} < \pi/\omega_{сp}$ и, во-вторых, условие $\bar{\omega}_{гp} < \pi$. При $\bar{\omega}_{гp} = \pi$ необходимо выполнение требования малости коэффициентов усиления разомкнутой импульсной системы (меньше критического).

§ 17.4. Понятие о применении цифровых управляющих устройств

Для современной техники управления производственными процессами характерно широкое применение цифровых вычислительных машин, используемых не только для сбора и обработки информации, но и для непосредственного управления процессами.

Цифровая управляющая машина ЦУМ представляет собой одно из звеньев автоматической системы и включает в себя входное и выходное устройства, а также собственно цифровую вычислительную машину ЦВМ (рис. 17.9). Входное и выходное устройства осуществляют авто-

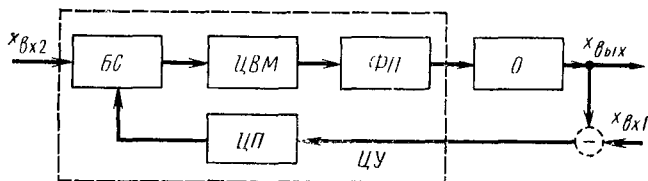


Рис. 17.9

матический ввод данных в ЦВМ и вывод результатов решения, т. е. обеспечивают автоматическую информационную связь цифровой машины с другими элементами системы.

В цифровом устройстве необходимый управляющий сигнал вычисляется по входным данным численными методами. Это обстоятельство вызывает необходимость иметь в цифровом устройстве ЦУ специальные узлы (см. рис. 17.9): аналого-цифровой преобразователь ЦП входных сигналов от датчиков, цифро-аналоговый (формирующий) преобразователь ФП управляющих сигналов, блок сравнения БС, цифровую вычислительную машину ЦВМ, включающую в себя арифметический блок, блок памяти, где хранятся необходимые для расчета данные, а также управляющий блок, который определяет программу работы вычислительного устройства.

Цифровое устройство управления является дискретным, поэтому автоматическая система является импульсной. Следовательно, методы исследования автоматических систем с цифровыми устройствами аналогичны методам исследования импульсных систем.

ЦВМ применяются также для коррекции импульсных систем или для сглаживания и предсказания дискретных данных, которые содержат помеху.

Обычно в цифровых устройствах используется кодовая импульсная модуляция, при которой с каждым фиксированным уровнем воздействия и процесса сопоставляется определенное кодовое сочетание импульсов (оно может быть охарактеризовано присвоенным ему номером в виде последовательности чисел). Цифровые устройства широко применяются в автоматических системах, так как обеспечивают быстрое решение различного рода задач с высокой точностью. Системы, содержащие цифровые устройства, называются *дискретными цифровыми системами*.

Системы с цифровым устройством, имеющие непрерывную выходную переменную, называются *импульсными системами*, а имеющие дискретную выходную переменную — *цифровыми системами*.

Передаточная и частотная функции цифрового устройства тождественны передаточной и частотной функциям некоторой импульсной системы. Таким образом, для выяснения свойств цифрового устройства, осуществляющего преобразование дискретных данных, можно воспользоваться результатами исследования импульсных систем. Цифровое устройство может быть реализовано, если его передаточную функцию или программу можно представить в виде дробно-рациональной функции от e^q (или z). Частотная характеристика цифрового устройства $K_{ц}(\bar{\omega})$ полностью определяется диапазоном частот $0 \leq \bar{\omega} \leq \pi$, где $\bar{\omega} = \omega T_0$, T_0 — интервал дискретности ЦВМ. Полоса пропускания цифрового устройства равна половине частоты дискретности:

$$\omega_{ц.у} = \omega_0/2 = \pi/T_0.$$

Если частота огибающей поступающих дискретных данных меньше $\omega_{ц.у}$, то цифровое устройство можно рассматривать как непрерывное устройство. Цифровое устройство должно иметь устойчивую ЦВМ со сходящимся вычислительным процессом.

В частных случаях цифровое устройство может являться аналогом импульсного элемента, непрерывного элемента или релейного элемента, что определяется соотношением частот среза системы и цифрового устройства.

Составление структурных схем автоматических систем с цифровыми управляющими машинами, их исследование и синтез в настоящее время недостаточно изучены. Имеется ограниченное количество работ, посвященных таким системам [Л. 39].

Вопросы для самопроверки

1. Какие типы корректирующих устройств используются в импульсных системах?
2. Какие способы включения корректирующих устройств наиболее широко распространены?
3. В каких случаях можно при расчете заменить импульсную систему эквивалентной непрерывной системой?
4. Какое условие должно быть выполнено, чтобы разомкнутые (а также замкнутые) импульсные и непрерывные системы были эквивалентны?
5. Что представляет собой цифровое управляющее устройство?
6. Какова область применения цифровых управляющих устройств?

**ВВЕДЕНИЕ
В СТАТИСТИЧЕСКУЮ ДИНАМИКУ
АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

До сих пор динамика автоматических систем рассматривалась при определенных заданных во времени воздействиях (детерминированные сигналы). Последние могут быть описаны аналитическими функциями, графиками и таблицами. Однако часто характер воздействия не является определенной функцией времени, а носит случайный характер. При этом можно оценить только вероятность появления той или иной формы воздействия в тот или иной момент времени. Например, на вход следящей системы радиолокационной установки вместе с полезным управляющим сигналом поступают помехи. При этом как полезный сигнал, так и помеха иногда являются случайными функциями.

Другим примером является система автоматического регулирования напряжения генератора, для которой возмущающее воздействие является результатом изменения нагрузки, зависящей от режима работы множества потребителей электрической энергии.

Поведение автоматических систем под влиянием случайных воздействий исследуется методом *статистической динамики* автоматических систем, базирующимся на теории вероятностей [Л. 8].

Применение статистических методов мало целесообразно, если воздействия представляют собой импульсы или внезапные произвольные изменения сигнала, хотя и имеющие случайную величину и возникающие в случайные моменты времени, но разделенные промежутками времени, достаточными для того, чтобы система успевала каждый раз приходиться в равновесное состояние. Наоборот, если воздействия являются случайными функциями и процесс их воспроизведения автоматической системой нельзя рассматривать как ряд следующих друг за другом переходов из одного равновесного состояния в другое (или прежнее), то применение статистических методов целесообразно.

В данном разделе кратко рассматриваются общие понятия о статистической динамике автоматических систем. При этом предполагается, что основы теории вероятностей [Л. 8] уже изучены.

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Анализ работы линейных автоматических систем при случайных процессах производится с помощью статистических характеристик сигналов. Основной задачей при этом является исследование точности и определение ошибок.

§ 18.1. Общие понятия о случайных процессах

Для математического описания случайных функций обычно используются следующие статистические характеристики: среднее значение функции, среднее значение квадрата функции, корреляционная функция и спектральная плотность случайных процессов и др.

Случайная функция, зарегистрированная в той или иной форме по результатам опыта, называется *реализацией случайной функции*. Случайные функции, для которых независимой переменной является время, называются *случайными процессами*.

В случайном процессе нет определенной зависимости $x(t)$, а каждая кривая (рис. 18.1) является лишь отдельной реализацией случайного процесса $x(t)$. Никогда нельзя сказать, по какой кривой пойдет процесс, даже если в какой-либо момент времени известно значение случайной величины. Статистический метод изучает не каждую из функций, характеризующих случайный процесс, а свойства всего множества в целом при помощи усреднения свойств входящих в него функций. Это означает, что при анализе какой-либо автоматической системы появляется возможность судить о ее поведении не по отношению к какому-либо одному определенному воздействию, представляющему заданную функцию времени, а по отношению к целой совокупности воздействий (в среднем).

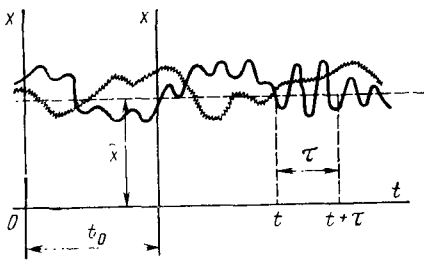


Рис. 18.1

Чтобы что-то знать о возможном характере протекания случайного процесса, надо оценить его какими-то вероятностными характеристиками.

Случайные процессы подразделяются на стационарные и нестационарные. Для стационарного случайного процесса закон распределения вероятности $w(x, t)$ не зависит от изменения начала отсчета времени (см. рис. 18.1), в то время как для нестационарного случайного процесса закон распределения вероятности $w(x, t)$ зависит от изменения начала отсчета времени (рис. 18.2).

Статистические характеристики. В каждый заданный момент времени t_k среднее значение случайного процесса

$$\tilde{x}(t_k) = \int_{-\infty}^{\infty} x w(x, t_k) dx. \quad (18.1)$$

Полученное среднее значение для стационарного случайного процесса характеризуется постоянным во времени числом $\tilde{x} = \text{const}$ (см. рис. 18.1); для нестационарного случайного процесса среднее значение является переменной во времени величиной $\tilde{x}(t)$ (см. рис. 18.2).

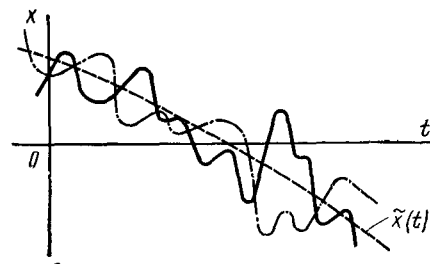


Рис. 18.2

В каждый заданный момент времени случайного процесса среднее значение квадрата случайной величины

$$\tilde{x}^2(t_k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 w(x, t_k) dx. \quad (18.2)$$

Дисперсия, характеризующая отклонение случайной величины от ее среднего значения в каждый заданный момент времени t_k случайного процесса,

$$\tilde{\sigma}^2(t_k) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \tilde{x})^2 w(x, t_k) dx = \tilde{x}^2(t_k) - [\tilde{x}(t_k)]^2. \quad (18.3)$$

Среднее значение случайного процесса представляет собой некоторую среднюю линию (см. рис. 18.1 и 18.2), около которой группируются все возможные отдельные реализации этого процесса, а дисперсия $\tilde{\sigma}^2(t_k)$ характеризует отклонение отдельных возможных реализаций процесса от этой средней линии.

Для стационарного случайного процесса значения $\tilde{\sigma}^2(t_k)$ — постоянные во времени числа, а для нестационарного процесса они изменяются во времени.

Кроме осредненных характеристик $\tilde{x}(t_k)$ и $\tilde{\sigma}^2(t_k)$, которые для каждого данного момента времени являются средними по множеству значений случайной величины, можно находить среднее значение по времени для отдельной реализации случайного процесса.

Среднее значение по времени $\overline{x(t)}$ определяется в данный интервал времени T , характеризующий всю возможную кривую $x(t)$ в целом (рис. 18.3):

$$\overline{x(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt. \quad (18.4)$$

Практически рассматриваемая кривая $x(t)$ не будет бесконечной, так как время наблюдения $2T$ всегда конечно.

Стационарные случайные процессы обладают замечательным свойством, которое известно под названием *эргодической гипотезы*. Оно состоит в следующем. Для стационарного случайного процесса всякое среднее по множеству равно среднему по времени:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x}(t) &= \overline{x(t)}; \\ \tilde{x^2}(t) &= \overline{x^2(t)}, \end{aligned} \right\} \quad (18.5)$$

где среднее значение по времени квадрата случайной величины определенной реализации случайного процесса

$$\overline{x^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt. \quad (18.6)$$

Эргодическая гипотеза сильно упрощает все расчеты и эксперименты. Она позволяет при определении среднего значения, дисперсии и других характеристик стационарного случайного процесса вместо параллельного испытания многих однотипных систем в один и тот же момент времени пользоваться одной кривой, полученной при испытании одной системы в течение достаточно длительного времени.

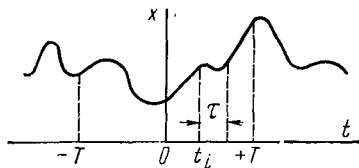


Рис. 18.3

Корреляционная функция. Если используется отдельная реализация стационарного случайного процесса (см. рис. 18.3), то *корреляционной функцией* стационарного случайного процесса называется среднее во времени значение за промежуток времени $T \rightarrow \infty$ от произведения случайных величин $x(t)$ и $x(t + \tau)$, взятых в случайном процессе в любые два момента времени, отличающиеся друг от друга на определенный промежуток времени τ :

$$R(\tau) = \overline{x(t) \cdot x(t + \tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) \cdot x(t + \tau) dt. \quad (18.7)$$

Для стационарного случайного процесса эта характеристика является универсальной, она будет одной и той же для всех случайных процессов, подчиненных одинаковому закону распределения.

При $\tau = 0$ из (18.7) находим

$$R(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt = \overline{x^2} = \tilde{x}^2, \quad (18.8)$$

т. е. при $\tau = 0$ значение корреляционной функции равно среднему значению квадрата случайной функции.

Корреляционная функция может быть вычислена аналитически или получена опытным путем с помощью специальных устройств, называемых *корреляторами* и *коррелографами*.

Физический смысл корреляционной функции заключается в том, что она является мерой взаимной связи между значениями $x(t)$ и $x(t + \tau)$ для одной и той же реализации случайного процесса.

Так как часто при расчетах автоматических систем входной сигнал $x_0(t)$ представляют двумя составляющими (полезного случайного сигнала и помехи), то необходимо выразить корреляционную функцию суммы двух функций $R_0(\tau)$ через корреляционные функции составляющих.

Такое выражение можно получить, используя (18.7) и учитывая, что $x_0(t) = x(t) + y(t)$:

$$R_0(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t) + y(t)] [x(t + \tau) + y(t + \tau)] dt,$$

откуда после преобразования

$$R_0(\tau) = R_x(\tau) + R_{xy}(\tau) + R_{yx}(\tau) + R_y(\tau),$$

где $R_{xy}(\tau)$ и $R_{yx}(\tau)$ — взаимные корреляционные функции:

$$\left. \begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) y(t + \tau) dt; \\ R_{yx}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t) x(t + \tau) dt. \end{aligned} \right\} \quad (18.9)$$

Взаимная корреляционная функция характеризует связь двух разных случайных процессов между собой в различные моменты времени, отстоящие друг от друга на величину τ . Если $\tau = 0$, то значение $R_{xy}(0)$ характеризует эту связь в один и тот же момент времени. Для несвязанных друг с другом процессов при всех τ значение $R_{xy}(\tau) = 0$.

Спектральная плотность. Для стационарных случайных процессов введено понятие о спектральной плотности $S(\omega)$. При этом существуют формулы связи между корреляционной функцией и спектральной плотностью:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau; \quad (18.10)$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (18.11)$$

Формула (18.10) является прямым преобразованием Фурье, а формула (18.11) — обратным преобразованием Фурье. Эти формулы

играют большую роль в теории статистической динамики автоматических систем.

Если имеются две случайные функции $x(t)$ и $y(t)$, то можно определить взаимные корреляционные функции $R_{xy}(\tau)$ и $R_{yx}(\tau)$. Далее по формуле (18.10) можно найти взаимные спектральные плотности

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau;$$

$$S_{yx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{yx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

§ 18.2. Оценка работы линейных автоматических систем при случайных сигналах

Оценить работу автоматических систем при сигналах внешних воздействий в виде стационарных случайных процессов можно с помощью корреляционных функций и спектральных плотностей.

В тех случаях, когда случайный процесс не является стационарным (рис. 18.4, а), необходимо решать задачу приближенно относительно скорости изменения сигнала случайного процесса [Л. 4]. При этом действительную кривую $x(t)$ рассматриваемой реализации случайного процесса заменяют прямолинейными участками, для которых скорость $x'(t)$ постоянна. Полученный в результате такой замены случайный процесс относительно $x'(t)$ является стационарным (рис. 18.4, б). Далее анализируется работа автоматической системы относительно полученного стационарного случайного процесса.

Если воздействие $x_{вх}(t)$ является случайным процессом, то ошибка воспроизведения сигнала $\varepsilon(t) = x_{вх}(t) - x_{вых}(t)$ и выходная переменная представляют собой также случайный процесс. Следовательно, при случайных воздействиях речь может идти об определении не мгновенных, а лишь некоторых средних значений ошибки и выходной переменной системы.

Таким средним значением является среднее значение квадрата ошибки:

$$\overline{\varepsilon^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \varepsilon^2(t) dt. \quad (18.12)$$

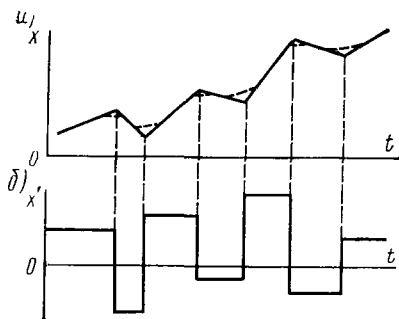


Рис. 18.4

Среднее значение квадрата случайной выходной переменной системы для стационарного случайного процесса определяется по формуле (18.8) с учетом (18.11)

$$\overline{x_{\text{вых}}^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вых}}(\omega) d\omega. \quad (18.13)$$

Аналогично определим среднее значение квадрата ошибки системы:

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\varepsilon}(\omega) d\omega. \quad (18.14)$$

Таким образом, для того чтобы получить $\overline{\varepsilon^2}$, необходимо предварительно найти спектральную плотность сигнала ошибки $S_{\varepsilon}(\omega)$ и далее вычислить значение интеграла (18.14). Если известна корреляционная функция сигнала ошибки $R_{\varepsilon}(\tau)$, то при $\tau = 0$ среднее значение квадрата ошибки

$$\overline{\varepsilon^2} = R_{\varepsilon}(0). \quad (18.15)$$

Следовательно, при исследовании статистической точности автоматических систем необходимо вычисление:

корреляционной функции и спектральной плотности ошибки или переменной на выходе системы, если известна корреляционная функция или спектральная плотность на входе системы;

интегралов от соответствующих спектральных плотностей (18.13) или (18.14).

Следовательно, на основании указанного можно анализировать работу линейных систем по известным функциям $R(\tau)$ и $S(\omega)$ случайного входного сигнала.

§ 18.3. Корреляционные функции ийәләтләр иҗәтиҗәһе һәм йонһәһәһе йонһәһәһе

Важнейшими вопросами статистической динамики автоматических систем является установление взаимосвязи между корреляционными функциями переменных входа и выхода системы, а также (особенно важно для практических расчетов) взаимосвязи между спектральными плотностями для сигналов входа и выхода системы. Для этого целесообразно воспользоваться известным интегральным уравнением, связывающим между собой выходную переменную, импульсную переходную функцию $x'_{\text{вых}}$ выходной переменной и входную переменную:

$$x_{\text{вых}}(t) = \int_0^t x_{\text{вх}}(t-\lambda) x'_{\text{вых}}(\lambda) d\lambda. \quad (18.16)$$

Полагая, что рассматриваемая реализация стационарного случайного процесса является произвольной функцией времени, изменя-

ющейся в диапазоне от $-\infty$ до $+\infty$, в (18.16) изменим пределы интегрирования:

$$x_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_{\text{вх}}(t-\lambda) x'_{\text{вых}}(\lambda) d\lambda. \quad (18.17)$$

значение функции, определяемое из (18.17) через интервал времени τ ,

$$x_{\text{вых}}(t+\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_{\text{вх}}(t+\tau-\lambda) x'_{\text{вых}}(\lambda) d\lambda. \quad (18.18)$$

Аналогичные выражения запишем для ошибки системы:

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_{\text{вх}}(t-\lambda) \varepsilon'(\lambda) d\lambda; \quad (18.19)$$

$$\varepsilon(t+\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_{\text{вх}}(t+\tau-\lambda) \varepsilon'(\lambda) d\lambda, \quad (18.20)$$

где ε' — импульсная переходная функция ошибки системы.

Из определения корреляционной функции (18.7) получим корреляционную функцию выходного сигнала системы:

$$R_{\text{вых}}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_{\text{вых}}(t) x_{\text{вых}}(t+\tau) dt. \quad (18.21)$$

Корреляционная функция сигнала ошибки системы

$$R_{\varepsilon}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \varepsilon(t) \varepsilon(t+\tau) dt. \quad (18.22)$$

Подставив в (18.21) выражения (18.17) и (18.18), после преобразований определим

$$R_{\text{вых}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x'_{\text{вых}}(\lambda) d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} x'_{\text{вых}}(\lambda_1) R_{\text{вх}}(\tau+\lambda-\lambda_1) d\lambda_1. \quad (18.23)$$

Аналогично для ошибки системы после подстановки (18.19) и (18.20) в (18.22) и преобразований запишем

$$R_{\varepsilon}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon'(\lambda) d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon'(\lambda_1) R_{\text{вх}}(\tau+\lambda-\lambda_1) d\lambda_1. \quad (18.24)$$

Выражение (18.23) устанавливает взаимосвязь между корреляционными функциями сигналов входа и выхода системы. По этому выражению можно определить корреляционную функцию выходного сигнала

системы, если известны корреляционная функция входного сигнала и импульсная переходная функция выходного сигнала замкнутой автоматической системы. Кроме того, по (18.24) можно найти корреляционную функцию ошибки системы, если известны корреляционная функция входного сигнала и импульсная переходная функция сигнала ошибки системы.

§ 18.4. Спектральная плотность выходной переменной и ошибки системы

Используя выражения (18.23), (18.24) и (18.10), можно получить формулы, устанавливающие зависимости между спектральными плотностями сигналов автоматической системы.

Добавив под знаком интеграла члены $e^{-j\omega(\lambda+\lambda_1)}$ и $e^{j\omega(\lambda+\lambda_1)}$ для выходного сигнала автоматической системы, запишем

$$S_{\text{ВЫХ}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\text{ВЫХ}}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} x'_{\text{ВЫХ}}(\lambda) e^{j\omega\lambda} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} x'_{\text{ВЫХ}}(\lambda_1) e^{-j\omega\lambda_1} d\lambda_1 \int_{-\infty}^{\infty} R_{\text{ВХ}}(\tau + \lambda - \lambda_1) e^{-j\omega(\tau + \lambda - \lambda_1)} d\tau.$$

Введем частотные функции системы $W(j\omega)$ и $W(-j\omega)$ и спектральную плотность входного сигнала $S_{\text{ВХ}}(\omega)$, тогда получим выражение, определяющее спектральную плотность выходного сигнала системы по заданной спектральной плотности входного сигнала:

$$S_{\text{ВЫХ}}(\omega) = W(j\omega) W(-j\omega) S_{\text{ВХ}}(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_{\text{ВХ}}(\omega), \quad (18.25)$$

где

$$W(-j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x'_{\text{ВЫХ}}(\lambda) e^{j\omega\lambda} d\lambda; \quad W(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x'_{\text{ВЫХ}}(\lambda_1) e^{-j\omega\lambda_1} d\lambda_1; \\ S_{\text{ВХ}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\text{ВХ}}(\tau + \lambda - \lambda_1) e^{-j\omega(\tau + \lambda - \lambda_1)} d\tau.$$

Аналогично для ошибки найдем выражение, позволяющее определить спектральную плотность ошибки системы по заданной спектральной плотности входного сигнала:

$$S_e(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_e(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = |W_{\Delta x}(j\omega)|^2 S_{\text{ВХ}}(\omega), \quad (18.26)$$

где $W_{\Delta x}(j\omega)$ — частотная функция замкнутой системы относительно ошибки.

§ 18.5. Способы вычисления среднего значения квадрата ошибки системы

Если (18.26) подставить в (18.14), то получим расчетную формулу

$$\bar{\varepsilon}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W_{\Delta x}(j\omega)|^2 S_{\text{вх}}(\omega) d\omega. \quad (18.27)$$

В тех случаях, когда в разных местах на систему действуют, например, два случайных независимых друг от друга (некоррелированных) воздействия $x_{\text{вх}}(t)$ и $f(t)$, спектральная плотность ошибки системы [Л. 4]

$$S_{\varepsilon}(\omega) = |W_{\Delta x}(j\omega)|^2 S_{\text{вх}}(\omega) + |W_f(j\omega)|^2 S_f(\omega), \quad (18.28)$$

где $W_f(j\omega)$ — частотная функция замкнутой системы относительно точек входа помехи $f(t)$ и выхода системы; $S_f(\omega)$ — спектральная плотность сигнала помехи $f(t)$.

При определении среднего значения квадрата общей ошибки системы $\bar{\varepsilon}^2$ на основании (18.27) и (18.28) необходимо найти отдельно $\bar{\varepsilon}_{\Delta x}^2$ для $x_{\text{вх}}(t)$ и $\bar{\varepsilon}_f^2$ для $f(t)$, а затем взять сумму:

$$\bar{\varepsilon}^2 = \bar{\varepsilon}_{\Delta x}^2 + \bar{\varepsilon}_f^2. \quad (18.29)$$

Чтобы оценить ошибку линейной автоматической системы при случайных процессах, необходимо вычислить интеграл (18.27). При этом могут быть применены различные способы.

Интегрирование с помощью табличных интегралов. Выражения для спектральной плотности обычно имеют вид:

$$S_{\varepsilon}(\omega) = h |G(j\omega)/H(j\omega)|^2, \quad (18.30)$$

где h — постоянный множитель, отображающий $S_{\text{вх}}(\omega)$ или $S_f(\omega)$.

Вместо (18.30) запишем:

$$S_{\varepsilon}(\omega) = h \frac{G(j\omega) G(-j\omega)}{H(j\omega) H(-j\omega)}. \quad (18.31)$$

Следовательно, определение среднего значения квадрата ошибки системы (18.27) сводится к вычислению интегралов вида

$$I = h \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(j\omega) G(-j\omega)}{H(j\omega) H(-j\omega)} d\omega. \quad (18.32)$$

Так как знаменатель является четной функцией частоты, то в числителе все члены с нечетной степенью ω дают при интегрировании нуль.

Если положить $I = hI_n$, то

$$I_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_n(\omega)}{H_n(j\omega) H_n(-j\omega)} d\omega, \quad (18.33)$$

$$\left. \begin{aligned} H_n(j\omega) &= a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n; \\ G_n(\omega) &\approx |G(j\omega)|^2 = b_0\omega^{2n-2} + b_1\omega^{2n-4} + \dots + b_{n-1}. \end{aligned} \right\} \quad (18.34)$$

В общем случае интеграл (18.33) для устойчивых систем можно записать в виде [Л. 4]

$$I_n = \frac{1}{2a_0} \cdot \frac{M_n}{\Delta_{n-1}}, \quad (18.35)$$

где

$$M_n = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}; \quad \Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Интегралы (18.35) можно вычислить в общем виде для любых степеней n полиномов (18.34) в функции коэффициентов a и b .

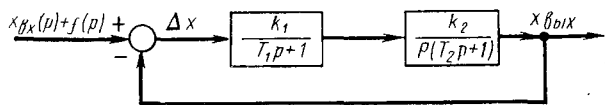


Рис. 18.5

Пример 19.1. Пусть на вход исследуемой автоматической системы (рис. 18.5) кроме полезного сигнала поступает помеха $f(t)$ в виде случайного процесса (белого шума):

$$S_f(\omega) = \gamma_f^2 = \text{const.} \quad (18.36)$$

Ошибка на выходе системы будет определяться передаточной функцией

$$W_f(p) = \frac{K(p)}{1 + K(p)}, \quad \text{где } K(p) = \frac{k_1 k_2}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)p},$$

или

$$W_f(p) = \frac{k_1 k_2}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)p + k_1 k_2} = \frac{G(p)}{H(p)},$$

где

$$H(p) = (T_1 p + 1)(T_2 p + 1)p + k_1 k_2; \quad G(p) = k_1 k_2.$$

Заменяя p на $j\omega$, после преобразований получим

$$\left. \begin{aligned} H_3(j\omega) &= T_1 T_2 (j\omega)^3 + (T_1 + T_2) (j\omega)^2 + j\omega + k_1 k_2; \\ G_3(\omega) &= k_1^2 k_2^2. \end{aligned} \right\} \quad (18.37)$$

Степень уравнения $H(j\omega)$ равна трем ($n = 3$), а $S_{\text{вх}}(\omega) = \text{const}$. Следовательно, чтобы вычислить среднее значение квадрата ошибки на выходе системы в результате действия помехи $f(t)$, используем формулу (18.35):

$$I_3 = \frac{b_2 a_0 a_1}{2a_0(a_1 a_2 - a_0 a_3)}.$$

Сопоставляя (18.34) и (18.37), получим:

$$a_0 = T_1 T_2; \quad a_1 = T_1 + T_2; \quad a_2 = 1; \quad a_3 = k_1 k_2; \quad b_0 = 0; \quad b_1 = 0; \quad b_2 = k_1^2 k_2^2.$$

Подставим значения этих коэффициентов в выражение для I_3 :

$$I_3 = \frac{k_1^2 k_2^2 (T_1 + T_2)}{2(T_1 + T_2 - T_1 T_2 k_1 k_2)}.$$

Среднее значение квадрата ошибки на выходе системы, обусловленной влиянием помехи $f(t)$ с учетом (18.36)

$$\bar{\epsilon}_f^2 = h I_3 = \gamma_f^2 \frac{k_1^2 k_2^2 (T_1 + T_2)}{2(T_1 + T_2 - T_1 T_2 k_1 k_2)}. \quad (18.38)$$

Если полезный сигнал на входе системы также является стационарным случайным процессом, то аналогично следует определить среднее значение квадрата ошибки $\bar{\epsilon}_{\Delta x}^2$ воспроизведения сигнала, используя выражение для $W_{\Delta x}(j\omega)$. Сумма величин $\bar{\epsilon}_f^2$ и $\bar{\epsilon}_{\Delta x}^2$ при этом будет характеризовать значение общей ошибки.

Если полезный сигнал $x_{\text{вх}}(t)$ на входе системы (см. рис. 18.5) является нестационарным случайным процессом, то среднее значение квадрата ошибки вычислим относительно производной от входного сигнала.

Если известно, что

$$W_{\Delta x}(p) = \Delta X(p) / X_{\text{вх}}(p),$$

то, разделив обе части равенства на p , получим

$$W_{\Delta x}'(p) = \frac{W_{\Delta x}(p)}{p} = \frac{\Delta X(p)}{p X_{\text{вх}}(p)} = \frac{\Delta X(p)}{L[dx_{\text{вх}}/dt]}. \quad (18.39)$$

Для системы, изображенной на рис. 18.5,

$$W_{\Delta x}'(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1 + K(p)} = \frac{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)p + k_1 k_2}.$$

Предположим, что спектральная плотность относительно производной является постоянным числом $S_{x'}(\omega) = \gamma_{x'}^2$, тогда среднее значение квадрата ошибки для полезного сигнала

$$\bar{\epsilon}_{\Delta x'}^2 = \gamma_{x'}^2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T_1^2 T_2^2 \omega^4 + (T_1^2 + T_2^2) \omega^2 + 1}{|T_1 T_2 (j\omega)^3 + (T_1 + T_2) (j\omega)^2 + j\omega + k_1 k_2|^2} d\omega = \gamma_{x'}^2 \cdot I_3. \quad (18.40)$$

Чтобы определить интеграл I_3 , в данном случае запишем

$$\left. \begin{aligned} H_3(j\omega) &= T_1 T_2 (j\omega)^3 \div (T_1 \div T_2) (j\omega)^2 \div j\omega \div k_1 k_2; \\ G_3(\omega) &= T_1^2 T_2^2 \omega^4 \div (T_1^2 \div T_2^2) \omega^2 \div 1. \end{aligned} \right\} \quad (18.41)$$

Сопоставляя (18.41) с (18.34), получим:

$$\begin{aligned} a_0 &= T_1 T_2; & a_1 &= T_1 \div T_2; & a_2 &= 1; & a_3 &= k_1 k_2; & b_0 &= T_1^2 T_2^2; \\ & & b_1 &= T_1^2 \div T_2^2; & b_2 &= 1. \end{aligned}$$

Пользуясь формулой (18.35), найдем

$$\bar{\epsilon}_{\Delta x}^2 = \gamma_{\Delta x}^2 \cdot I_3 = \gamma_{\Delta x}^2 \cdot \frac{k_1 k_2 (T_1^2 \div T_1 T_2 \div T_2^2) \div (T_1 \div T_2)}{2 (T_1 \div T_2 - T_1 T_2 k_1 k_2)}. \quad (18.42)$$

Среднее значение квадрата ошибки системы, определяемое выражениями (18.38) и (18.42), равно сумме:

$$\bar{\epsilon}^2 = \bar{\epsilon}_f^2 \div \bar{\epsilon}_{\Delta x}^2.$$

Используя выражения для ошибок системы при случайных воздействиях, можно выбрать какой-либо параметр из условия минимума среднеквадратической ошибки. Для этого необходимо взять производную от $\bar{\epsilon}^2$ по какому-либо параметру и приравнять нулю. Решая полученное уравнение относительно данного параметра, найдем его оптимальное значение.

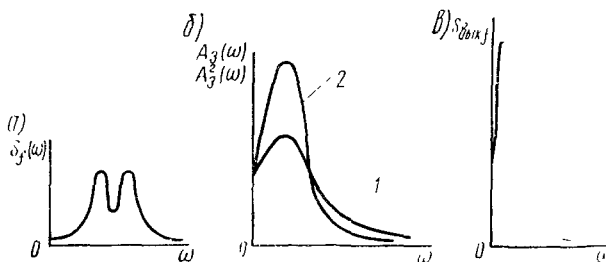


Рис. 18.6

Графическое вычисление интеграла от спектральной плотности. В случае сложных систем, а также при наличии графиков спектральной плотности случайных воздействий и частотных характеристик замкнутой системы значение интеграла (18.27) достаточно просто получается графически.

Для примера на рис. 18.6 представлены графики спектральной плотности помехи (рис. 18.6, а), поступающей на вход системы, и амплитудной частотной характеристики (кривая 1 на рис. 18.6, б замкнутой системы $A_3(\omega)$). Вычислив и построив график $A_3^2(\omega)$ (кривая 2), можно после перемножения $S_f(\omega)$ и $A_3^2(\omega)$, при одних и тех же частотах получить график $S_{\text{вых } f}(\omega)$, представленный на рис. 18.6, в. Далее можно определить площади, ограниченную осями частот и кривой $S_{\text{вых } f}(\omega)$, и после деления на π получить значение $\bar{\epsilon}_f^2$.

§18.6. Понятие о прохождении случайного сигнала через импульсную систему

Введем понятие случайной решетчатой функции* $f[n]$, которая получается из случайной непрерывной функции в результате введения $\bar{t} = t/T_{\text{к}}$ и замены $\bar{t} = n$.

Совокупность случайных решетчатых функций называется *решетчатым случайным процессом*. Последний является стационарным, если среднее значение процесса по времени равно среднему значению по множеству. Так, например, среднее по времени случайной решетчатой функции определяется суммой:

$$\overline{f[n]} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N f[n]. \quad (18.43)$$

Корреляционная функция случайного процесса является решетчатой функцией:

$$R[m] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N f[n] f[n+m]. \quad (18.44)$$

По известной корреляционной функции находится *спектральная плотность* решетчатого случайного процесса:

$$S^*(\bar{\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R[m] e^{-j\bar{\omega}m}. \quad (18.45)$$

Формула (18.45) предусматривает использование двустороннего дискретного преобразования Лапласа.

Спектральная плотность решетчатого случайного процесса получается из спектральной плотности непрерывного случайного процесса:

$$S^*(\bar{\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} S(\bar{\omega} + 2\pi r). \quad (18.46)$$

Корреляционная функция определяется по спектральной плотности:

$$R[m] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S^*(\bar{\omega}) e^{j\bar{\omega}m} d\bar{\omega} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} S^*(\bar{\omega}) \cos \bar{\omega}m d\bar{\omega}. \quad (18.47)$$

Среднее значение квадрата решетчатой функции

$$\overline{f^2[n]} = R[0] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} S^*(\bar{\omega}) d\bar{\omega}. \quad (18.48)$$

Спектральная плотность решетчатых случайных функций является периодической функцией частоты $\bar{\omega}$. На рис. 18.7, а и б для примера показаны графики решетчатой корреляционной функции $R[m]$ и спектральной плотности $S^*(\bar{\omega})$ соответственно.

* Общее понятие о решетчатых функциях было дано в §16.2.

При прохождении случайного сигнала через импульсную систему на выходе также будет иметь место случайный сигнал. Между характеристиками входного и выходного сигналов решетчатых случайных процессов имеется определенная взаимосвязь. Аналогично непрерывным системам можно установить зависимость между корреляционными функциями сигналов входа и выхода импульсной системы.

Для дискретного случайного выходного сигнала импульсной системы спектральная плотность выражается через спектральную плот-

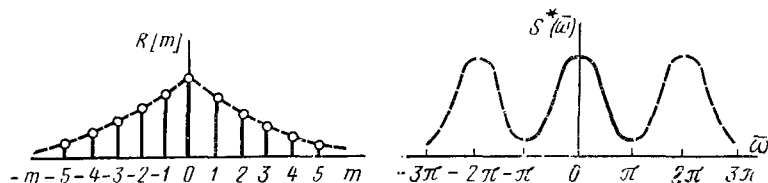


Рис. 18.7

ность входного случайного сигнала $S_{\text{вх}}^*(\bar{\omega})$ и частотную функцию системы. Если не учитывать параметр смещения, то можно записать зависимость

$$S_{\text{вых}}^*(\bar{\omega}) = |W^*(j\bar{\omega})|^2 S_{\text{вх}}^*(\bar{\omega}). \quad (18.49)$$

Влияние помех на работу импульсной системы оценивается с помощью среднего значения квадрата ошибки выходного дискретного сигнала:

$$\overline{(\Delta x)^2} = \bar{\varepsilon}^2 = R_{\Delta x}(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} S_{\Delta x}^*(\bar{\omega}) d\bar{\omega},$$

или с учетом (18.49):

$$\bar{\varepsilon}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |W_{\Delta x}^*(j\bar{\omega})|^2 S_{\text{вх}}^*(\bar{\omega}) d\bar{\omega}. \quad (18.50)$$

Вычислить интеграл (18.50) можно с помощью табличных интегралов.

Вопросы для самопроверки

1. Охарактеризуйте особенности метода статистической динамики автоматических систем.
2. На базе какой теории основан метод статистической динамики?
3. Какие статистические характеристики используются для анализа работы автоматических систем при случайных процессах?
4. Приведите основные формулы, определяющие среднее значение квадрата ошибки системы.
5. Напишите формулу для определения спектральной плотности выходного сигнала системы по заданной спектральной плотности входного сигнала.
6. Напишите формулу для определения спектральной плотности сигнала ошибки системы по заданной спектральной плотности входного сигнала.

7. Назовите и поясните основные способы вычисления среднего значения квадрата ошибки.

8. Как использовать метод статистической динамики, если полезный сигнал на входе системы является нестационарным случайным процессом?

9. Как определяется среднее значение квадрата ошибки импульсной системы?

Глава 19

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Если находящаяся под воздействием случайных сигналов автоматическая система является нелинейной, то исследование ее и расчет точности усложняются по сравнению с линеаризованной системой.

Закон распределения случайного процесса искажается за счет изменения коэффициента усиления нелинейного элемента в зависимости от величины входного сигнала. Кроме того, если вместе с полезным сигналом на вход системы поступает случайная помеха, то из-за нелинейного преобразования этих сигналов помеха может значительно уменьшить эффект действия полезного сигнала.

§ 19.1. Прохождение случайных сигналов через нелинейный элемент

Пусть на вход нелинейного элемента поступает сложный детерминированный сигнал; характеристика элемента $\varphi(x)$ имеет линейный участок и насыщение (рис. 19.1). Если, например, поступающий на вход такого элемента детерминированный периодический сигнал $x(t)$ имеет постоянную x^0 составляющую, то выходной сигнал будет иметь постоянную составляющую φ_0 . Эта составляющая будет значительно уменьшена, если колебания периодического сигнала происходят между предельными значениями $\pm S$ характеристики элемента.

Аналогичное явление происходит при прохождении случайного сигнала. Допустим случайный сигнал на входе нелинейного элемента $x(t)$ имеет среднее значение m_x , тогда при стационарном процессе и незначительном уровне колебаний среднее значение выходного сигнала нелинейного элемента m_φ будет отлично от нуля (рис. 19.2). Для линейного рабочего участка (для линейного элемента) среднее значение выходного сигнала m_φ пропорционально среднему значению входного сигнала $m_\varphi = km_x$. Если случайный сигнал несимметрично

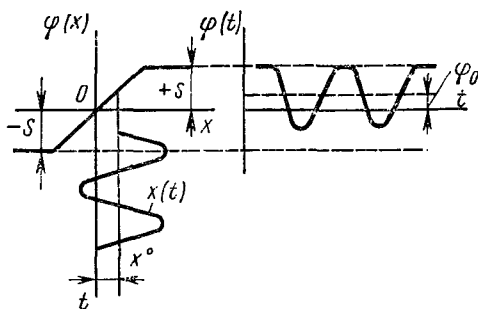


Рис. 19.1

ограничивается относительно среднего значения, то $m_\varphi < km_x$. В том случае, когда наблюдается колебание случайного сигнала между предельными значениями $\pm S$ нелинейного элемента, величина m_φ значительно уменьшается.

Таким образом, уровень колебаний случайного сигнала, определяемый дисперсией входного сигнала $\bar{\sigma}_x^2$, влияет на среднее значение выходного сигнала нелинейного элемента; при этом спектральный состав выходного сигнала изменяется по сравнению со спектральным составом входного сигнала, а следовательно, закон распределения случайного процесса искажается (см. рис. 19.2).

Если входной сигнал при $m_x = 0$ обладает нормальным законом распределения плотности вероятности $\omega(x)$, как указано на рис. 19.3, то для участка нелинейной характеристики в зоне насыщения плотность вероятности выходного сигнала $\omega(\varphi)$ равна нулю. Для линейного участка характеристики плотность вероятности выходного сигнала имеет нормальный закон распределения, а при значениях $\varphi(x) = \pm S$ будет бесконечно большой величиной, как показано на

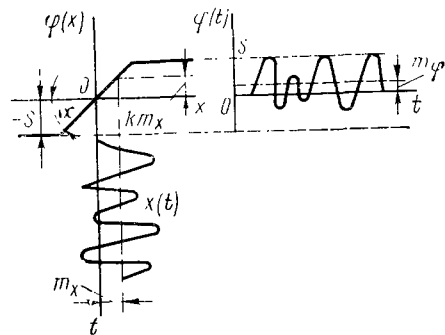


Рис. 19.2

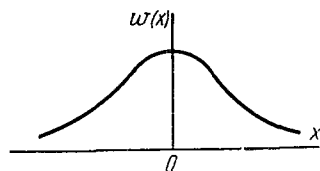


Рис. 19.3

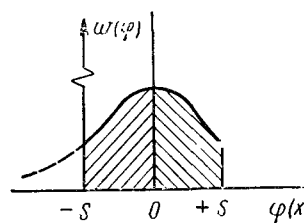


Рис. 19.4

рис. 19.4. В случае $m_x \neq 0$ кривые $\omega(\varphi)$ будут отличаться от показанных на рис. 19.4. Кривые плотностей вероятности входного $\omega(x)$ и выходного $\omega(\varphi)$ сигналов для различных нелинейностей имеют различный вид [л. 28].

§ 19.2. Статистическая линейаризация нелинейных элементов

Для нелинейных элементов и систем нет простой связи между средними значениями, корреляционными функциями и спектральными плотностями случайных выходного и входного сигналов. Однако такую зависимость можно формально получить, если заменить нелинейно-

преобразованием случайного сигнала некоторым эквивалентным линейризованным преобразованием. В связи с этим в практике расчета нелинейных систем при случайных сигналах получил широкое распространение приближенный метод, названный *методом статистической линейризации* [Л. 13]. Этот метод основан на замене нелинейного элемента статистически эквивалентным линейризованным элементом. Чтобы произвести такую замену, необходимо сформулировать критерии статистической равноценности этих элементов.

Существует два принципа, которые могут быть положены в основу метода статистической линейризации:

принцип минимума средней квадратической ошибки, обусловленной заменой нелинейного элемента приближенным линейризованным элементом;

принцип равенства средних значений и дисперсий случайных процессов на выходе нелинейного элемента и эквивалентного ему линейризованного элемента.

Оба принципа позволяют произвести приближенную статистическую линейризацию нелинейного элемента. Точность расчета в обоих случаях может быть различной в зависимости от постановки задачи.

Рассмотрим статистическую линейризацию для безынерционного нелинейного элемента по первому принципу. Пусть случайный сигнал на входе нелинейного элемента $x^0(t)$ является центрированным*, тогда сигнал на выходе нелинейного элемента $y(t) = \varphi[x^0(t)]$. При замене данного нелинейного элемента безынерционным линейным элементом со статистическим эквивалентным коэффициентом передачи $k_{с.экрб1}$, выходной сигнал представим в виде $y_1(t) = k_{с.экрб1} x^0(t)$. Ошибка, полученная в результате такой замены,

$$\varepsilon(t) = y(t) - y_1(t) = y(t) - k_{с.экрб1} x^0(t). \quad (19.1)$$

После возведения в квадрат равенства (19.1) для средних значений получим

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \overline{y^2(t)} - 2k_{с.экрб1} \overline{y(t)x^0(t)} + k_{с.экрб1}^2 \overline{x^{02}(t)}. \quad (19.2)$$

Выразим средние значения квадратов переменных через начальные значения корреляционных функций [см. (18.8)]:

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = R_y(0) - 2k_{с.экрб1} R_{yx}(0) + k_{с.экрб1}^2 R_x(0). \quad (19.3)$$

Найдем $k_{с.экрб1}$ из условия минимума среднего значения квадрата ошибки, используя (19.3). Для этого возьмем производную по $k_{с.экрб1}$ и приравняем ее нулю:

$$d\overline{\varepsilon^2(t)}/dk_{с.экрб1} = -2R_{yx}(0) + 2k_{с.экрб1} R_x(0) = 0, \quad (19.4)$$

откуда

$$k_{с.экрб1} = R_{yx}(0)/R_x(0). \quad (19.5)$$

* Центрированный входной сигнал -- это такой сигнал, для которого среднее значение равно нулю; в общем случае принимают $x^0(t) = x(t) - \bar{x}(t)$.

На основании (19.3) и (19.5) среднее значение квадрата ошибки

$$\overline{\varepsilon_{\text{мин}}^2}(t) = R_y(0) - R_{xy}^2(0)/R_x(0). \quad (19.6)$$

Значения $R_x(0)$ и $R_{yx}(0)$ выразим через плотность вероятности $w(x)$ входного стационарного случайного сигнала и нелинейную зависимость $\varphi(x)$:

$$R_x(0) = \overline{x^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) w(x, t) dx; \quad (19.7)$$

$$R_{yx}(0) = \overline{y(t)x^0(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t)x^0(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^0(t) \varphi(x) w(x) dx. \quad (19.8)$$

Для центрированного входного случайного сигнала нелинейного элемента $[x^0(t) = x(t) - \overline{x(t)}]$ на основании (18.3), (18.5) и (19.7) получим

$$R_x(0) = \sigma_x^2, \quad (19.9)$$

где σ_x^2 — дисперсия входного сигнала.

В связи с указанным вместо (19.5) запишем статистически эквивалентный коэффициент передачи по центрированному случайному сигналу

$$k_{\text{с. экв 1}} = \frac{1}{\sigma_x^2} \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - m_x] \varphi(x) w(x) dx, \quad (19.10)$$

где $m_x = \overline{x(t)}$ — математическое ожидание, равное среднему значению стационарного случайного сигнала.

Если входной случайный сигнал не является центрированным, т. е. его среднее значение отлично от нуля [$m_x = \overline{x(t)} \neq 0$], то при статистической линеаризации необходимо определить статистически эквивалентный коэффициент передачи по математическому ожиданию:

$$k_{\text{с. экв 0}} = m_y/m_x. \quad (19.11)$$

Таким образом, метод статистической линеаризации позволяет представить случайный сигнал на выходе нелинейного элемента в виде линеаризованной зависимости [Л. 13]:

$$\varphi[x(t)] = \varphi_0 + k_{\text{с. экв 1}} x^0(t), \quad (19.12)$$

где $\varphi_0 = k_{\text{с. экв 0}} m_x$.

Для второго принципа статистической линеаризации величина $k_{\text{с. экв 0}}$ определяется также выражением (19.11), а статистически эквивалентный коэффициент передачи по центрированному случайному сигналу равен квадратному корню отношения дисперсий [Л. 13]:

$$k_{\text{с. экв 2}} = \sqrt{\overline{\sigma_y^2}/\overline{\sigma_x^2}} = \pm \sigma_y/\sigma_x. \quad (19.13)$$

Обычно значение $k_{с.эКВ1}$ является несколько заниженным, а $k_{с.эКВ2}$ — несколько завышенным, поэтому рекомендуется брать среднееарифметическое значение

$$k_{с.эКВ} = (k_{с.эКВ1} + k_{с.эКВ2})/2. \quad (19.14)$$

При вычислении $k_{с.эКВ1}$ по (19.10) требуется знать закон распределения случайного процесса. В связи с тем, что при прохождении случайного сигнала через замкнутую систему инерционные звенья линейной части системы приближают закон распределения к нормальному, обычно в (19.10) принимают

$$w(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{[x(t) - m_x]^2}{2\sigma_x^2} \right\}. \quad (19.15)$$

Например, для идеального релейного элемента, нелинейная характеристика которого выражена зависимостью

$$\varphi(x) = 1 \cdot \text{sign } x = \begin{cases} +1 & \text{при } x > 0; \\ -1 & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

на основании (19.10) и (19.15) получим [Л. 8]

$$k_{с.эКВ1} = \frac{1}{\sigma_x^2} \cdot \overline{2/\pi}. \quad (19.16)$$

Статистическая линеаризация позволяет заменить характеристику нелинейного элемента характеристикой, линейной только относительно центрированной случайной составляющей, но нелинейной относительно среднего значения входного сигнала.

Изложенный метод применим только к системам, в которых невозможны автоколебания. Поэтому, прежде чем использовать этот метод, необходимо предварительно исследовать систему на автоколебания. Если в системе возможны автоколебания, то применяется метод совместной статистической и гармонической линеаризации.

§ 19.3. О совместной статистической и гармонической линеаризации

Входной сигнал нелинейного элемента автоматической системы иногда представляет собой сумму синусоидального сигнала определенной частоты и амплитуды и случайной функции:

$$z(t) = A \sin \omega t + x(t). \quad (19.17)$$

Если случайный сигнал представить в виде суммы среднего значения m_x и центрированной случайной составляющей $x^0(t) = X^0$:

$$x(t) = m_x + X^0,$$

то сигнал на входе нелинейного элемента запишется как

$$z(t) = m_x + A \sin \omega t + X^0. \quad (19.18)$$

В этом случае сигнал на выходе нелинейного элемента

$$\varphi(z) = \varphi(m_x + A \sin \omega t + X^0). \quad (19.19)$$

Если применить статистический метод гармонической линеаризации, то статистическая характеристика φ_0 нелинейного элемента и коэффициенты усиления по математическому ожиданию $k_{с.эКВ0}$ и по случайной составляющей $k_{с.эКВ1}$ будут периодическими функциями времени в силу периодической зависимости от времени математического ожидания входного сигнала $m_z(t)$.

Если применить метод гармонической линеаризации, то гармонические коэффициенты усиления $q(A)$ и $q_1(A)$ будут случайными величинами из-за случайной составляющей во входном сигнале $z(t)$, определяющей переменную случайную амплитуду.

Следовательно, целесообразно применять совместную статистическую и гармоническую линеаризацию.

Предположим, что математическое ожидание m_x и дисперсия $D_x = \sigma_x^2$ случайной составляющей $x(t)$ входного сигнала $z(t)$ нелинейного звена изменяются достаточно медленно для того, чтобы можно было считать их постоянными в пределах одного периода синусоидальной части входного сигнала. В этом случае можно произвести статистическую линеаризацию в пределах периода $T = 2\pi/\omega$ [см. (19.12)]:

$$\varphi[x(t)] \approx \varphi_0(m_x + A \sin \omega t, \sigma_x) + k_{с.эКВ1}(m_x + A \sin \omega t, \sigma_x) X^0(t). \quad (19.20)$$

Здесь показана явная зависимость φ_0 и $k_{с.эКВ1}$ от математического ожидания $m_z = m_x + A \sin \omega t$ и среднего квадратического отклонения входного сигнала нелинейного элемента.

Из-за наличия периодической составляющей в математическом ожидании m_z функции φ_0 и $k_{с.эКВ1}$ оказываются периодическими функциями времени. Следовательно, относительно них можно применить метод гармонической линеаризации нелинейного элемента. Согласно этому методу функции φ_0 и $k_{с.эКВ1}$ представим рядами Фурье и учтем для φ_0 постоянную составляющую и первую гармонику, а для $k_{с.эКВ1}$ только постоянную составляющую. В результате получим:

$$\begin{aligned} \varphi_0(m_z, \sigma_x) &\approx \varphi_0^*(A, m_x, \sigma_x) + q_{с.эКВ}(A, m_x, \sigma_x) A \sin \omega t + \\ &+ q_{с.эКВ1}(A, m_x, \sigma_x) A \cos \omega t; \\ k_{с.эКВ1}(m_z, \sigma_x) &\approx q_{с.эКВ2}(A, m_x, \sigma_x), \end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0^*(A, m_x, \sigma_x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_0(m_z, \sigma_x) d\psi; \\ q_{с.эКВ}(A, m_x, \sigma_x) &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} \varphi_0(m_z, \sigma_x) \sin \psi d\psi; \\ q_{с.эКВ1}(A, m_x, \sigma_x) &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} \varphi_0(m_z, \sigma_x) \cos \psi d\psi; \\ q_{с.эКВ2}(A, m_x, \sigma_x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_{с.эКВ1}(m_z, \sigma_x) d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (19.22)$$

Здесь $\psi = \omega t'$; t' — время, отсчитываемое внутри одного периода; функции φ_0 и $k_{c.эKB1}$ вычисляются по известным формулам статистической линеаризации с учетом использования формулы $\varphi(z) = \varphi(x + A \sin \psi)$ и нормального закона распределения для $\omega(x)$.

Функция φ_0^* равна постоянной составляющей функции φ_0 за период изменения гармонической составляющей. Коэффициенты $q_{c.эKB}$ и $q_{c.эKB1}$ представляют собой гармонические коэффициенты усиления для статистической характеристики φ_0 , получаемой из функции $\varphi(z)$ статистическим усреднением. Коэффициент $q_{c.эKB2}$ является усредненным значением коэффициента $k_{c.эKB1}$ за период изменения гармонической составляющей.

Если подставить (19.21) в (19.20), то получим приближенную зависимость для эквивалентной функции на выходе нелинейного элемента при выполнении совместной статистической и гармонической линеаризации:

$$\varphi[x(t)] = \varphi_0^* + q_{c.эKB} A \sin \omega t + q_{c.эKB1} A \cos \omega t + q_{c.эKB2} X^0. \quad (19.23)$$

К аналогичному выводу можно прийти, если произвести сначала гармоническую, а затем статистическую линеаризацию.

Для нечетных характеристик можно принять $\varphi_0^* = q_{c.эKB0} m_x$, тогда с учетом (19.22) коэффициент

$$q_{c.эKB0}(A, m_x, \sigma_x) = \frac{1}{2\pi m_x} \int_0^{2\pi} \varphi_0(m_z, \sigma_x) d\psi. \quad (19.24)$$

В некоторых случаях при изучении колебаний в нелинейных системах без учета случайных составляющих выходных сигналов нелинейных элементов последним слагаемым в (19.23) можно пренебречь. При этом параметры нелинейных колебаний зависят от случайных сигналов и являются функциями φ_0^* , $q_{c.эKB}$ и $q_{c.эKB1}$:

$$\varphi[x(t)] = \varphi_0^* + q_{c.эKB} A \sin \omega t + q_{c.эKB1} A \cos \omega t. \quad (19.25)$$

Таким образом, при совместной статистической и гармонической линеаризации нелинейная зависимость между входным и выходным сигналами нелинейного элемента заменяется приближенной эквивалентной зависимостью, нелинейной относительно постоянных или медленно меняющихся составляющих и линейной относительно быстро изменяющихся (синусоидальной и случайной) составляющих. Это позволяет использовать для приближенного исследования нелинейных систем при случайных внешних воздействиях методы теории линейных систем.

Кроме рассмотренных методов линеаризации нелинейных систем при случайных воздействиях разрабатываются аналитические методы, основанные на вычислении коэффициентов разложения по функциям Эрмита и Лагерра. Эти методы отличаются громоздкостью и значительной трудоемкостью.

**§ 19.4. Исследование точности
нелинейных автоматических систем
при стационарных случайных воздействиях**

Если устойчивая нелинейная система, находящаяся в равновесном состоянии, подвергается воздействию центрированной случайной помехи, то, применяя метод статистической линеаризации, можно определить среднеквадратическую ошибку системы, обусловленную сигналом помехи. Методика решения этой задачи заключается в следующем. Сначала составляется структурная схема системы с учетом замены нелинейного звена статистически линеаризованным звеном. Затем структурная схема системы преобразуется так, что в качестве выходного сигнала можно рассматривать сигнал на входе нелинейного элемента

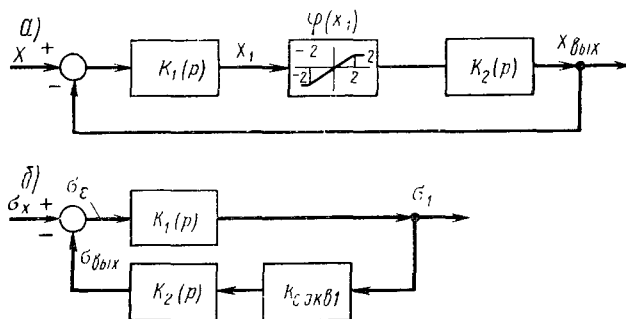


Рис. 19.5

замкнутой системы относительно среднеквадратических отклонений. После этого определяется спектральная плотность для входного сигнала нелинейного звена и находится среднее значение квадрата ошибки.

В связи с тем что выражения для $k_{c.экл}$ обычно являются сложными, задача может решаться графически с использованием кривой $k_{c.экл} = f(\sigma_x)$ для рассматриваемой нелинейной характеристики.

Пример 19.2. Предположим, что на входе системы (рис. 19.5, а) действует помеха в виде стационарного случайного процесса, математическое ожидание которой равно нулю ($m_x = 0$). Закон распределения плотности сигнала помехи является нормальным (гауссовым), спектральная плотность помехи $S_x(\omega)$ задана.

Сначала производим статистическую линеаризацию нелинейного элемента, заменяя его звеном с коэффициентом усиления $k_{c.экл}$ относительно центрированного входного сигнала помехи. Затем составляем эквивалентную структурную схему статистически линеаризованной системы относительно среднеквадратических отклонений, принимая в качестве выхода σ_1 (рис. 19.5, б). При этом передаточная функция замкнутой системы относительно входного сигнала нелинейного элемента σ_1

$$W_{\sigma_1}(p) = K_1(p) / [1 + K_1(p) k_{c.экл} K_2(p)].$$

При заданных $K_1(p) = 4$ и $K_2(p) = 1/p$ получим

$$W_{\sigma_1}(p) = 4p / (p + 4k_{c.экл}). \quad (19.26)$$

Спектральная плотность сигнала на входе нелинейного элемента определяется по структурной схеме и заданной спектральной плотности входного сигнала системы $S_x(\omega)$:

$$S_1(\omega) = |W_{\sigma_1}(j\omega)|^2 S_x(\omega). \quad (19.27)$$

Дисперсия (среднее значение квадрата) случайного сигнала на входе нелинейного элемента

$$\overline{\sigma_1^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega) d\omega. \quad (19.28)$$

Если спектральная плотность сигнала помехи задана выражением

$$S_x(\omega) = 2\pi \left(\frac{1,7}{1+j\omega} \cdot \frac{1,7}{1-j\omega} \right),$$

то, подставив его и (19.27) в (19.28), после аналитических преобразований и вычислений получим

$$\sigma_1 = 4,82 / \sqrt{1 + 4k_{с.экви}}. \quad (19.29)$$

Далее следует использовать график кривой $k_{с.экви}(\sigma_1)$ при $m_1 = 0$ для данной нелинейности (кривая 1), на который накладывается кривая $k_{с.экви}(\sigma_1)$, построенная по (19.29) с учетом значения $S = \pm 2$ (кривая 2 на рис. 19.6). Точка А пересечения этих кривых определяет значения $k_{с.экви} = 0,66$ и $\sigma_1 = 1,25 \cdot S = 2,5$. Далее с учетом структурной схемы определим $\sigma_e = \sigma_1/4 = 0,625$. Эта величина является среднеквадратическим значением ошибки рассматриваемой нелинейной системы при действии случайной помехи с заданной спектральной плотностью.

Если среднее значение сигнала помехи не равно нулю ($m_x \neq 0$), то следует использовать график зависимости $k_{с.экви}(\sigma_1)$ при соответствующем значении $m_1 = \cos \alpha$. На рис. 19.6 показана кривая 3, например, для $m_1 = 1$, поэтому при решении задачи следует рассматривать точку В пересечения кривых 2 и 3. Однако решение задачи в этом случае усложняется и необходимо дополнительно определять постоянную составляющую случайного сигнала на выходе системы [Л. 4, 28, 35].

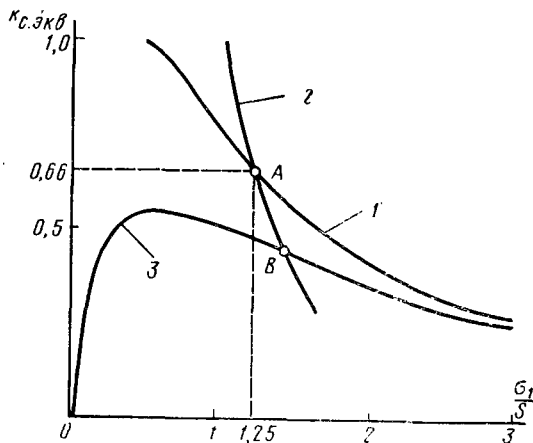


Рис. 19.6

В том случае, когда рассматривается прохождение помехи и переменного во времени полезного сигнала, среднее значение сигнала на выходе нелинейного звена является также переменным во времени. Решение такой задачи отличается значительной сложностью [Л. 4, 28, 35].

Целесообразно отметить, что устойчивая при отсутствии помех нелинейная система может при определенном уровне помех потерять

свои качества. С этой точки зрения учет фактически имеющихся в автоматической системе нелинейностей при наличии помех является важным для практики. Вместе с тем наличие такого высокочастотного сигнала может в некоторых случаях осуществлять вибрационную линеаризацию нелинейной системы относительно полезного сигнала.

§ 19.5. Методы улучшения качества работы автоматических систем при наличии помех*

Возможно создание схем, компенсирующих возмущающие воздействия помехи (см. рис. 11.3, а). При этом вводится условная обратная связь, замкнутая относительно возмущающего воздействия помехи и разомкнутая относительно задающего воздействия (рис. 19.7).

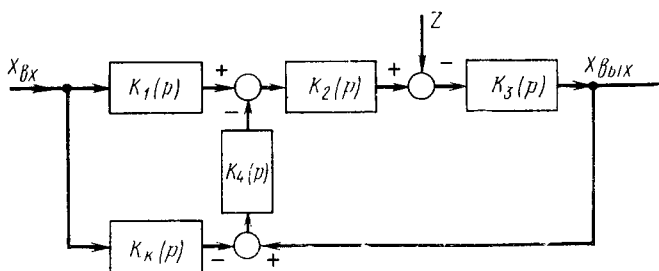


Рис. 19.7

Тогда в результате включения компенсирующего звена с передаточной функцией $K_{\kappa}(p)$ можно получить разомкнутую систему относительно задающего воздействия, если потребовать, чтобы

$$K_{\kappa}(p) = K_1(p) K_2(p) K_3(p). \quad (19.30)$$

При этом для возмущающего воздействия передаточная функция

$$W_z(p) = K_3(p) / [1 - K_2(p) K_3(p) K_4(p)]. \quad (19.31)$$

Для задающего воздействия по правилам структурных преобразований получим

$$W(p) = \frac{[K_1(p) + K_{\kappa}(p) K_4(p)] K_2(p) K_3(p)}{1 + K_2(p) K_3(p) K_4(p)},$$

или, с учетом (19.30) после преобразований

$$W(p) = K_1(p) K_2(p) K_3(p). \quad (19.32)$$

Анализируя (19.31) и (19.32), устанавливаем, что система замкнута относительно сигнала $z(t)$ и разомкнута относительно сигнала $x_{вх}(t)$,

* Определение оптимальной передаточной функции системы из условия минимума среднеквадратической ошибки рассмотрено в гл. 20 при построении оптимальных по точности систем.

г. е. воспроизводит задающий сигнал $x_{\text{вх}}(t)$ и компенсирует влияние помех в виде возмущающих воздействий $z(t)$.

При весьма инерционном объекте нет необходимости строить систему по минимуму среднеквадратической ошибки при случайных воздействиях. Помехи $f(t)$ здесь почти не проходят на выход и не создают сколько-нибудь заметной ошибки.

Способ введения фильтра на входе системы или фильтра на входе сигнала ошибки, как это было указано выше, кроме исключения помех приводит к запаздыванию воспроизведения полезного сигнала $x_{\text{вх}}(t)$.

Чтобы выделить полезный сигнал $x_{\text{вх}}(t)$ на входе системы и подавить помехи, применяются схемы с фильтрами, использующие два источника информации о результирующем сигнале на входе. На рис. 19.8 показана схема, служащая для выделения полезного сигнала $x_{\text{вх}}(t)$ при наличии низкочастотных $\alpha(t)$ и высокочастотных $f(t)$ помех.

На вход 1 подается полезный сигнал $X_{\text{вх}}$ и помеха $f(t)$, а на вход 2 — полезный сигнал $X_{\text{вх}}$ и помеха $\alpha(t)$. Оба результирующих сигнала подведены к системе с одним интегрирующим звеном и двумя входами.

При этом выходной сигнал будет содержать полезный сигнал и помехи, подавленные соответственно уровню частот. Для подтверждения этого составим передаточные функции замкнутой системы относительно входов 1 и 2:

$$\left. \begin{aligned} W_1(p) &= (Tp + 1)^{-1}; \\ W_2(p) &= Tp(Tp + 1)^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (19.33)$$

Результирующий сигнал с учетом (19.33):

$$\begin{aligned} X(p) &= X_1(p) + X_2(p) = W_1(p) [X_{\text{вх}}(p) + f(p)] + \\ &+ W_2(p) [X_{\text{вх}}(p) + \alpha(p)] = [W_1(p) + W_2(p)] X_{\text{вх}}(p) + \\ &+ W_1(p) f(p) + W_2(p) \alpha(p). \end{aligned}$$

Поскольку в данном случае из (19.33) имеем

$$W_1(p) + W_2(p) = \frac{1}{Tp + 1} + \frac{Tp}{Tp + 1} = 1, \quad (19.34)$$

$$X(p) = X_1(p) + X_2(p) = X_{\text{вх}}(p) + \frac{1}{Tp + 1} f(p) + \frac{Tp}{Tp + 1} \alpha(p).$$

Таким образом, в данном случае полезный сигнал $x_{\text{вх}}(t)$ передается без искажений, высокочастотная помеха $f(t)$ подавляется инерционным звеном $W_1(p)$, а низкочастотная помеха $\alpha(t)$ подавляется реальным дифференцирующим звеном $W_2(p)$. Схемы, подобные приведенной на

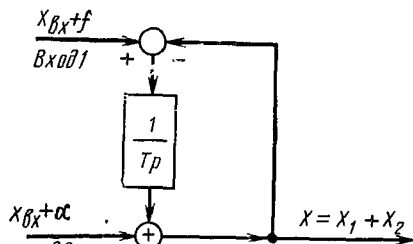


Рис. 19.8

рис. 19.8, позволяют выделить полезный сигнал на входе и ввести его в автоматическую систему при ослаблении сигналов помех. Чтобы получить такой эффект, необходимо выполнить условие (19.34) для передаточных функций фильтров относительно двух входов.

Вопросы для самопроверки

1. Как влияет случайная помеха на величину полезного сигнала на выходе нелинейного элемента?
2. Что означает статистическая линеаризация?
3. Каково влияние случайных сигналов на работу нелинейных автоматических систем?
4. Как определяется ошибка нелинейной системы при случайных сигналах?
5. В каких случаях необходимо применять совместную статистическую и гармоническую линеаризацию?
6. Как выделить полезный сигнал при наличии помех?

ПОНЯТИЕ ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ И САМОНАСТРАИВАЮЩИХСЯ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ



Дальнейшее развитие теории и практики автоматического управления связано с выявлением предельных возможностей систем и построением систем, наилучших (оптимальных) по какому-либо технико-экономическому показателю.

В настоящем разделе рассматриваются понятия о простейших оптимальных системах, а также о более сложных оптимальных системах, обладающих свойствами самонастройки.

В простейших оптимальных системах обеспечивается заданный критерий качества при детерминированных сигналах и неизменных параметрах объекта. Системы, в которых заданный критерий качества обеспечивается автоматически посредством изменения ее параметров или структуры при случайных сигналах, переменных параметрах и характеристиках объекта, являются самонастраивающимися.

Самонастраивающиеся системы следует рассматривать как дальнейшее развитие оптимальных систем, когда показатель оптимальности обеспечивается при различных внешних условиях за счет элементов самонастройки.

Глава 20

ПОНЯТИЕ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ

Автоматическая система, которая обеспечивает наилучшие показатели качества при заданных реальных условиях работы и ограничениях, называется *оптимальной*. Возможны два способа получения оптимальной системы. В первом известна структура системы и надо найти оптимальные значения ее числовых параметров, при которых обеспечивается заданный критерий оптимальности. Во втором — система считается полностью неизвестной и требуется определить ее структуру и параметры так, чтобы она была оптимальной по принятому критерию качества (синтез системы).

В большинстве практических задач возможны значительные отступления от оптимальных параметров и структуры без существенного ухудшения качества системы. При этом либо упрощают исходные уравнения динамики объекта в случае синтеза оптимальной структуры системы, либо упрощают полученную структуру после решения задачи по исходным уравнениям объекта. Это позволяет конструктору варьировать структуру и изменять параметры в широких пределах для удовлетворения требований, предъявляемых к системе, среди которых важное значение имеют требования простоты и надежности. Полученные таким образом системы являются близкими к оптимальным и называются *квазиоптимальными*.

§ 20.1. Показатели (критерии) оптимальности автоматических систем

Задачи об улучшении статических и динамических характеристик автоматических систем ставились на протяжении всей истории развития теории автоматического управления. Однако проблема создания оптимальных систем достаточно строго и четко сформулирована только после того, как было точно определено понятие критерия оптимальности, характеризующего качество работы системы. Критерий оптимальности должен удовлетворять ряду условий.

В качестве критерия оптимальности могут быть приняты различные технические и технико-экономические показатели и оценки. Например, он может отражать технико-экономическую выгоду (производительность, к. п. д., прибыль и т. п.), тогда оптимальное управление должно обеспечивать максимум критерия оптимальности. Он может выражать также потери (расход энергии, топлива, средств и т. п.); в этом случае оптимальное управление должно обеспечивать его минимум.

Основными критериями качества автоматических систем являются стоимость разработки, изготовления и эксплуатации системы (C); качество функционирования (K); надежность (H); потребляемая энергия (W); вес (G); объем (V); внешние условия нормального функционирования (Φ — температура, давление, влажность и т. д.). Каждый из этих критериев является некоторой функцией нескольких переменных.

Выбор критерия оптимальности — это инженерная или инженерно-экономическая задача, которая решается на основе глубокого и всестороннего изучения управляемого процесса. Трудности выбора критерия оптимальности объясняются тем, что требования, предъявляемые к работе системы, часто оказываются противоречивыми. Например, желательно всегда иметь максимально надежную, простую и дешевую систему. Однако повышение надежности связано с усложнением и увеличением стоимости, а упрощение — с ухудшением некоторых показателей качества. Кроме того, трудность выбора критерия оптимальности связана с тем, что сложность решения задачи зависит от сложности формулировки критерия.

Если показателю качества отражает большинство из требований, то найти структуру и оптимальные параметры системы можно только численными методами для какой-либо частной задачи. Если же требуется найти решение в явной форме, то должны быть использованы простые показатели качества, которые не могут отразить многие из требований.

При проектировании автоматических систем один из указанных критериев будет иметь доминирующее значение, а другие — второстепенное значение. При этом возможны различные подходы к решению задачи синтеза оптимальной системы управления. При одном из них синтез системы производится так, что какой-либо из критериев принимает экстремальное значение, а остальные не выходят из области допустимых значений. При таком подходе, сравнивая конкурирующие системы, нельзя получить однозначного ответа. Кроме того, в этом случае не используются все возможности улучшения системы по основным критериям.

От этих недостатков в принципе свободен обобщенный критерий: $J = F(C, K, H, W, G, V, \Phi)$, однако при построении его можно встретить ряд трудностей, преодолеть которые не всегда удастся.

Широко распространены в теории управления интегральные функционалы, характеризующие качество функционирования системы. В общем случае интегральный функционал зависит от выходных координат $x_i(t)$, координат управления $u_j(t)$ и возмущающих воздействий $z_k(t)$:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; z_1, z_2, \dots, z_m) dt. \quad (20.1)$$

Достижение максимального (или минимального) значения этого функционала указывает на оптимальное поведение или состояние системы.

В связи с этим при построении оптимальных систем функционал вида (20.1) характеризует либо наилучшее поведение системы в динамике, либо наилучшие показатели в установившихся режимах. При этом наиболее часто рассматривают задачи обеспечения минимума отклонений переменных за время переходного процесса при единичном входном воздействии, обеспечения минимума времени переходного процесса и обеспечения минимума среднеквадратической ошибки при заданных или случайных сигналах. В задачах обнаружения сигналов, где имеет значение не величина ошибки, а лишь качественный факт ее наличия или отсутствия, приходится пользоваться другими критериями оптимальности, например, критериями минимума вероятности ошибочного решения, условного минимума вероятности ошибочного решения, минимума среднего риска и др. [Л.28].

Не затрагивая вопроса обоснований выбора критерия оптимальности, укажем некоторые его типы, подразделяя критерии оптимальности в зависимости от их принадлежности к переходному или установившемуся режиму работы системы.

В качестве критерия оптимальности (20.1) могут быть применены интегральные оценки качества переходного процесса при единичном входном воздействии (см. гл. 11). При использовании, например, квадратичной интегральной оценки система будет оптимальной, если обеспечивается минимум интеграла

$$J = \int_0^{\infty} \Delta x^2 dt = \min. \quad (20.2)$$

Этот критерий оптимальности характеризует суммарную ошибку автоматической системы за время переходного процесса и минимальные отклонения выходной переменной.

Если рассматривается критерий минимума времени переходного процесса при единичном воздействии и заданных ограничениях для некоторых координат ($J = \int_{T_1}^{T_2} dt = T_2 - T_1 = \min$), то полученная система является *оптимальной по быстродействию*.

Для обеспечения минимума ошибки автоматических систем при случайных сигналах может быть использована среднеквадратическая ошибка системы. В этом случае критерий оптимальности [см. (20.1)]

$$J = \bar{\epsilon}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \Delta x^2 dt = \min \quad (20.3)$$

используется при определении параметров системы и оптимальной передаточной функции из условия минимума среднеквадратической ошибки.

Чтобы определить оптимальную систему по критериям минимума вероятности ошибочного решения, необходимо знать закон распределения случайного сигнала и входной случайной функции. Однако в случае нормального закона распределения, наиболее часто встречающегося на практике, для упрощения задачи приходится ограничиваться определением оптимальной системы по критерию минимума ошибки (20.3). При нормальном законе распределения сигнала и помех эта система оказывается оптимальной с точки зрения многих других критериев.

В тех случаях, когда необходимо обеспечить наилучшую работу системы в наихудших возможных условиях, используется критерий оптимальности, называемый *минимаксным*. Такой критерий рассматривается, например, при получении минимального значения наибольшего (максимального) отклонения (перерегулирования) управляемой переменной от некоторой заданной функции во времени.

Нельзя ставить задачу одновременного обеспечения оптимума для двух или более функций одной или нескольких переменных. Можно ставить лишь задачу получения оптимума одной функции или функционала, но при этом накладывать дополнительные условия об ограничении других функций или функционалов. В связи с этим иногда применяют комбинированные критерии, устанавливая некоторую допустимую область в пространстве некоторого вектора $\mathbf{X}$, за пределы

которой нельзя выйти, а некоторая функция (критерий) $J_1(X)$ достигает минимума.

Встречаются также типы задач по определению оптимальных решений, когда имеются две стороны, интересы которых противоположны, и каждая сторона стремится получить максимальную выгоду для себя. Эти задачи являются предметом сравнительно нового раздела теории вероятности, так называемой теории игр, которая пока еще недостаточно разработана.

§ 20.2. Классификация оптимальных систем

В простейшем случае оптимальные системы классифицируются по виду критерия оптимальности. А. А. Фельдбаумом предложена классификация оптимальных систем по характеристикам управляемых объектов; по требованиям, предъявляемым к объектам; по характеру информации об объекте, поступающей в управляющее устройство (или регулятор).

По характеристикам объектов оптимальные системы могут быть разделены на линейные и нелинейные, а также на непрерывные и дискретные. При этом учитываются различные ограничения (по величине регулирующего воздействия, нагреву, механической прочности и т. д.). Сюда можно отнести также характеристики возмущающего воздействия, прикладываемого к объекту. Если возмущающие воздействия, складываясь с другими воздействиями, поступают на вход объекта, не изменяя его характеристик, то они называются *аддитивными*. Иногда эти возмущения вызывают изменение коэффициентов уравнений объекта; такие воздействия называются *параметрическими*. Возмущающие воздействия могут быть также *случайными величинами* или *случайными процессами*.

По требованиям, предъявляемым к объекту, устанавливается цель управления. Это позволяет классифицировать оптимальные системы в зависимости от типа критерия оптимальности:

равномерно-оптимальные системы (каждый отдельный процесс является оптимальным);

статистически-оптимальные системы, когда невозможно (или не требуется) обеспечить наилучшее поведение системы в каждом отдельном процессе, а критерий оптимальности имеет статистический характер из-за случайных воздействий; такие системы должны быть наилучшими в среднем;

минимаксно-оптимальные системы, когда какой-либо наихудший результат лучше, чем подобный наихудший результат в любой другой системе.

По характеру информации об объекте, поступающей в управляющее устройство, оптимальные системы подразделяются на системы с полной и неполной информацией. Информация об объекте складывается из информации о зависимости между входными и выходными переменными объекта; возмущающем воздействии; состоянии объекта; цели управления, т. е. функционале, определяющем критерий оптимальности; информации о задающем воздействии.

Фактически в любых системах автоматического управления информацией об объекте нельзя считать полной, т. е. абсолютно точной, и часто отсутствие информации того или иного вида имеет чрезвычайно существенное значение. В ряде случаев это требует применения статистических методов при решении поставленной задачи и сложных видов управления объектом. Неполнота информации об объекте требует изучения его во время процесса управления с целью обеспечения установленного критерия оптимальности. При неполной информации автоматическая система должна обладать свойством приспособляемости (адаптивности, или самонастройки) и учитывать изменения информации об объекте.

Таким образом, самонастраивающиеся автоматические системы отражают дальнейшее развитие оптимальных систем. Эти системы являются более сложными и будут рассмотрены в гл. 21.

§ 20.3. Основные вопросы теории оптимальных систем

К одной из основных задач теории оптимальных систем может быть отнесена оптимизация системы по точности, с которой воспроизводится подаваемый на вход системы полезный сигнал. Математически эта задача сводится к нахождению оптимальной структуры системы, обеспечивающей наилучшие показатели качества.

В идеальном случае при решении задачи могут быть использованы методы вариационного исчисления. Однако в большинстве практических задач приходится учитывать ограничения, накладываемые на возможные изменения переменных и их производных, поэтому полное решение задачи вариационными методами невозможно. В связи с этим в теории оптимальных систем разработаны принцип максимума Понтрягина, метод динамического программирования Беллмана и др. [Л.4, 40, 52].

Теория оптимальных систем позволяет определять операции, которые должна производить оптимальная система над входной функцией, чтобы удовлетворить установленному критерию оптимальности. В случае разработки оптимальных по быстродействию систем требуется найти закон (алгоритм) изменения управляющего воздействия, обеспечивающий оптимальный переходный процесс.

Теория оптимальных систем позволяет оценить предельные возможности, которые могут быть достигнуты в оптимальной системе, и обосновать постановку вопроса о создании оптимальной системы в каждом конкретном случае.

§ 20.4. Системы, оптимальные по быстродействию

Задача по созданию оптимальных по быстродействию автоматических систем возникает при разработке следящих систем, автоматических компенсаторов, систем управления приводами прокатных станов, систем управления ракетами, подъемных устройств, систем

автоматизации химических и металлургических процессов, а также в ряде других устройств и энергетических установок.

Быстродействие автоматических систем может быть повышено за счет применения различного рода форсирующих и корректирующих устройств. Достижимое при этом ускорение процессов неизбежно связано с увеличением диапазона отклонения управляющих сигналов. Если бы эти переменные могли принимать любые сколь угодно большие значения, то быстродействие системы можно было бы повышать беспредельно. Однако во всякой реальной системе управляющие сигналы не могут (или не должны) превышать некоторых предельных значений, определяемых конструкцией элементов (крайние положения регулирующего органа, насыщение и др.) или техническими требованиями, предъявляемыми к системе (механическая прочность, сохранение изоляционных материалов и т. д.). Указанные ограничения должны учитываться при построении оптимальных по быстродействию систем.

Понятие об оптимальной по быстродействию системе и оптимальном процессе управления. Рассмотрим вопрос о создании оптимального по быстродействию автоматического компенсатора (рис. 20.1, а), который служит для измерения и регистрации переменного во времени напряжения E .

Компенсатор измеряет разность ΔU между измеряемым E и компенсирующим U напряжениями. Компенсирующее напряжение снимается с движка потенциометра Π , получающего питание от стабилизированного источника постоянного тока, величина напряжения U_0 которого больше E . В установившемся режиме при неизменном E имеет место компенсация напряжений ($E = U$ и $\Delta U = 0$). В этом случае положение движка потенциометра соответствует напряжению E . При отклонении напряжения E появившаяся разность ΔU поступает на вход усилителя $У$, который управляет работой исполнительного двигателя $Д$, перемещающего через редуктор $Р$ движок потенциометра Π таким образом, чтобы ликвидировалось появившееся рассогласование ΔU и выполнялось равенство $U = E$.

Когда обеспечена высокая точность компенсации и напряжение E изменяется достаточно медленно, условие $\Delta U = 0$ поддерживается с требуемой точностью. Однако если E может меняться с большой быстротой, требуется создать быстродействующий компенсатор. Наиболее трудным является случай, когда напряжение E изменяется скачком. В идеальной системе напряжение U изменилось бы при этом также скачком, обеспечивая равенство $\Delta U = 0$. В реальной же системе такой скачок невозможен из-за инерционности усилителя и

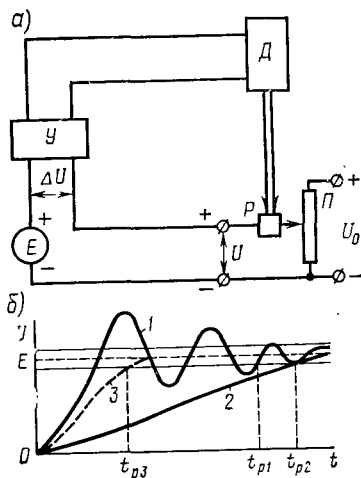


Рис. 20.1

исполнительного двигателя, поэтому напряжение U на выходе потенциометра изменяется с отставанием во времени.

Система будет оптимальной по быстродействию, если переходный процесс имеет возможно минимальное время с учетом имеющихся ограничений по моменту на валу исполнительного двигателя, по ускорению при его разгоне и установившейся скорости вращения вала двигателя.

Допустим, что динамика системы (см. рис. 20.1, а) определяется характеристическим уравнением второго порядка:

$$T^2 p^2 + 2\tau p + 1 = 0. \quad (20.4)$$

При малых значениях коэффициента демпфирования ρ переходный процесс $U(t)$ при скачкообразном изменении напряжения E имеет

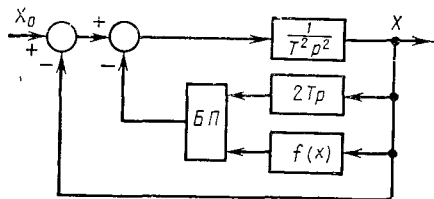


Рис. 20.2

резко колебательный характер (кривая 1 на рис. 20.1, б).

В этом случае имеется значительное перерегулирование и большая длительность процесса t_{p1} . Если увеличить коэффициент демпфирования, то процесс $U(t)$ будет апериодическим (кривая 2 на рис. 20.1, б), длительность процесса t_{p2} также увеличится.

Переходный процесс можно

значительно улучшить, если при больших значениях ΔU коэффициент ρ будет мал, а при малых ΔU , наоборот, велик. Тогда в начальной части кривая $U(t)$ будет близко проходить около кривой 1. С уменьшением разности ΔU коэффициент ρ увеличивается. При этом время регулирования значительно уменьшится, и переходный процесс окажется апериодическим (кривая 3 на рис. 20.1, б).

В данном случае коэффициент демпфирования изменяется в зависимости от величины отклонения ΔU , поэтому система должна быть нелинейной. Следовательно, для оптимальной по быстродействию автоматической системы второго порядка вместо (20.4) в общем случае следует записать нелинейное характеристическое уравнение

$$T^2 p^2 + 2Tf(x)p + 1 = 0, \quad (20.5)$$

где $f(x)$ — функция, определяющая коэффициент демпфирования.

Уравнению (20.5) соответствует показанная на рис. 20.2 структурная схема с нелинейной обратной связью и блоком произведения БП [Л.40]. Если применить способ ступенчатого изменения коэффициента демпфирования [Л.15, 36], то процесс будет достаточно близким к оптимальному. Это позволит упростить структуру системы.

Форма кривой оптимальных по быстродействию переходных процессов. Эта форма определяется с учетом ограничений некоторых координат.

Примем, что зона нечувствительности в элементах системы отсутствует. Пусть, например, по условиям работы системы о г р а н и ч е -

на только скоростью изменения выходной переменной (первая производная), т. е.

$$|dx/dt| \leq M, \quad (20.6)$$

тогда процесс будет оптимальным, если первая производная в течение всего времени переходного процесса поддерживается на предельном допустимом значении:

$$dx/dt = \pm M, \quad \text{или} \quad dx = \pm M dt,$$

откуда после интегрирования получим

$$x = \pm Mt + A. \quad (20.7)$$

Для случая нулевых начальных условий из (20.7) найдем $A = 0$. При этом оптимальный по быстродействию переходный процесс определяется линейным законом $x = \pm Mt$. Процесс изменения вы-

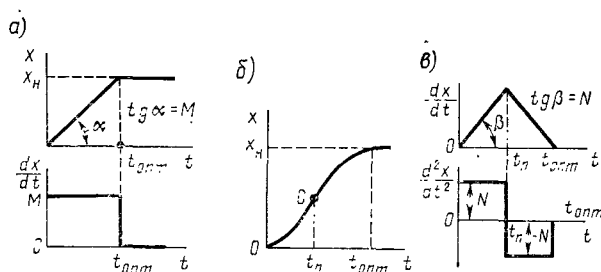


Рис. 20.3

ходной переменной системы от 0 до x_n за минимальное время t_{opt} с учетом указанного ограничения показан на рис. 20.3, а. Закон управления, определяющий изменение первой производной dx/dt , является в данном случае релейным.

Примерами устройств, имеющих ограничение по скорости, могут быть асинхронный электродвигатель, у которого скорость не превышает синхронную; гидравлический серводвигатель, скорость которого не может превзойти его скорости при полностью открытом золотнике и др.

Если же по условиям работы системы второго порядка ограничено только ускорение выходной переменной (вторая производная), т. е.

$$|d^2x/dt^2| \leq N, \quad (20.8)$$

то процесс будет оптимальным при максимальной средней скорости изменения выходной переменной в течение всего времени переходного процесса. Для этого в начале процесса следует наращивать скорость наиболее интенсивно, т. е. с максимально возможным ускорением $+N$. При этом скорость будет нарастать по линейному закону,

ходная переменная системы по параболе, так как соответ-
 ствует (20.8):

$$x = -Nt^2/2 + A_1t + B_1. \quad (20.9)$$

При нулевых начальных условиях $B_1 = 0$.

Если поддерживать такой режим до прихода системы в заданное положение ($x = x_n$), то в момент его достижения скорость движения будет отличной от нуля. Так как интенсивность замедления ограничена условием (20.8), то торможение не может быть мгновенным, и, сле-

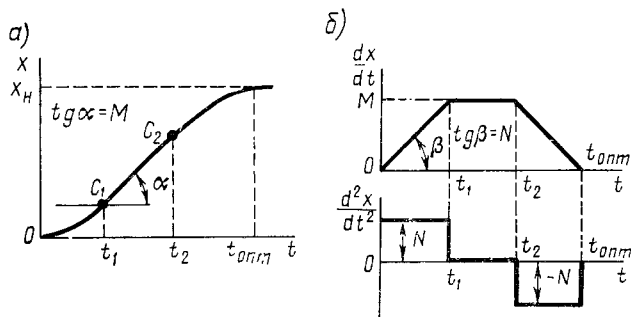


Рис. 20.4

довательно, система пройдет заданное положение. Учитывая это, после точки C следует осуществить наиболее интенсивное торможение, т. е. с максимально возможным замедлением $-N$. При этом скорость будет убывать по линейному закону, а выходная переменная — нарастать до заданного значения по параболе. После интегрирования (20.8) получим

$$x = -Nt^2/2 + A_2t + B_2. \quad (20.10)$$

Графики изменения $x(t)$, скорости dx/dt и ускорения d^2x/dt^2 при этом показаны на рис. 20.3, б и в. Так как разгон и торможение производятся с одинаковым ускорением и замедлением, то время t_n , соответствующее моменту переключения (точка C), равно половине оптимального времени t_{opt} . График для первой производной в данном случае имеет вид равнобедренного треугольника с углом наклона β ($\operatorname{tg} \beta = N$). Построенный таким образом переходный процесс является оптимальным с учетом ограничения только ускорения. В данном случае получено релейное управление.

Если, например, по условиям работы системы второго порядка ограничены скорость и ускорение изменения выходной переменной системы [см. (20.6) и (20.8)], то на графике $x(t)$ будет участок $C_1—C_2$ с постоянной скоростью M в пределах от t_1 до t_2 ; ускорение на этом участке равно нулю (рис. 20.4, а и б). Переходный процесс системы до точки C_1 соответствует разгону с максимально возможным ускорением N при нарастании скорости по линейному закону до предельного значения M . После точки C_2 переходный процесс соответствует тор-

положению с максимально возможным замедлением $-N$ при убывающей скорости от предельного значения до нуля. Полученный таким образом переходный процесс является оптимальным с учетом ограничений по скорости и ускорению выходной переменной системы. Ограничение по ускорению накладывается, например, по условиям механической прочности некоторых деталей устройств, а также электрической и тепловой защиты изоляции.

Пользуясь полученными параболой, можно указать разработанный А. А. Фельдбаумом графический способ построения кривой оптимального процесса при любом законе изменения входного сигнала

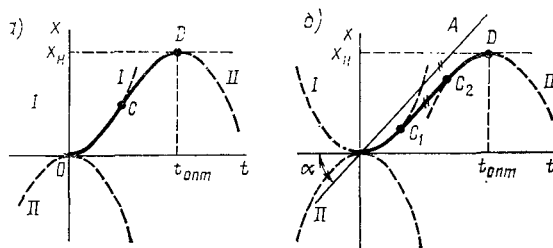


Рис. 20.5

и ненулевых начальных условиях. Для этого в начале координат построим параболы I и II по уравнениям (рис. 20.5, а):

$$\left. \begin{aligned} x_I &= Nt^2/2; \\ x_{II} &= -Nt^2/2. \end{aligned} \right\} \quad (20.11)$$

Парабола I перемещается параллельно себе в такое положение, в котором выполняются начальные условия системы. При отсутствии ограничений по скорости парабола II перемещается также параллельно себе в такое положение, при котором она имеет точку касания D с линией заданного значения выходной переменной системы и точку касания C с первой параболой I . На рис. 20.5, а показано построение при нулевых начальных условиях, когда парабола I оставлена в исходном положении, а парабола II смещена параллельно себе вправо вверх. Участок кривой OCD , расположенный на I и II параболах, представляет собой кривую оптимального переходного процесса при ограничении только второй производной.

Если ограничены первая и вторая производные, то наносятся параболы I и II и линия OA , угол наклона α которой определяется предельным значением первой производной M , т. е. $\lg \alpha = M$ (рис. 20.5, б). После того как первая парабола сместится в положение, соответствующее заданным начальным условиям, к ней проводится касательная, параллельная заданной линии OA в некоторой точке C_1 . Далее парабола II смещается до точки касания с линией заданного значения выходной переменной (точка D) так, что она касается также линии, проведенной из точки C_1 параллельно OA , в некоторой точке C_2 см. рис. 20.5, б, где при $t = 0$ принято $x = 0$).

Полученные кривые оптимальных переходных процессов при наличии ограничений второй производной (см. рис. 20.3, б и в), а также первой и второй производных (см. рис. 20.4) указывают на необходимость применения реле и п е й н о г о закона управления, обеспечивающего изменение знака ускорений и скоростей управляемой переменной в соответствующие моменты времени.

Рассматривая кривые оптимальных переходных процессов, следует указать на существенное влияние ограничений, накладываемых в реальных условиях на координаты и производные. Это в свою очередь существенно влияет на закон управления объектом. В приведенных примерах (см. рис. 20.3 и 20.4) следует применить релейный закон управления. При ограничении только первой производной получен о д н и и н т е р в а л, на котором изменяется выходная переменная системы с постоянной скоростью (см. рис. 20.3, а). При этом в момент времени $t = 0$ включается реле, задающее скорость, равную предельной величине M , а при $t = t_{\text{опт}}$ выключается реле, обеспечивающее равенство нулю скорости изменения выходной переменной. В случае ограничения только второй производной получено д в а и н т е р в а л а (рис. 20.3, б), на первом из которых выходная переменная системы изменяется с постоянным ускорением (участок $0 \leq t \leq t_n$), а на втором — с постоянным замедлением (участок $t_n \leq t \leq t_{\text{опт}}$).

Здесь при $t = 0$ включается реле, задающее ускорение, равное предельной величине N , а при $t = t_n$ переключается реле, задающее замедление, равное предельной величине $-N$ (см. рис. 20.3, в). Таким образом, при ограничении второй производной, требуется производить о д н о переключение реле.

Когда ограничены первая и вторая производные, кроме двух указанных интервалов ускорения и замедления, определяемых переключениями реле, имеется участок с постоянной скоростью изменения выходной переменной системы при выключенном реле, т. е. получено более двух интервалов (см. рис. 20.4).

При ограничении i -й производной оптимальный переходный процесс будет при i интервалах, если все корни уравнения системы вещественны. Могут быть также рассмотрены более сложные случаи ограничения комбинации нескольких производных. Теорема об оптимальном переходном процессе названа А. А. Фельдбаумом теоремой об n интервалах [Л.40], на которых производится $(n - 1)$ переключение реле. Чем меньше число координат достигает предельных значений, тем меньше требуется число интервалов и переключений реле.

Обеспечение оптимального переходного процесса при n интервалах возможно при помощи вычислительного устройства, которое определяет действие релейного элемента на каждом интервале и устанавливает моменты изменения состояний реле (включено, выключено, переключено).

Число переключений релейного элемента зависит также от того, являются ли все корни уравнения вещественными или нет. В последнем случае число переключений может быть больше $(n - 1)$.

Фазовый портрет оптимальных по быстродействию систем. Наглядное представление о совокупности оптимальных процессов при различных условиях даст фазовый портрет. Последний облегчает также определение функции управления вычислительным устройством, производящим переключение релейного элемента.

Ранее было показано (гл. 13), что получение оптимального переходного процесса релейной системы второго порядка возможно, когда линия переключения совпадает с фазовой траекторией, проходящей через начало координат (рис. 14.6, б). При этом был найден переходный процесс без перерегулирования и с наименьшей продолжительностью.

Было установлено, что наложенные ограничения однозначно определяют форму оптимальных переходных процессов и тем или иным методом всегда может быть получен оптимальный закон изменения управляемой переменной и ее производной:

$$x = f_{\text{опт}}(t); \quad dx/dt = y = f'_{\text{опт}}(t).$$

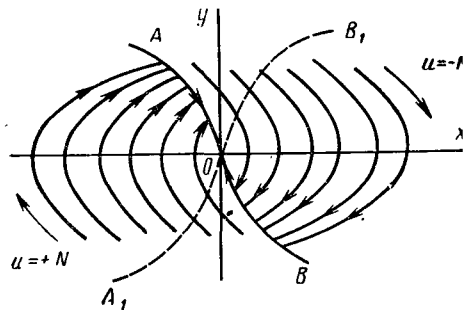


Рис. 20.6

Исключая из этих зависимостей время, найдем уравнения фазовых траекторий $y = \Phi_{\text{опт}}(x)$, которые могут быть построены на фазовой плоскости известными методами. Фазовый портрет при этом будет определять закон переключений реле с учетом ограничений координат, а время, в течение которого изображающая точка переместится из исходного положения в начало координат, будет минимальным. Линии переключения для оптимальных процессов в общем случае являются нелинейными; последние могут быть получены с помощью вычислительных устройств и нелинейных элементов.

Фазовый портрет оптимальной по быстродействию системы второго порядка с учетом ограничения по второй производной для параболического закона изменения выходной переменной и линейного закона изменения скорости ($x = x^0 + Nt^2/2$; $y = x' = Nt$, где $N = -|d^2x/dt^2|$), показан на рис. 20.6. Такой фазовый портрет соответствует случаю двух нулевых корней. При комплексных корнях фазовый портрет будет другим и линия переключения оптимального процесса будет иметь сложную форму. Линия AOB на рис. 20.6 определяет переключение управляющего сигнала $u = \pm N$ для обеспечения оптимальных переходных процессов при любых начальных условиях. Аналитическое выражение линии переключения в общем случае может быть представлено некоторой функцией $F(x, y)$, зависящей от координаты x и ее производной y . Эта функция является обычно нелинейной.

При построении оптимальных по быстродействию систем основной задачей является определение функции управления $F(x, y)$, харак-

теризующей переключение релейного элемента*. Затем проводится синтез управляющего устройства автоматической системы. Управляющее устройство при этом в большинстве случаев должно содержать вычислительное устройство $ВУ$, моделирующее функцию $F(x, y)$ и подающее сигнал на релейный элемент $РЭ$ (рис. 20.7). Последний управляет объектом O .

Решение задачи синтеза устройства, обеспечивающего закон управления $F(x, y, \dots)$ при оптимальном процессе в общем случае часто оказывается весьма сложным.

При создании систем, близких к оптимальным, широко используются линейные и нелинейные корректирующие устройства. Если, например, необходимо получить квазиоптимальный переходный про-

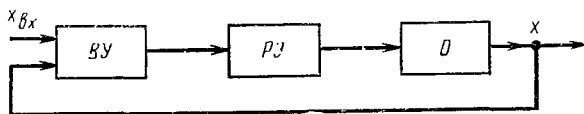


Рис. 20.7

цесс в релейной системе второго порядка, то можно ввести производную в закон управления, которая вызывает поворот линий переключения на фазовой плоскости. Однако полученный при этом процесс для некоторых начальных значений отличается от оптимального (см. рис. 14.6, а) и необходимо обеспечить нелинейный характер линии переключения (см. рис. 20.6, а). Это может быть получено в результате применения нелинейных корректирующих устройств (параболических, квадратических и других обратных связей), позволяющих не только изменить наклон, но и ввести нелинейность в линиях переключения.

В общем случае оптимальная по быстродействию система может содержать логические элементы и иметь переменную структуру [Л.15].

§ 20.5. Оптимальные по точности автоматические системы управления при случайных сигналах

При проектировании систем со случайными входными сигналами прежде всего рассматривается точность управления. Система, обладающая наибольшей возможной точностью, может быть создана в результате использования статистического критерия оптимальности. На практике в каждой высококачественной системе имеются ошибки, обусловленные случайными входными сигналами. Устранить их полностью практически невозможно, поэтому ставится задача разработки

* Имеются аналитические методы определения функций $F(x, y, \dots)$, соответствующих оптимальному управлению [Л. 20, 40]. Этот вопрос кратко рассмотрен в § 20.7 (см. пример 20.4).

оптимальной по точности системы, находящейся под воздействием случайных сигналов.

Решение этой задачи возможно двумя путями: первый заключается в определении оптимальных значений параметров системы с заданной структурой по минимуму среднеквадратической ошибки; второй — в определении оптимальной передаточной функции (оптимальный фильтр) системы из условия минимума среднеквадратической ошибки.

Если на автоматическую систему помимо задающего воздействия действуют также помехи, то в большинстве случаев существуют такая структура и такие значения параметров линейной системы, при которых статистические показатели будут наилучшими. При этом система является *оптимальной* в статистическом смысле. Однако физическая реализация такой системы не всегда возможна и представляет собой сложную задачу из-за ряда ограничений (функциональные и амплитудные) при заданных фиксированных элементах (например, управляемый объект и др.).

Ошибка системы при случайных воздействиях является случайной функцией и равна разности фактического $x_{\text{вых}}(t)$ и заданного $x(t)$ значений выходной переменной. Наилучшие статистические показатели автоматической системы при случайных воздействиях соответствуют минимуму среднеквадратической ошибки.

Если входной сигнал $\varphi(t) = x_{\text{вх}}(t) + f(t)$ системы, состоящий из полезного сигнала $x_{\text{вх}}(t)$ и помехи $f(t)$, является стационарным случайным процессом, а ошибка

$$\varepsilon(t) = x(t) - x_{\text{вых}}(t),$$

то среднее значение квадрата ошибки

$$\bar{\varepsilon}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t) - x_{\text{вых}}(t)]^2 dt. \quad (20.12)$$

Известно, что выходная переменная системы

$$x_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t - \lambda) x'_{\text{вых}}(\lambda) d\lambda,$$

поэтому (20.12) перепишем в виде:

$$\bar{\varepsilon}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left[x(t) - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t - \lambda) x'_{\text{вых}}(\lambda) d\lambda \right]^2 dt. \quad (20.13)$$

Задача заключается в нахождении частотной функции $W(j\omega)$ замкнутой системы, обеспечивающей минимум $\bar{\varepsilon}^2$. Известно (гл. 7), что

$$W(j\omega) = \int_0^{\infty} x'_{\text{вых}}(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Раскрывая в (20.13) квадратные скобки, после некоторых преобразований получим [Л.35]:

$$\bar{\varepsilon}^2 = R_x(0) - 2 \int_0^{\infty} x'_{\text{вых}}(\lambda) R_{x\varphi}(\lambda) d\lambda + \int_0^{\infty} x'_{\text{вых}}(\lambda) d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} x'_{\text{вых}}(\lambda_1) R_{\varphi}(\tau) d\lambda_1, \quad (20.14)$$

где

$$\begin{aligned} R_x(0) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt; \\ R_{x\varphi}(\lambda) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t+\lambda) \varphi(\lambda) d\lambda; \\ R_{\varphi}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \varphi(t+\tau) \varphi(t) d\tau. \end{aligned}$$

Здесь принято условие физической осуществимости, т. е. при $t < 0$

$$x'_{\text{вых}}(t) = 0. \quad (20.15)$$

Уравнение (20.14) имеет минимум, если при $\tau > 0$ выполняется условие:

$$R_{x\varphi}(\tau) - \int_0^{\infty} R_{\varphi}(\tau) x'_{\text{вых}}(\lambda_1) d\lambda_1 = 0. \quad (20.16)$$

Интегральное уравнение (20.16) называется уравнением Винера — Хопфа; его решение определяет $x'_{\text{вых}}(t)$.

На основании уравнений (20.16) и (20.12) Винером получено выражение для частотной функции замкнутой системы:

$$W_{\text{опт}}(j\omega) = \frac{1}{2\pi\Psi(j\omega)} \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{x\varphi}(\omega)}{\bar{\Psi}(j\omega)} e^{j\omega t} d\omega, \quad (20.17)$$

где $S_{x\varphi}(\omega)$ — взаимная спектральная плотность для $R_{x\varphi}(\tau)$; $\Psi(j\omega)$ — частотная функция фиктивного фильтра; $\bar{\Psi}(j\omega)$ — сопряженная частотная функция для $\Psi(j\omega)$.

При этом существует зависимость

$$\Psi(j\omega) \cdot \bar{\Psi}(j\omega) = |\Psi(j\omega)|^2 = S_{\varphi}(\omega),$$

где $S_{\varphi}(\omega)$ — спектральная плотность сигнала $\varphi(t)$.

После решения (20.17) и замены $j\omega$ на p можно получить выражение оптимальной передаточной функции автоматической системы, обеспечивающей минимум среднеквадратической ошибки при наличии на входе полезного сигнала и помехи в виде стационарного случайного процесса.

Теория Винера по определению оптимальной передаточной функции замкнутой системы $W_{\text{опт}}(p)$ основана на следующих предположениях:

полезный сигнал и помеха — функции стационарных случайных процессов;

точки входа в систему полезного сигнала и помехи совпадают;

система является одномерной;

единственным условием физической осуществимости является уравнение (20.15).

Полученное выражение $W_{\text{опт}}(p)$ чаще всего оказывается практически нереализуемым, поэтому производятся упрощения и принимается приближенное выражение $W(p)$.

Применение критерия минимума средней квадратической ошибки является основой построения оптимальных по точности систем при случайных воздействиях.

Если структура системы задана, то для определения оптимальных значений ее параметров надо найти зависимость принятого критерия от параметров системы. В простейших случаях линейных систем эту зависимость можно получить в аналитической форме; оптимальные значения параметров системы при этом определяются уравнениями, полученными приравняв к нулю частных производных критерия качества по неизвестным параметрам системы. Далее решаются эти уравнения. Если их нельзя решить аналитически или когда не удастся выразить критерий качества аналитически через параметры системы, для нахождения оптимальных значений параметров прибегают к приближенным численным методам. Из них наиболее эффективным является метод наискорейшего спуска и его разновидности [Л.35].

Чтобы найти оптимальную передаточную функцию системы по критерию минимума средней квадратической ошибки, в общем случае используется уравнение, определяемое математическим ожиданием [Л.28]:

$$M[\{x_{\text{опт}}(t) - x(t)\} x_1(t)] = 0, \quad (20.18)$$

где $x_{\text{опт}}(t)$ — выходная переменная системы, имеющей оптимальную передаточную функцию, при действии полезного сигнала и помехи; $x(t)$ — выходная переменная оптимальной системы при действии только полезного сигнала; $x_1(t)$ — выходная переменная некоторой реальной системы, передаточная функция которой оптимальна при выполнении условия (20.18).

В случае оптимального процесса реальной системы $x_1(t) \approx x_{\text{опт}}(t)$, поэтому с учетом (20.18) можно получить

$$\tilde{\epsilon}_{\text{мин}}^2 = M[x_{\text{опт}}^2(t)] - M[x(t) x_{\text{опт}}(t)]. \quad (20.19)$$

Уравнения (20.19) и (20.18) используются при определении оптимальных линейных и нелинейных систем, в которых мгновенное значение средней квадратической ошибки для каждого момента времени имеет наименьшее возможное значение. Таким образом, уравнение (20.19) минимизирует среднюю квадратическую ошибку для любого момента времени и является более общим, чем указанное для стационарного процесса выражение (20.3).

После определения оптимальной передаточной функции системы следует реализовать ее звенья. Обычно большая часть элементов си-

стемы задана и изменить их невозможно, поэтому для приближения динамических характеристик проектируемой системы к оптимальным в структурную схему вводятся корректирующие устройства. Так как структурная схема системы с учетом выбранного способа включения корректирующего устройства известна, то его передаточная функция определяется по передаточной функции заданной части системы и оптимальной передаточной функции. Решение такой задачи выполняется различными способами, в том числе методом логарифмических частотных характеристик.

При построении оптимальных по точности автоматических систем в случае детерминированных сигналов могут рассматриваться интегральные оценки различных типов и их минимизация [Л.10, 15, 35].

§ 20.6. Методы расчета оптимальных параметров и определения закона управления оптимальных систем

Особенность построения оптимальных систем управления в общем случае вызывает необходимость применения специальных методов, которые будут рассмотрены далее.

Оптимальные по точности автоматические системы при единичных детерминированных сигналах рассматриваются относительно интегральных оценок, которые минимизируются методами вариационного исчисления. При случайной форме сигналов внешних воздействий оптимальные системы рассчитываются методами статистической динамики, а при минимизации средней квадратической ошибки применяются методы вариационного исчисления.

Чтобы выполнить синтез оптимальной автоматической системы, надо применять соответствующие критерии оптимальности. Используя уравнения основных звеньев системы, можно составить линейаризованные уравнения первого порядка, определяющие свободное движение системы:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j; \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (20.20)$$

где a_{ij} — коэффициенты, зависящие от параметров системы.

В общем случае целесообразно использовать обобщенную интегральную оценку

$$J = \int_0^{\infty} V dt, \quad (20.21)$$

выраженную через положительно-определенную квадратичную форму:

$$V = \sum_{k=1}^r c_k x_k^2, \quad (20.22)$$

где в общем случае $r = n$. В частном случае в качестве переменных x_k следует выбрать те координаты объекта и регулятора, на которые непосредственно влияют изменяемые параметры системы.

При синтезе системы могут быть поставлены две различные задачи: выбор оптимальных значений параметров (первая задача) и синтез регулятора (вторая задача).

Определение оптимальных параметров. Приближенный выбор оптимальных параметров при известной структуре системы по уравнению (20.20) заключается в составлении некоторой другой квадратичной формы

$$W = \sum_{i,k=1}^r b_{ik} x_i x_k, \quad (20.23)$$

удовлетворяющей условию $dW/dt = -V$ или

$$\sum_{k=1}^r \frac{\partial W}{\partial x_k} \cdot \frac{dx_k}{dt} = -V. \quad (20.24)$$

На основании указанного можно записать

$$\sum_{k=1}^r \left[\sum_{i=1}^r b_{ik} x_i \right] \left[\sum_{i,k=1}^r a_{ik} x_k \right] = - \sum_{k=1}^r c_k x_k^2. \quad (20.25)$$

В левой и правой частях (20.25) получены квадратичные формы, поэтому, приравнивая коэффициенты при x_k^2 слева и справа между собой, а также приравнивая нулю коэффициенты при произведениях $x_i x_k$ ($i \neq k$), получим систему линейных алгебраических уравнений, определяющих b_{ik} .

Известно, что [см. (10.46)]

$$J = \int_0^{\infty} \left[\sum_{k=1}^r c_k x_k^2 \right] dt = W(0), \quad (20.26)$$

поэтому, подставив вычисленные из (20.25) коэффициенты b_{ik} в (20.23), найдем аналитическое выражение для обобщенной интегральной оценки. Поскольку функция $W(0)$ представлена через параметры системы и начальные значения координат $x_k(0)$, параметры α_{ik} , минимизирующие интеграл (20.21), определяются посредством решения следующих уравнений:

$$\partial J / \partial \alpha_{ik} = 0, \quad (20.27)$$

где $i, k = 1, 2, \dots, r$.

Полученные таким способом значения параметров системы обеспечивают устойчивую работу линеаризованной системы, поскольку условие (20.24) является одновременно условием устойчивости системы по А. М. Ляпунову, если квадратичная форма (20.23) составлена с учетом всех координат x_i .

Однако найденные по указанной методике параметры, обеспечивающие оптимальность системы, могут соответствовать неустойчивой работе реальной системы из-за наличия в системе звеньев с нелиней-

ными характеристиками. В этом случае необходимо дополнительно исследовать устойчивость по системе нелинейных уравнений вида

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + h_i \varphi(\sigma); \\ \sigma &= \sum_{k=1}^n d_k x_k. \end{aligned} \right\} \quad (20.28)$$

Решить эту задачу можно с помощью методов нелинейной теории Ляпунова, В. М. Попова и др.

Решение задачи по уточненному определению оптимальных параметров систем с учетом нелинейностей звеньев целесообразно выполнять численными методами на ЭЦВМ. В этом случае может быть применен градиентный метод [Л.45].

Если используется критерий оптимальности в виде функционала, характеризующего критерий качества системы

$$J(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, \quad (20.29)$$

то можно составить функцию, определяющую экстремальное значение указанного критерия при оптимальных параметрах системы:

$$F(k_1, k_2, \dots, k_n) = F(\mathbf{r}) \geq 0, \quad (20.30)$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор в пространстве параметров k_k при оптимальном значении их.

В этом случае целесообразно применять градиентный метод.

Можно определить оптимальные значения параметров системы через градиент функции (20.30), вычисленный в некоторой начальной точке, соответствующей значениям $k_1^0, k_2^0, \dots, k_n^0$:

$$\text{grad } F^0 = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial k_k} \right)^0 i_k, \quad (20.31)$$

где $\partial F / \partial k_k$ — частные производные функции по параметрам, найденные для значений $k_1^0, k_2^0, \dots, k_n^0$; i_k — орты соответствующих осей.

Поскольку градиент определяет направление наибольшего возрастания функции, то поиск оптимума (оптимальных значений параметров, когда функция имеет экстремум) целесообразно производить, смещаясь в сторону убывания функции при отыскании минимума. Для этого можно записать уравнение прямой, проходящей через точку $(k_1^0, k_2^0, \dots, k_n^0)$ и имеющей направление градиента (20.31). Это уравнение будет определять радиус-вектор

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 - \varepsilon \text{grad } F^0,$$

где $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор точки $(k_1^0, k_2^0, \dots, k_n^0)$; ε — некоторый параметр смещения вдоль вектора (шаг по градиенту).

Если задать некоторое достаточно малое значение $\varepsilon_0 > 0$, то $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 - \varepsilon_0 \text{grad } F^0$, когда $F(\mathbf{r}_1) < F(\mathbf{r}_0)$ и т. д. Продолжая расчет по-

добным образом, в конечном итоге получим убывающую последовательность

$$F(\mathbf{r}_0) > F(\mathbf{r}_1) > F(\mathbf{r}_2) > \dots > F(\mathbf{r}_v) \dots, \quad (20.32)$$

которой отвечают последовательности

$$\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots; \varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$$

Монотонно убывающая последовательность (20.32) ограничена снизу, поскольку в соответствии с (20.30) величина $F(\mathbf{r}) \geq 0$.

Указанный расчет может производиться численным методом на ЭЦВМ. Шаг по градиенту $\varepsilon = \delta / \sqrt{n \bar{k}}$ (где δ — число, характеризующее точность приближения по параметрам; n — число параметров), выбирается с учетом требуемой точности по усредненному параметру

$$\bar{k} = \sum_{k=1}^n k_k^2 / n.$$

Соответственно (20.32) логическим условием сходимости вычислительного процесса является условие $F(\mathbf{r}_v) > F(\mathbf{r}_{v+1})$, для удовлетворения которого используется следующая логическая схема выбора шага по градиенту:

$$\varepsilon_v = \begin{cases} \varepsilon_{v-1}, & \text{если } F(\mathbf{r}_{v-1}) > F(\mathbf{r}_v); \\ \varepsilon_{v-1}/2, & \text{если } F(\mathbf{r}_{v-1}) \leq F(\mathbf{r}_v). \end{cases}$$

Условие конца счета на машине задастся в виде следующих неравенств:

$$\frac{|F(\mathbf{r}_v) - F(\mathbf{r}_{v-1})|}{F(\mathbf{r}_v)} < \delta_F; \quad \varepsilon_{v-1} \leq \delta_\varepsilon,$$

где δ_F — допустимая относительная погрешность отыскания минимума функции (20.30); δ_ε — некоторое достаточно малое число.

После указанного уточненного выбора оптимальных параметров необходимо выполнить проверку устойчивости системы с учетом нелинейностей характеристик звеньев методами нелинейной теории.

Синтез оптимального управления. Для синтеза системы могут быть использованы линеаризованные уравнения системы (20.20), в которых необходимо ввести координату управления u . Уравнения (20.20) при этом следует записать в виде [Л.19, 20]:

$$g_i = \frac{dx_i}{dt} - \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + m_i u \right) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (20.33)$$

где a_{ij} , m_i — заданные коэффициенты.

Критерий оптимальности в этом случае будет непосредственно зависеть от координаты регулирующего органа

$$J(u) = \int_0^\infty \left[V + \left(\frac{du}{dt} \right)^2 \right] dt, \quad (20.34)$$

где положительно-определенная квадратичная форма имеет вид

$$V = \sum_{k=1}^r c_k x_k^2 + cu^2. \quad (20.35)$$

В результате решения задачи синтеза получается закон управления

$$F(x_k, u, du/dt, \dots) = 0, \quad (20.36)$$

который обеспечивает минимум интеграла (20.34).

В а р и а ц и о н н ы й м е т о д. Для решения задачи синтеза составим функцию Лагранжа

$$L = V + \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i, \quad (20.37)$$

где λ_i — произвольные множители Лагранжа.

Далее запишем систему следующих уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \lambda_i; \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} = 2c_k x_k - \sum_{j=1}^n \lambda_j a_{ij}; \quad \dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt};$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = 2 \frac{du}{dt}; \quad \frac{\partial L}{\partial u} = 2cu - \sum_{i=1}^n \lambda_i m_i; \quad \dot{u} = \frac{du}{dt}.$$

Используя уравнения Эйлера

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = 0,$$

получим уравнения вариационной задачи

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\lambda_i}{dt} &= 2c_k x_k - \sum_{j=1}^n \lambda_j a_{ij}; \\ 2 \frac{d^2 u}{dt^2} &= 2cu - \sum_{i=1}^n \lambda_i m_i. \end{aligned} \right\} \quad (20.38)$$

Эти уравнения в совокупности с (20.33) позволяют решить задачу синтеза. В результате такого решения закон управления запишется как [Л.20]

$$\frac{du}{dt} = \sum_{i=1}^n p_i x_i - ru, \quad (20.39)$$

где p_i и r — коэффициенты.

Пример 20.1. Определим закон управления для объекта, заданного уравнением первого порядка:

$$dx/dt = a_1 x + m_1 u, \quad (20.40)$$

из условия минимума функционала

$$J = \int_0^{\infty} (c_1 x^2 + cu^2) dt. \quad (20.41)$$

Составим функцию Лагранжа

$$L = c_1 x^2 + cu^2 + \lambda (\dot{x} - a_1 x - m_1 u). \quad (20.42)$$

На основании этой функции и уравнений Эйлера получим

$$d\lambda/dt = 2c_1 x - a_1 \lambda; \quad 2cu = m_1 \lambda.$$

Подставив в (20.40) значение $u = \lambda m_1/2c$, найдем уравнения вариационной задачи:

$$\left. \begin{aligned} dx/dt &= a_1 x + (m_1^2/2c) \lambda; \\ d\lambda/dt &= 2c_1 x - a_1 \lambda. \end{aligned} \right\} \quad (20.43)$$

Характеристический определитель этой системы уравнений

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} a_1 - p & m_1^2/2c \\ 2c_1 & -a_1 - p \end{vmatrix} = -a_1^2 + p^2 - c_1 m_1^2/c = 0,$$

откуда

$$p_1 = \sqrt{a_1^2 + c_1 m_1^2/c}; \quad p_2 = -\sqrt{a_1^2 + c_1 m_1^2/c}.$$

Условию устойчивости удовлетворяет корень p_2 , поэтому

$$x = C_{2e} p_2 t = C_2 \exp \left(-\sqrt{a_1^2 + \frac{c_1 m_1^2}{c}} t \right).$$

Подставив полученное значение x в (20.40), найдем линейный закон управления

$$u = -kx, \quad (20.44)$$

где $k = \frac{a_1}{m_1} + \sqrt{\left(\frac{a_1}{m_1}\right)^2 + \frac{c_1}{c}}.$

Метод динамического программирования [Л.52]. Сущность решения задачи по методу Р. Беллмана заключается в том, что для заданного нелинейного дифференциального уравнения с одной координатой управления u

$$dx_i/dt = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u); \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (20.45)$$

и выбранного критерия оптимальности, аналогичного (20.34), составляется функциональное уравнение Беллмана:

$$\max_u \left\{ V + \sum_{i=1}^n f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial \psi^*}{\partial x_i} + \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right\} = 0, \quad (20.46)$$

где ψ^* — вспомогательная функция:

$$\psi^* = \underset{u}{\text{extremum}} J[x_i(t), u(t), t] = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} x_i x_j. \quad (20.47)$$

Решив это уравнение, найдем закон оптимального управления.

Обычно точное решение уравнений Беллмана связано с большими трудностями, поэтому применяют численные методы. В некоторых простейших задачах удастся непосредственно решить уравнение Беллмана [Л.19]. По методу А. М. Летова в этом случае вместо (20.46) записывают следующие функциональные уравнения в частных производных [Л.19]:

$$\left. \begin{aligned} V + \sum_{i=1}^n f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_i} &= 0; \\ \frac{\partial V}{\partial u} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_i} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (20.48)$$

Решив эти уравнения, найдем закон оптимального управления.

Пример 20.2. Определим закон управления для объекта, заданного уравнением первого порядка:

$$dx/dt = a_1 x + m_1 u, \quad (20.49)$$

из условия минимума функционала

$$J = \int_0^{\infty} (c_1 x^2 + cu^2) dt. \quad (20.50)$$

Составим функциональные уравнения типа (20.48):

$$c_1 x^2 + cu^2 + (a_1 x + m_1 u) \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} = 0; \quad (20.51)$$

$$2cu + m_1 \frac{\partial \varphi^*}{\partial u} = 0, \quad (20.52)$$

из которых после исключения $\partial \varphi^* / \partial x$ [или принятия φ^* в виде (20.47)]

$$m_1 cu^2 + 2a_1 cxu - c_1 m_1 x^2 = 0. \quad (20.53)$$

Решая это уравнение, найдем закон управления, который совпадает с полученным по методу Лагранжа [см. (20.44)].

При решении дифференциального уравнения (20.46) численным методом интеграл минимизируемого функционала и уравнения системы (20.45) заменим на разностные уравнения:

$$\Delta x_k = f(x_k, u_k) \Delta t_k; \quad (20.54)$$

$$\Delta J_k = V(x_k, u_k) \Delta t_k. \quad (20.55)$$

При этом $k = 0, 1, 2, \dots$; $x_0 = x(0)$; $x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$;

$$u_{k+1} = u_k + \Delta u_k; \quad \Delta t = T/N;$$

N — число принятых расчетных интервалов.

Задача минимизации, например, производится по рекуррентным соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0^*(x_0) &= 0; \\ \varphi_{N+1}^*(x_0) &= \min_u \{ \varphi_N^*[x_0 + \Delta x] + \Delta J \}. \end{aligned} \right\} \quad (20.56)$$

Однако и в этом случае при высоком порядке уравнений приходится хранить в памяти вычислительной машины очень большое число значений координат на каждом этапе, поэтому самые крупные современные машины не способны решить такую задачу.

В тех случаях, когда уравнения линейны, а критерий оптимальности выражается квадратичными функционалами, задача сводится к решению нелинейных уравнений типа Риккати на аналоговых моделях.

Принцип максимума Понтрягина [Л.30]. Этот метод, как и метод Р. Беллмана, предназначенный для решения нелинейных задач теории оптимальных систем, позволяет учесть ограничения для управляющих воздействий, подводимых к объекту управления. Он более всего удобен при синтезе оптимальных по быстродействию систем.

Рассмотрим кратко основы принципа максимума и его использование при синтезе оптимальных систем. Пусть уравнение управляемого объекта представлено в разрешенной относительно производных форме:

$$dx_i/dt = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r), \quad (20.57)$$

где $i = 1, 2, \dots, n$; r — количество координат управления.

Уравнение (20.57) можно представить в векторной форме:

$$dx/dt = F(x, u). \quad (20.58)$$

Сигналы управления могут иметь ограничения для всех r координат: $|u_i| \leq u_{\max i}$.

Зададимся некоторой функцией $F_0(x, u)$ и при управлении объектом будем рассматривать перемещение изображающей точки из начального положения x_0 с координатами $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$ в n -мерном фазовом пространстве в положение x_1 с координатами $x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}$.

Для оптимального быстродействия требуется найти вектор управляющего воздействия $u(t)$ с учетом указанных ограничений, обеспечивая минимум функционала

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F_0(x, u) dt. \quad (20.59)$$

Если положить $F_0(x, u) \equiv 1$, то оптимальное управление будет означать минимальное время перхода изображающей точки из положения x_0 в положение x_1 , поэтому $J = t_1 - t_0$.

Принцип максимума позволяет получить управляющее воздействие $u(t)$ и произвести аналитическое конструирование оптимальной системы. Рассмотрим основы метода на примере объекта с одним управляющим органом ($r = 1$).

Структурная схема проектируемой системы при заданном объекте с неизвестным регулятором представлена на рис. 20.8, а. Кривая оптимального управления объектом $u^*(t)$ в диапазоне $0 \leq t \leq T$ приведена на рис. 20.8, б. Далее на бесконечно малом участке времени $\tau - \varepsilon < t < \tau$ внутри заданного интервала проварьировем управле-

ние, изменив от оптимального значения u^* до некоторого значения $u \neq u^*$. При этом на всех остальных интервалах управление остается равным значению $u^*(t)$. Такая вариация управления, при которой происходит лишь «игольчатое» изменение на бесконечно малом участке, называется *игольчатой вариацией*. При этом величина $(u - u^*)$ может иметь любое значение в пределах установленных ограничений. Однако влияние этой вариации на последующее движение объекта бесконечно мало, поскольку влияние любого импульса оценивается величиной его площади $(u - u^*)\varepsilon$, которая в данном случае бесконечно мала.

Если управляющему воздействию $u^*(t)$ соответствует оптимальное движение объекта $x^*(t)$, то после игольчатой вариации дальней-

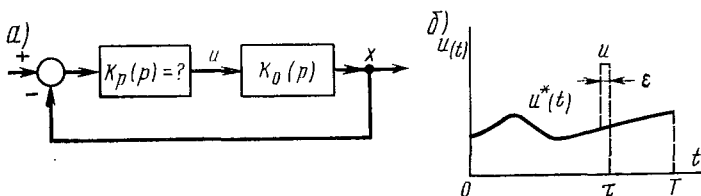


Рис. 20.8

шее движение $x(t)$ будет отличаться от оптимального. Разность между ними в момент $t = \tau$ определяется разностью скоростей:

$$\begin{aligned} x(\tau) - x^*(\tau) &= \varepsilon \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)_{t=\tau} - \left(\frac{dx^*}{dt} \right)_{t=\tau} \right] = \\ &= \varepsilon \{ F[x(\tau), u(\tau)] - F[x^*(\tau), u^*(\tau)] \}. \end{aligned} \quad (20.60)$$

Эта разность бесконечно мала, но отлична от нуля. Для ее характеристики при $\tau \leq t \leq T$ введем вектор вариации траектории:

$$\delta x(t) = x(t) - x^*(t). \quad (20.61)$$

Закон изменения вариации (20.61), являющейся бесконечно малой величиной, может быть найден из линейных уравнений для малых изменений $x(t)$, которые называются *уравнениями в вариациях*. Эти уравнения можно получить из (20.58) или (20.57), если заменить x_i на $(x_i + \delta x_i)$, а затем после разложения F в ряд по степени δx_i отбросить члены высших порядков малости. Далее вычтем уравнение вида (20.58) и получим линейное уравнение в вариациях:

$$\frac{d(\delta x_i)}{dt} = \sum_{i=0}^{n+1} \delta x_i \frac{\partial F_i(x, u)}{\partial x_i}. \quad (20.62)$$

Значение вариации δx при $t = T$ представляет собой изменение критерия оптимальности δJ . Для любых неоптимальных управлений $u(t)$ эта величина определяется скалярным произведением вариации

$\delta x(T)$ и некоторого вспомогательного вектора $\psi(T)$, являясь отрицательной:

$$-\delta J = \delta x(T) \psi(T). \quad (20.63)$$

Уравнение (20.63) позволяет найти $\delta x(T)$ в зависимости от начального условия $\delta x(\tau)$, определяемого значением $u(\tau)$.

Если подобрать такой вектор $\psi(t)$, который при $\tau < t \leq T$ удовлетворяет условию

$$\delta x(t) \psi(t) = \delta x(T) \psi(T), \quad (20.64)$$

то можно составить функцию Гамильтона

$$H = \sum_1^n \psi(t) F_i(x, u), \quad (20.65)$$

которая достигает максимума при оптимальном управлении $u^*(\tau)$. Отсюда следует принцип максимума: *нужно так подобрать $u(\tau)$, чтобы величина H достигала максимального значения.*

Используя функцию H , уравнения (20.58) и (20.59), можно записать уравнения Гамильтона:

$$dx_i/dt = \partial H / \partial \psi_i; \quad (20.66)$$

$$d\psi_i/dt = -\partial H / \partial x_i. \quad (20.67)$$

В дальнейшем при определении оптимального управления используются формулы (20.65)–(20.67).

Идея метода заключается в следующем: по выражению (20.65) составляется уравнение, содержащее управляемые координаты, управляющее воздействие и неизвестные вспомогательные переменные ψ ; последние определяются из уравнений (20.66) и (20.67).

Пример 20.4. Пусть объект управления (см. рис. 20.8, а) имеет передаточную функцию*:

$$K_o(p) = 1/p^2;$$

тогда можно записать дифференциальное уравнение

$$d^2 x / dt^2 = u \text{ при } |u| \leq U_{\max}, \quad (20.68)$$

где u — координата управления.

Введем обозначения: $x \Leftarrow x_1$ и $dx/dt \Leftarrow x_2$; после чего получим уравнения для основных переменных:

$$\left. \begin{aligned} dx_1/dt &\Leftarrow x_2 \\ dx_2/dt &\Leftarrow u. \end{aligned} \right\} \quad (20.69)$$

С учетом (20.69) на основании (20.65) функция

$$H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u. \quad (20.70)$$

Используя (20.66) и (20.70), проверим соответствие уравнениям (20.69) для основных переменных:

$$dx_1/dt = \partial H / \partial \psi_1 = x_2; \quad dx_2/dt = \partial H / \partial \psi_2 = u.$$

* Рассматривается процесс перехода системы второго порядка из произвольного начального состояния в равновесие ($x \Leftarrow 0, dx/dt \Leftarrow 0$).

Далее по (20.67) и (20.70) найдем сопряженные уравнения для вспомогательных переменных:

$$\left. \begin{aligned} d\psi_1/dt &= -\partial H/\partial x_1 = 0; \\ d\psi_2/dt &= -\partial H/\partial x_2 = -\psi_1. \end{aligned} \right\} \quad (20.71)$$

После интегрирования уравнений (20.71) запишем вспомогательные переменные:

$$\psi_1 = C_1; \quad \psi_2 = -\int C_1 dt = C_2 - C_1 t,$$

откуда

$$H = C_1 x_2 + (C_2 - C_1 t) u = C_1 \frac{dx}{dt} + (C_2 - C_1 t) \quad (20.72)$$

Поскольку при оптимальном управлении функция H принимает максимальное положительное значение, то второе слагаемое (20.72) должно быть всегда положительным и наибольшим. Это будет обеспечено при

$$u = U_{\max} \cdot \text{sign } \psi_2$$

или

$$u = U_{\max} \text{sign}(C_2 - C_1 t).$$

Здесь $(C_2 - C_1 t)$ является линейной функцией, которая может только один раз изменить знак, поэтому перемещение изображающей точки на фазовой плоскости из произвольного положения в начало координат может быть осуществлено при двух предельных значениях управляющего воздействия на объект ($+U_{\max}$ и $-U_{\max}$). Фазовый портрет рассматриваемой оптимальной системы характеризуется уравнениями (20.69). Если принять $u = 1$ и исключить из этих уравнений параметр t , то получим $dx_1 = x_2 dx_2$ или после интегрирования

$$x_1 = x_2^2/2 + C. \quad (20.73)$$

Для $u = -1$ аналогично найдем

$$x_1 = -x_2^2/2 + C. \quad (20.74)$$

Уравнения (20.73) и (20.74) характеризуют фазовые траектории, которые при $C = 0$ проходят через начало координат (см. кривые AOA_1 и BOB_1 на рис. 20.6). Эти фазовые траектории на участках AOB определяют моменты переключения управляющего сигнала u для обеспечения оптимального переходного процесса. Аналитическое выражение функции переключения сигнала u найдем из (20.73) и (20.74) при $C = 0$:

$$x_{2n} = (dx/dt)_n = -(\text{sign } x) \sqrt{2|x|}. \quad (20.75)$$

Таким образом, оптимальная по быстродействию система должна иметь в данном случае специальное вычислительное устройство (см. рис. 20.7), определяющее величину dx/dt и сравнивающее ее с величиной $(dx/dt)_n$. Аналитическая зависимость, характеризующая управляющий сигнал u , может быть выражена следующим логическим условием:

$$u = \begin{cases} +1 & \text{при } dx/dt < (dx/dt)_n \text{ и при } dx/dt = (dx/dt)_n < 0; \\ -1 & \text{при } dx/dt > (dx/dt)_n \text{ и при } dx/dt = (dx/dt)_n > 0. \end{cases}$$

Таким образом, оптимальная по быстродействию система оказывается релейной и имеет одно переключение реле, что совпадает с полученным ранее выводом. Фазовый портрет данной системы при оптимальном управлении подобен изображенному на рис. 20.6; переходные же характеристики подобны приведенным на рис. 20.3, б и в, если осуществить переключение реле в момент времени $t_n = C_2/C_1$. Однако это требует включения дополнительного устройства на входе релейного элемента.

1. Сформулируйте задачу оптимального управления.
2. Расскажите о критериях оптимальности.
3. Приведите классификацию оптимальных систем.
4. Объясните особенности построения оптимальных систем по точности и быстродействию.
5. Что означает выбор оптимальной передаточной функции системы при наличии помех?
6. Какие методы используются при расчете оптимальных систем?
7. В каких случаях возможен синтез оптимальной системы классическим вариационным методом?
8. Как производится синтез оптимальной системы по методу динамического программирования?
9. В чем состоит основное затруднение при решении задачи по методу Р. Беллмана?
10. Поясните идею метода синтеза оптимальной системы по принципу максимума Л. С. Понтрягина.

Глава 21

ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ САМОНАСТРАИВАЮЩИХСЯ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В предыдущих главах рассматривались объекты, для которых параметры и характеристики известны и остаются неизменными. Однако во многих случаях динамические и статические характеристики объекта изменяются во времени, и регулятор с жесткой (неизменной) настройкой не может обеспечить нормальную работу системы. В этих случаях необходимо изменить уставку задатчика или параметры каких-либо элементов, изменить схему соединения элементов или ввести в действие новые элементы и т. д. Такая задача может быть решена при использовании логических элементов, вычислительных машин и элементов автоматического поиска, что обусловит создание более совершенных автоматических систем, обладающих свойством самонастройки. Особенности этих систем рассмотрены, например, в [Л.15, 35, 46].

Автоматическая система, обладающая свойством автоматически изменять в процессе работы характеристики или структуру регулятора с целью сохранения заданных показателей качества при произвольно меняющихся внешних условиях, называется *самонастраивающейся*.

Рассмотренная в § 20.5 оптимальная по быстродействию система автоматического компенсатора с переменным коэффициентом демпфирования (см. рис. 20.2) является простейшей самонастраивающейся системой.

Идеальной самонастраивающейся системой была бы система, которая сохраняла бы неизменные динамические и статические характеристики при любых возможных условиях. Практически самонастраивающейся системой считается такая система, которая сохраняет динамические и статические характеристики неизменными лишь

в определенных пределах. Таким образом, в каждом конкретном случае создания самонастраивающейся системы необходимо указывать определенные граничные условия ее удовлетворительной работы.

§ 21.1. Критерии самонастройки. Назначение и эффективность применения элементов самонастройки

Критерий самонастройки одновременно является и критерием качества системы. Он должен отражать какое-нибудь требование оптимальности: максимальную производительность, экономичность, минимум потерь и т. д. В связи с этим целесообразно указать некоторые основные задачи техники, требующие применения самонастраивающихся систем:

обеспечение экономичности, например газотурбинных и дизельных установок и др.;

обеспечение наибольшей производительности, например металлорежущего производства, выработки горной породы открытым способом и в других случаях;

минимизация ошибки системы при случайных воздействиях для различных внешних условий;

обеспечение экстремума какого-либо показателя работы объекта, например температуры мартеновской печи и др.;

стабилизация динамических свойств промышленных объектов, для которых переходные режимы являются основными режимами работы, а случайные факторы и изменение внутренних параметров системы нарушают эти режимы.

На практике кроме указанных могут встретиться и другие типы задач, при решении которых необходимо создание самонастраивающихся систем.

При проектировании и расчете самонастраивающихся систем необходимо установить функциональные соотношения между показателем совершенства (оптимальности) и характеристиками объекта для изменяющихся условий работы системы. Установление такого функционального соотношения составляет основу критерия самонастройки, который используется для построения самонастраивающейся системы. Наряду с этими критериями могут быть сформулированы специальные законы, определяющие работу элементов самонастройки.

Эффективным критерием любой автоматической системы является экономический эффект, поэтому введение элементов самонастройки, безусловно, оправдано лишь при достаточно быстрой окупаемости системы, обеспечении максимальной производительности, улучшении качества изготавливаемой продукции, снижении эксплуатационных расходов и пр. Введение элементов самонастройки обычно усложняет систему и снижает надежность ее работы. При создании самонастраивающейся системы выполнять все эти требования не удается, поэтому приходится идти на компромисс, выбирая за критерий оптимальности и самонастройки одно из указанных требований.

§ 21.2. Функциональные схемы и основные элементы самонастраивающихся систем

В общем случае самонастраивающаяся система имеет основной контур регулирования I , образованный регулятором P , объектом O и главной обратной связью, и контур самонастройки II (рис. 21.1). Регулятор (а иногда и объект) содержит изменяемую часть, на которую воздействует контур самонастройки. Последний имеет контролирующую часть, определяющую текущую информацию об объекте и внешних условиях, в виде устройств оценки процесса $УОП$ и оценки входных сигналов $УОВС$; вычислительное устройство, называемое логи-

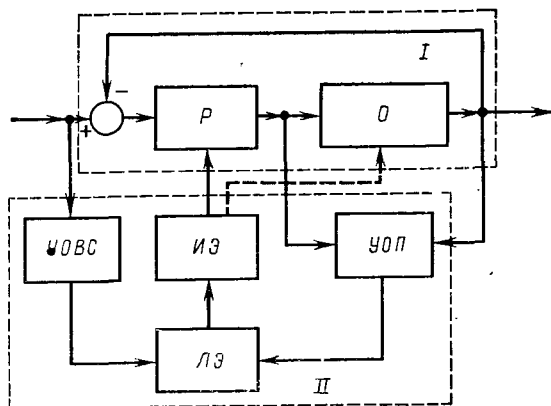


Рис. 21.1

ческим элементом $ЛЭ$, которое вырабатывает необходимое решение (регулирующее воздействие); и исполнительный элемент $ИЭ$, воздействующий на изменяемую часть регулятора основного контура системы.

Устройство для оценки процесса $УОП$ называется также *анализатором* динамических свойств объекта, или анализатором процесса.

Это устройство служит для полной или частичной оценки динамических свойств объекта или системы в целом. При полной оценке динамических свойств определяются все переходные и частотные характеристики, передаточные функции, уравнение объекта и т. п.; при частичном — какой-либо показатель качества и указанные характеристики в конечном числе точек.

Если в качестве показателя используется взаимная корреляционная функция входа и выхода объекта, то устройство оценки процесса представляет собой коррелятор.

В том случае, когда нормальный рабочий сигнал системы не достаточен для получения требуемой информации при оценке процесса, в устройство оценки процесса необходимо включить генератор пробных сигналов.

В более сложных системах динамические свойства объекта или системы определяются посредством сопоставления характеристик

с некоторым эталоном, который также может видоизменяться (самообучение).

Устройство для оценки внешнего воздействия УОВС полностью или частично определяет причину отклонения процесса от оптимального. Это устройство называется *анализатором воздействий*.

Логический элемент ЛЭ вырабатывает или хранит критерий оптимальности, или условие самонастройки. Поступающая информация об изменении параметров объекта и входных сигналов используется для выбора необходимых характеристик регулятора. При решении сложных задач самонастройки вместо логического элемента используется ЦВМ.

Исполнительный элемент ИЭ предназначен для передачи необходимого воздействия с выхода контура самонастройки на изменяемую часть регулятора (или объекта). Регулятор имеет также неизменяемую часть, служащую для повышения надежности системы. В случае выхода из строя контура самонастройки система может отклониться от оптимальной, но сохраняет работоспособность.

Перечисленные основные элементы самонастраивающейся системы не являются строго обязательными. Количество их может быть уменьшено или увеличено в зависимости от степени совершенства самонастройки. Компактность схемы и особенно надежность ее работы в сильной степени зависят от правильного выбора составных элементов.

При создании самонастраивающихся систем прежде всего ставится требование простоты самонастройки. В настоящее время разработаны устройства, в которых частотные или амплитудные изменения входного сигнала приводят к автоматической перестройке постоянной времени или коэффициента усиления корректирующих устройств.

§ 21.3. Классификация самонастраивающихся систем

Самонастраивающиеся системы классифицируются по различным признакам, например, по исходному фактору, обуславливающему применение элементов самонастройки, что позволяет выделить следующие основные классы:

системы, настраивающиеся по сигналам внешних воздействий и выходных переменных;

системы, настраивающиеся по динамическим характеристикам объектов регулирования;

экстремальные самонастраивающиеся системы, обеспечивающие экстремум некоторого показателя объекта или системы.

Дополнительным признаком классификации можно считать способ воздействий элементов самонастройки на систему, что позволяет указать следующие подклассы самонастраивающихся систем:

с автоматической настройкой параметров системы (собственно самонастраивающиеся системы);

с автоматической настройкой структуры системы (самоорганизующиеся системы);

с автоматическим изменением алгоритма функционирования (самоалгоритмизирующиеся системы).

Последние являются наиболее совершенными самонастраивающимися системами, особенно самообучающиеся системы, в которых логическое устройство запоминает результаты самонастройки и использует их непосредственно в работе системы.

Самонастраивающиеся системы разделяются также на разомкнутые и замкнутые относительно контура самонастройки и выхода системы, на аналитические, поисковые, комбинированные и т. д.

§ 21.4. Особенности самонастраивающихся систем

Имеется существенное различие между настраиваемыми и самонастраивающимися системами. Зная общие характеристики объекта, а также их зависимость от окружающих условий, можно ввести в систему заданную программу, которая произведет необходимую настройку регулятора. При этом получается система программного управления. Самонастраивающаяся система не требует полной информации обо всех данных системы и при изменении внешних условий автоматически настраивается с целью обеспечения заданного критерия качества. Чтобы обнаружить отклонения параметров объекта от оптимальных, в самонастраивающихся системах используются различные средства, например, организация автоматических пробных движений системы с последующим анализом исходной и вырабатываемой информации. По существу это автоматический поиск, являющийся наиболее характерным признаком самонастраивающихся систем. В качестве пробных движений в ряде случаев используются имеющиеся в системе флуктуации.

Существуют также системы, выделяющие отклонения параметров объекта с помощью вычислительных машин: такие системы называются *аналитическими*.

Элементы самонастройки вводятся в систему, если закон изменения характеристик объекта во времени не известен, а ручная или программная настройка не позволяют получить желаемые качества работы системы в течение всего времени. Иногда ручная настройка невозможна во время эксплуатации, а программная настройка не может быть применена из-за случайного характера изменения некоторых параметров объекта (например, при создании систем управления полетом, производственными процессами в металлургии, в машиностроении, в химической промышленности и др.).

Чтобы обеспечить самонастройку, следует применять вычислительные устройства, корректирующие устройства с изменяемыми параметрами, регулятор с изменяющейся структурой. Кроме того, могут изменяться параметры (настройка) регулятора, тип нелинейности регулятора, параметры или структура системы.

Вопрос о том, где и когда нужно использовать эти средства, решается с учетом типа системы и сложности условий самонастройки.

Самонастраивающиеся системы прежде всего являются динамическими устойчивыми системами, работающими по принципу отклонения

выходной переменной или с использованием комбинарованного принципа. Однако имеются некоторые характерные особенности самонастраивающихся систем.

1. Во всякой самонастраивающейся системе должно быть не менее двух контуров: основной контур и контур самонастройки.

2. Самонастраивающиеся системы должны иметь элементы с изменяемыми (непрерывно или дискретно) параметрами, характеристиками или структурой и переменным в процессе работы законом управления. Таким образом, самонастраивающиеся системы в общем случае являются нелинейными нестационарными системами.

3. Самонастраивающиеся системы должны иметь логические элементы (вычислительные машины в общем случае). Это приводит к необходимости разработки аналитических методов, сочетающих в себе методы теории автоматического управления и вычислительной техники.

4. Самонастраивающиеся системы обладают повышенной чувствительностью к изменению параметров системы и входных сигналов, так как они в большинстве случаев работают на границе устойчивости или вблизи ее (по основному контуру).

§ 21.5. Системы, настраивающиеся по сигналам внешних воздействий и выходных переменных

Оптимальная по точности или быстродействию автоматическая система обычно рассчитывается при определенных внешних условиях на один вид случайного входного сигнала, поэтому при изменении его характеристик требуемая точность или быстродействие системы не могут быть обеспечены. В связи с этим используются элементы самонастройки, позволяющие в ряде случаев подавить случайные помехи и обеспечить минимальное значение среднеквадратической ошибки или максимальное быстродействие при изменяющихся внешних условиях.

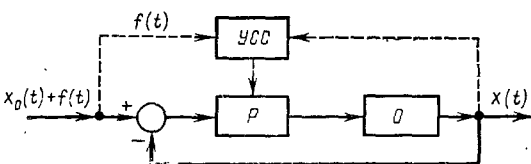


Рис. 21.2

Для решения данной задачи могут быть использованы различные устройства самонастройки, которые воздействуют либо на параметры регулятора, либо на его структуру. На рис. 21.2 показана условная схема самонастраивающейся системы, обеспечивающей посредством устройства самонастройки УСС оптимальное подавление помехи $f(t)$, поступающей совместно с полезным сигналом $x_0(t)$. Такая самонастраивающаяся система будет являться оптимальной по точности при различных входных сигналах и помехах, либо оптимальной по быстродействию.

В некоторых случаях требуется обеспечить неизменность установленного показателя качества системы при переменной нагрузке. Для этого используются элементы самонастройки УСС, обеспечивающие

в результате анализа возмущающего воздействия $z(t)$ изменение либо параметров, либо структуры регулятора (рис. 21.3).

Если же нельзя измерить сигнал внешних воздействий и произвести его анализ, то устройства самонастройки могут использовать выходной сигнал или сигнал ошибки. В результате анализа этих сигналов, изменяющихся под влиянием внешних воздействий (на входе или по нагрузке), элементы самонастройки обеспечивают неизменность некоторого показателя качества системы. На рис. 21.4

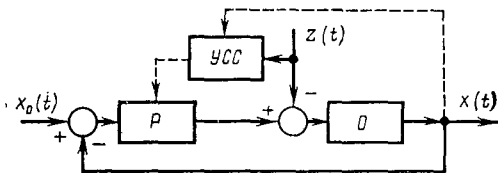


Рис. 21.3

показана условная схема самонастраивающейся системы, которая обеспечивает минимум ошибки посредством воздействия на параметры или структуру регулятора P , объекта O и главной обратной связи $ГОС$, используя сиг-

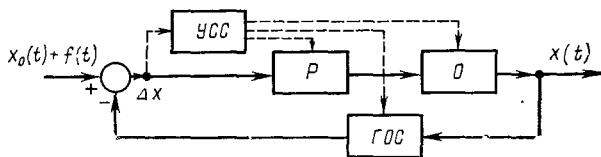


Рис. 21.4

нал ошибки. На рис. 21.5 показана условная схема, устройства самонастройки $УСС$ которой с помощью переключателей Π_1 и Π_2 производят переключение неединичной главной обратной связи $ГОС$ по выходной переменной ($\beta_0, \dots, \beta_m$) и ее скорости ($\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$) (используется дифференцирующий элемент $ДЭ$), в функции ошибки и ее скорости, а также по выходной переменной и ее скорости.

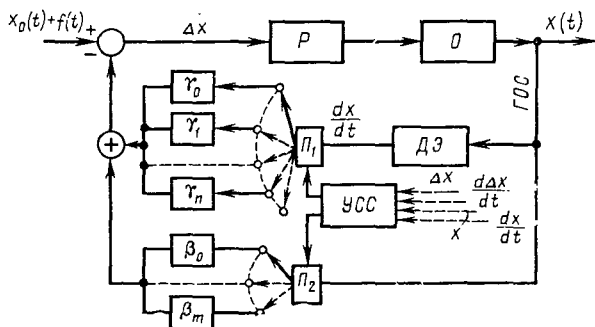


Рис. 21.5

Следует отметить, что переключение структуры регулятора на одну из заданных заранее схем, а также изменение параметров регулятора и обратных связей обычно производится дискретно.

В более совершенных системах устройства самонастройки могут изменять параметры, структуру, алгоритм функционирования и осуществлять самообучение (самоприспособляемость с запоминанием результатов самонастройки).

§ 21.6. Системы, настраивающиеся по динамическим характеристикам объектов

К этому классу относятся системы, в которых параметры или структура регулятора автоматически перестраиваются в соответствии с непредвиденными изменениями во времени динамических характеристик объекта, чтобы обеспечить выполнение заданного критерия качества. Обычно критерий самонастройки связывает параметры системы с показателями качества. При этом задача самонастройки может предусматривать выполнение следующих требований: минимизации среднеквадратической ошибки (из условий наилучшей статистической фильтрации) и времени регулирования; наилучшего приближения к некоторой оптимальной кривой в каждый момент времени. Могут быть поставлены также другие задачи самонастройки при переменных внешних условиях, влияющих на динамические характеристики объекта, например, обеспечения определенной передаточной функции и др.

Необходимость самонастройки возникает в тех случаях, когда параметры объекта и его динамические характеристики меняются под действием внешних условий так, что их поведение трудно предсказать. Для осуществления самонастройки надо определять динамические свойства объекта регулирования.

Одним из способов самонастройки с целью сохранения динамических характеристик на выходе при изменении характеристик объекта является применение моделей. В этом случае настройка параметров производится по эталонам, которыми могут быть параметры или динамические характеристики модели.

В общем случае самонастраивающиеся системы с моделями могут быть построены следующим образом:

- с последовательно или параллельно включаемой моделью и вычислителем параметров объекта;

- с эталонной или подстраиваемой (обучающейся) моделью, выход которой сравнивается с выходом объекта;

- с анализаторами характеристик объекта и т. д.

Использование вычислителя параметров. В самонастраивающихся системах с последовательно включенной моделью и вычислителем параметров объекта в принципе можно обеспечить идеальную компенсацию влияния изменяющихся параметров объекта. В действительности же из-за ошибок вычислений текущих значений параметров, а также из-за возможных изменений характеристик модели эта компенсация не может быть абсолютно точной. Такие системы строятся по принципу инвариантности. Они отличаются значительной сложностью контура самонастройки.

Если модель включена параллельно и используется вычислитель, определяющий параметры объекта, то в результате сравнения этих параметров с параметрами модели (с эталонами) определяется сигнал для устройства самонастройки. Основным недостатком таких систем являются: необходимость вычисления текущих значений параметров объекта, связанная с этим малая скорость процесса самонастройки и относительная сложность канала самонастройки. Для определения текущих значений параметров системы при этом обычно используются корреляционные методы, требующие осреднения соответствующих функционалов времени входных и выходных процессов системы на интервалах времени, существенно больших времени переходных процессов системы. Построение самонастраивающихся систем по способу параллельного включения модели с вычислителем параметров объекта используется для систем с медленно (по сравнению с длительностью переходного процесса) изменяющимися параметрами.

Использование эталонных моделей динамических характеристик. Значительный эффект может быть получен при построении самонастраивающихся систем с эталонной моделью, динамические характеристики которой сравниваются с характеристиками объекта. Если в результате изменения параметров динамические характеристики объекта O отклоняются от оптимальных характеристик модели M , то появляется сигнал $x_c(t)$, действующий на устройство самонастройки УСС (рис. 21.6, а), которое изменяет параметры или структуру регулятора P . Если, например, изменяется коэффициент усиления объекта k_o , то контур самонастройки должен обеспечить такое изменение коэффициента усиления регулятора k_p , чтобы

$$k_p k_o = K_m = \text{const},$$

где K_m — коэффициент усиления модели.

При выполнении этого условия выходной процесс $x(t)$ системы в установившемся режиме будет совпадать с выходным процессом модели $x_m(t)$. В переходных режимах эти процессы будут также достаточно близкими.

Еще одна разновидность самонастраивающейся системы с эталонной моделью представлена на рис. 21.6, б. Здесь вместо изменения структуры или параметров регулятора подстраиваются параметры

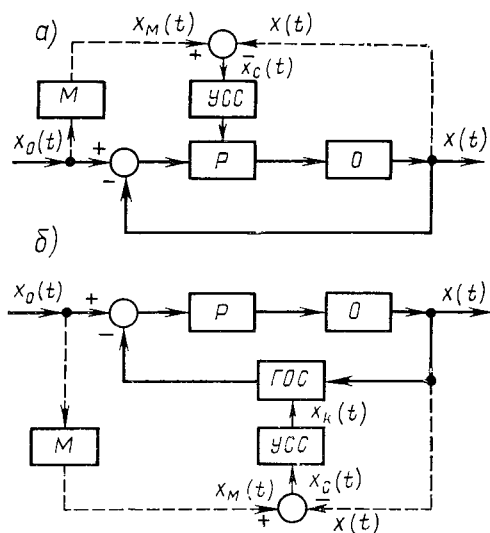


Рис. 21.6

или структура главной отрицательной обратной связи ГОС системы. Кроме подстройки параметров устройство самонастройки в такой системе может также изменять структуру регулятора и т. д.

Достоинствами самонастраивающихся систем с эталонной моделью динамических характеристик являются простота контура самонастройки, отсутствие необходимости измерять (вычислять) параметры объекта и др.

Динамика самонастраивающейся системы определяется устойчивостью и продолжительностью процесса самонастройки, который заканчивается при $x_c(t) = 0$.

Системы с моделью динамических характеристик, в которых сигнал $x_c(t)$ поступает только на вход регулятора и не изменяет его параметры и структуру, не являются самонастраивающимися; практически — это обычные системы со сложными корректирующими устройствами.

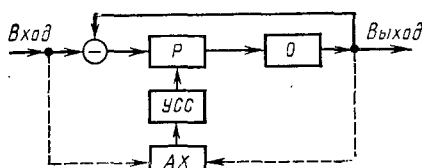


Рис. 21.7

Применение анализаторов характеристик объекта и системы. При данном способе построения систем вместо модели используется анализатор

характеристик. Так как изменение параметров объекта под влиянием внешних условий отражается на его характеристиках, то для самонастройки системы могут быть использованы анализаторы характеристик и вычислительные устройства. В самонастраивающихся системах, основанных на контроле характеристик замкнутых систем, определяются динамические характеристики систем и сравниваются с эталонными заданными характеристиками. Динамическими характеристиками, используемыми для оценки переходного процесса в замкнутой системе, могут быть частотные характеристики, переходные и передаточные функции. Для контроля характеристик можно использовать либо естественные, либо создаваемые искусственно колебания. На рис. 21.7 показана условная схема самонастраивающейся системы с анализатором характеристик $АХ$ и устройством самонастройки $УСС$.

Структура анализатора характеристик определяется видом характеристик, используемых для контроля. Так, если анализируются частотные характеристики замкнутой системы, то могут применяться фильтры, счетно-решающие устройства для определения амплитуд и фаз. При этом на вход системы подаются синусоидальные колебания. Это позволяет найти вещественную и мнимую частотные характеристики замкнутой системы, которые сравниваются с заданными частотными характеристиками. Если контроль частотных характеристик производится при нескольких значениях частоты, то на вход системы подаются синусоидальные колебания этих частот и применяются соответствующие каналы измерения амплитуд и фаз.

Кроме того известно, что, например, импульсная переходная функция на выходе замкнутой системы эквивалентна частотной или передаточной функции замкнутой системы. Следовательно, инфор-

мация об импульсной переходной функции системы может быть использована для построения контура самонастройки. Измерение функции и сравнение с эталонной дает разностный сигнал, который используется для изменения параметров системы контуром самонастройки. Основано это на том, что любые изменения параметров системы непосредственно отражаются на форме импульсной характеристики, поэтому периодическое измерение этой характеристики позволит обнаружить изменение параметров системы, а величина этих изменений может быть использована для самонастройки.

Существует несколько способов измерения импульсной характеристики, определяемой импульсной переходной функцией.

Первым является возбуждение системы кратковременным импульсом и измерение реакции на выходе системы. Этот способ дает хорошие результаты, когда удельный вес других входных сигналов мал по сравнению с возбуждающим входным импульсом. Для самонастройки можно использовать следующие данные импульсной характеристики: отношение положительных площадей, ограничиваемых импульсной характеристикой $g(t)$, к отрицательным площадям; отношение амплитуд последовательных пиков и др. На рис. 21.8, а показаны импульсные характеристики системы второго порядка при различных значениях коэффициента демпфирования ρ . Если выбрать в качестве критерия функцию от положительной S_+ и отрицательной S_- площадей импульсной характеристики (рис. 21.8, б)

$$\varphi = S_+ + \alpha S_-, \quad (21.1)$$

то этот критерий качества будет зависеть от коэффициента демпфирования ρ , определяющего коэффициент α . Можно при этом добиться, чтобы показатель φ менял знак при заданном значении коэффициента демпфирования (рис. 21.8, в). Фактор изменения знака показателя φ может быть использован для самонастройки системы, обеспечивающей $\varphi = 0$ при заданном оптимальном переходном процессе.

Вторым способом определения импульсной переходной функции является использование интеграла свертки, устанавливающего связь выходной переменной $x(t)$ и импульсной переходной функции $g(t) = x'(t)$ при заданном входном сигнале $x_{вх}(t)$:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) x_{вх}(t - \lambda) d\lambda. \quad (21.2)$$

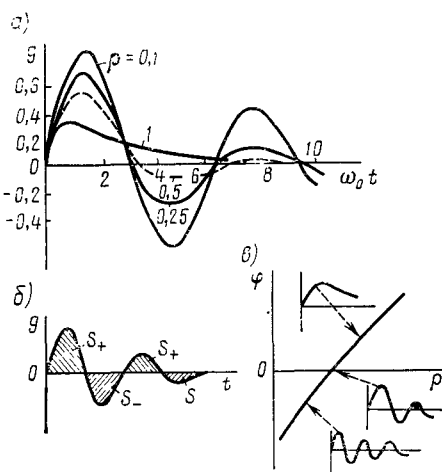


Рис. 21.8

Так как $x_{\text{вх}}(t)$ известно, а $x(t)$ может быть измерено, то определение $g(t)$ сводится к решению интегрального уравнения (21.2): разложению в ряды $x(t)$ и $x_{\text{вх}}(t)$ и последующему интегрированию по отдельным интервалам [Л.35]. При построении таких систем используются ЦВМ.

Третий способ определения импульсной переходной функции основан на применении принципов статистической динамики. В связи с этим для построения контура самонастройки используется обычно коррелятор. Как известно, взаимная корреляционная функция, определенная при воздействии на систему «белого шума», равна импульсной переходной функции системы [Л.46]. Если на автоматическую систему, имеющую импульсную переходную функцию $g(t)$, действует случайный сигнал в виде белого шума, полоса частот которого в $3 \div 10$ раз превышает полосу рабочих частот системы, то взаимная корреляционная функция входного и выходного сигналов системы в момент τ определяется значением импульсной переходной функции $g(t)$.

Пусть $h(t)$ — входной сигнал, а $x(t)$ — выходной сигнал, тогда взаимная корреляционная функция этих сигналов

$$R_{xh}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T h(t-\tau) x(t) dt. \quad (21.3)$$

Учитывая (21.2), вместо (21.3) получим

$$R_{xh}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T h(t-\tau) dt \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) h(t-\lambda) d\lambda.$$

После перестановки порядка интегрирования запишем

$$R_{xh}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) d\lambda \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T h(t-\tau) h(t-\lambda) dt \right].$$

В квадратных скобках полученного выражения записана автокорреляционная функция при значении $(\tau - \lambda)$, поэтому

$$R_{xh}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) R_{hh}(\tau - \lambda) d\lambda. \quad (21.4)$$

Таким образом, взаимная корреляционная функция определяется реакцией системы, если на ее вход подается автокорреляционная функция. Так как при белом шуме на входе автокорреляционная функция является импульсной, то справедливо соотношение

$$R_{xh}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) \delta(t - \lambda) d\lambda = g(\tau). \quad (21.5)$$

Отсюда следует, что выходной сигнал взаимного коррелятора определяет значение импульсной переходной функции в одной точке.

Чтобы получить ее значения в других точках, надо применить несколько каналов взаимного коррелятора при соответствующих запаздываниях $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$.

На рис. 21.9 приведена условная схема самонастраивающейся системы по динамическим характеристикам объекта с использованием многоканального взаимного коррелятора ВК, построенного в соответствии с (21.3), и анализатора характеристик. Для создания такой системы требуется генератор белого шума ГБШ, многоканальная временная задержка МКВЗ, многоканальное множительное и суммирующее устройство МКМСУ, анализатор характеристик АХ и устройство самонастройки УСС, изменяющее параметры (или структуру,

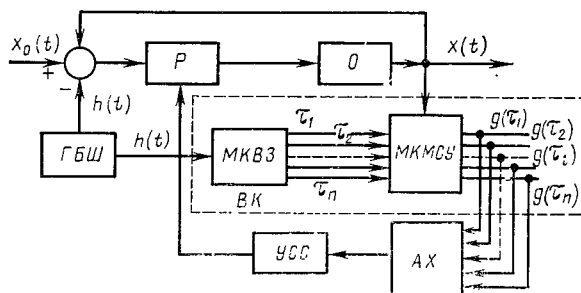


Рис. 21.9

или закон управления) регулятора. В качестве критерия самонастройки может быть выбрано соотношение положительной и отрицательной площадей (см. рис. 21.8, б).

Реализация самонастраивающихся систем с использованием взаимных корреляторов возможна в тех случаях, когда время изменения характеристик объекта значительно больше времени переходного процесса системы.

Следует отметить, что аналитические самонастраивающиеся системы пока еще находятся в стадии разработки.

§ 21.7. Понятие об экстремальных автоматических системах

Если имеющиеся в системе элементы самонастройки обеспечивают некоторый показатель системы, имеющий экстремальную зависимость от значений каких-либо параметров или переменных, то самонастраивающаяся система относится к классу *экстремальных*. Основой таких систем является нелинейное звено, обеспечивающее оптимальный режим работы системы по экстремальному значению основного показателя качества.

Необходимость создания экстремальных самонастраивающихся систем встречается в различных областях техники: обеспечение минимума расхода топлива при полете самолета или движении морских и речных судов и др.

В зависимости от того, является экстремальная характеристика, в данной системе стабильной (фиксированной) или меняющейся в процессе работы и под влиянием внешних условий, экстремальные системы подразделяются на две основные группы:

статические экстремальные системы, экстремальная характеристика $Q(x)$ которых стабильна (рис. 21.10, а); в этих системах осуществляется оптимальное управление, соответствующее экстремуму показателя качества, при неизменном значении параметров, установленных для заданного экстремума;

динамические экстремальные системы, экстремальная характеристика $Q(x)$ которых не является стабильной; здесь возможны два основных случая — когда изменения экстремальной характеристики

в зависимости от некоторого параметра известны и когда эти изменения неизвестны и имеют случайную зависимость экстремальной характеристики от многих факторов.

Статические экстремальные системы являются простейшими системами, их специфика определяется только назначением и вы-

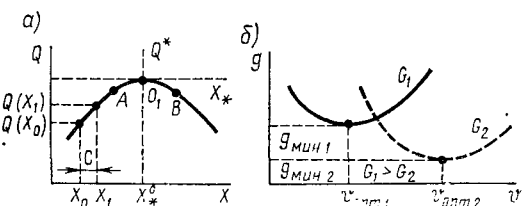


Рис. 21.10

бранным экстремальным критерием оптимальности.

Наибольший интерес представляют динамические экстремальные системы, которые содержат либо программное управление, либо устройства автоматического поиска экстремума.

Экстремальные системы с программным управлением разрабатываются в случаях, когда изменение экстремальной характеристики известно заранее. Такая система может быть предназначена, например, для обеспечения полета самолета на максимально возможное расстояние. Известно, что дальность полета самолета зависит от экономичности работы его двигателей. Так как самолетные двигатели имеют оптимальный режим, при котором расходуется минимальное количество топлива на один километр $g_{мин}$, то существует оптимальная скорость полета самолета $v_{опт}$, при которой удельный расход топлива будет минимальным (см. рис. 21.10, б). Экстремальная характеристика $Q(x) = g(v)$ в данном случае не является стабильной и существенно зависит от общего веса самолета G . В начальный период полета при полном запасе топлива общий вес самолета составляет G_1 ; этому соответствует расход топлива $g_{мин1}$ и оптимальная скорость полета $v_{опт1}$. По мере сгорания топлива вес самолета уменьшается (G_2), экстремальная характеристика при этом смещается и экстремальный режим определяется другим расходом топлива $g_{мин2}$ и оптимальной скоростью полета $v_{опт2}$. Следовательно, по мере уменьшения веса топлива (общего веса самолета) необходимо изменять величину экстремальной скорости полета. Это можно выполнить, применяя программное управление.

Закон изменения экстремальной скорости определяется следующим образом.

Пусть задана зависимость экстремальной скорости полета от общего веса самолета

$$v_{\text{эк}} = f(G).$$

Далее рассчитывается изменение веса самолета во время полета (по известной скорости и расходу топлива)

$$G = \varphi(t).$$

Обе зависимости дают необходимый закон управления скоростью самолета для обеспечения максимальной дальности полета

$$v_{\text{эк}} = f[\varphi(t)]. \quad (21.6)$$

Полученный закон используется для программного управления полетом самолета. Точность управления, обеспечивающего экстремальный закон, зависит от точности описания действительного характера изменения оптимальной скорости во времени. Однако в общем случае характер изменения скорости (21.6) установить трудно из-за наличия случайных факторов (изменение веса и состояния поверхности самолета из-за обледенения и др.), поэтому программное управление не всегда возможно.

На практике встречаются также другие случаи программного управления в экстремальных системах.

Более совершенной системой является экстремальная система с автоматическим поиском экстремума, позволяющая при неизвестном законе изменения экстремальной характеристики обеспечить экстремальное значение показателя качества системы. Такие системы обладают свойством самонастройки на экстремум. Экстремальная система обычно разрабатывается, если существует экстремальная зависимость $Q(x)$

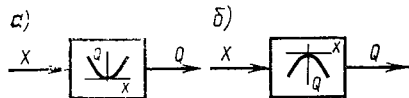


Рис. 21.11

объекта. Звено с экстремальной характеристикой, имеющей минимум или максимум основного показателя, может иметь различное изображение на структурной схеме (рис. 21.11) системы. При этом объект условно изображается в виде линейной части объекта ЛЧО и нелинейной части с экстремальной характеристикой (см. рис. 21.12, 21.13, 21.15 и др.).

Большое значение в настоящее время приобретают системы, вид экстремальной характеристики которых неизвестен, а единственным источником информации являются измеряемые в процессе работы значения показателя качества Q . Для определения того, является ли данное значение Q экстремальным, достаточно изучить значения Q при некоторых значениях основной переменной x , определяющей экстремальное значение Q .

Таким образом, в самонастраивающейся экстремальной системе должны осуществляться две операции:

выявление соотношения между исходным значением показателя качества Q и его экстремальным значением (пробная или поисковая операция);

обработка найденного значения изменения настройки регулятора с целью сохранения экстремума показателя качества (рабочая операция).

Чтобы пояснить операцию поиска, рассмотрим случай одномерной задачи, когда Q зависит только от одной регулируемой величины X . Пусть в исходном положении $X = X_0$ и далее в результате изменения настройки регулятора получено (см. рис. 21.10, а) $X_1 = X_0 + C$. Если при этом окажется, что $Q(X_1) > Q(X_0)$, то это значит, что приращение дано в сторону максимума, т. е. в правильном направлении. В противном случае, т. е. при $Q(X_1) < Q(X_0)$ необходимо обеспечить уменьшение X . Результат $Q(X_1) = Q(X_0)$ показывает, что настройка регулятора находится вблизи экстремального значения (случай точки перегиба не рассматривается). Если экстремальная характеристика имеет минимум (см. рис. 21.10, б), то неравенства $Q(X_1)$ и $Q(X_0)$ должны быть обратными указанным выше при движении к точке экстремума. Кроме того, чтобы сделать правильное заключение о направлении движения к экстремуму, следует учитывать положение исходной точки относительно экстремума.

Из указанного можно установить, что операция поиска сводится к определению производной (крутизны) в данной точке экстремальной характеристики:

$$S_0 = [dQ(X)/dX]_{X=X_0}. \quad (21.7)$$

Для точки экстремума получим $S_{\text{эк}} = 0$.

Определение производной (крутизны) экстремальной характеристики не является единственным способом поиска экстремума. Существуют и другие способы: непосредственное измерение производной, определение знака производной, вычисление экстремума и др.

Таким образом, для самонастраивающейся экстремальной системы характерно наличие операции поиска экстремума. В зависимости от того, используется ли дополнительный сигнал для поиска экстремума, системы подразделяются на две группы — системы без дополнительного поискового сигнала и системы с дополнительным поисковым сигналом.

В процессе выполнения рабочей операции экстремальная система действует как обычная автоматическая система, сводящая ошибку, т. е. текущее значение S , к нулю.

Процесс действия экстремальной системы разбивается на ряд последовательных этапов с выполнением операций поиска и изменения настройки входа регулятора на величину, зависящую от найденного значения крутизны S , знака производной и т. д.

В многомерных задачах, где имеется большое количество регулируемых параметров, определяющих экстремум показателя Q , действие экстремальной системы значительно сложнее.

В зависимости от того, используется ли непосредственно значение крутизны или знак производной при формировании рабочей опе-

рации, экстремальные системы разделяются на пропорциональные и релейные.

В пропорциональных экстремальных системах рабочий сигнал характеризуется зависимостью

$$dx_{\text{раб}}/dt = hS. \quad (21.8)$$

В релейных экстремальных системах рабочий сигнал характеризуется зависимостью

$$dx_{\text{раб}}/dt = h_0 \operatorname{sign} S. \quad (21.9)$$

В пропорциональных экстремальных системах осуществляется зависимый поиск, поскольку скорость отработки регулятора зависит от величины S . В релейных экстремальных системах осуществляется независимый поиск, поскольку скорость отработки регулятора в этом случае не зависит от величины S и является постоянной.

При выборе релейной или пропорциональной системы исходят из заданных требований, предъявляемых к процессу оптимизации, и учитывают инерционные свойства объекта.

В пропорциональных системах пробные и рабочие движения обычно разделены, а в релейных системах — объединены. В связи с возможностью использования автоколебательной или вынужденной периодической составляющей в качестве пробного сигнала, разделенного в этом случае с управляющим рабочим сигналом, релейные экстремальные системы становятся инвариантными к параметрам объекта. Это обстоятельство, а также простота конструкции регулятора, определили широкое применение релейных экстремальных систем.

§ 21.8. Понятие о построении экстремальных систем

Структура самонастраивающихся экстремальных систем зависит от используемого способа поиска экстремума. Рассмотрим принципы построения таких систем для основных случаев: определения производной, определения знака производной и вычисления или измерения экстремума.

Системы с определением производной без дополнительного поискового сигнала. Какой бы ни была функция $Q(X)$, экстремальное значение ее определяется равенством производной нулю:

$$S_{\text{эк}} = dQ(X)/dX = 0.$$

Следовательно, чтобы обеспечить экстремальное регулирование, необходимо определить производную показателя Q , затем производную регулируемой переменной и разделить эти производные:

$$S = \frac{dQ(X)/dt}{dX/dt} = \frac{dQ(X)}{dX}. \quad (21.10)$$

Рабочий сигнал определяется зависимостью (21.8) с учетом (21.10). Установившийся режим системы соответствует точке экстремума, когда $S_{\text{эк}} = 0$. При этом система автоматически самонастраивается на

точку экстремума при любых смещениях экстремальной характеристики под влиянием внешних условий. Так как в указанных системах используется производная экстремального параметра по входной переменной, то они иногда называются *градиентными*.

Экстремальная система, основанная на измерении производной S , состоит из двух дифференциаторов $ДФ$ и блока деления $Д$, действующих через регулятор P на линейную часть объекта $ЛЧО$ (рис. 21.12).

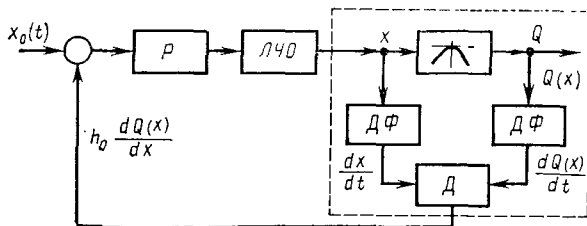


Рис. 21.12

Эта схема очень проста, но из-за наличия дифференцирующих блоков чувствительна к высокочастотным помехам, что существенно ограничивает область применения систем данного типа.

Системы, построенные по данному принципу, относятся к пропорциональным экстремальным системам.

Системы с определением знака производной без дополнительного поискового сигнала. Стремление исключить ошибку, вносимую дифференцирующими блоками при действии помех, привело к созданию

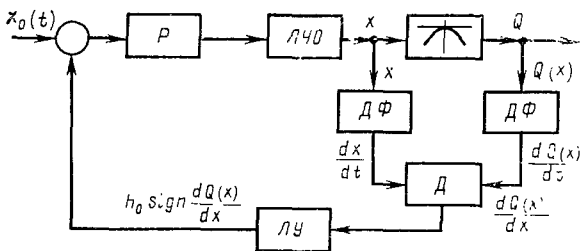


Рис. 21.13

систем, реагирующих на знак производной функции $Q(X)$. Знак производной однозначно определяет место положения точки на экстремальной характеристике. Если производная положительна, то точка находится с одной стороны от экстремума кривой (слева при максимуме), если она отрицательна, то с другой стороны. Достижение экстремальной точки соответствует нулевому значению производной.

На рис. 21.13 показана структура одной из возможных схем экстремальной системы с определением знака производной. Здесь устройство самонастройки на экстремум, кроме дифференциаторов $ДФ$ и делителя $Д$, содержит логическое устройство $ЛУ$, определяющее

знак производной и формирующее рабочий сигнал вида (21.9), поступающий через регулятор P на линейную часть объекта ЛЧО. Системы, использующие данный принцип, относятся к типу релейных экстремальных систем.

Экстремальные системы, реагирующие на знак производной, могут быть построены также по принципу определения знака приращения ΔQ при заданном приращении Δx . Действительно, при замене производной отношением конечных приращений получим

$$dQ(X)/dX = \Delta Q/\Delta X, \quad (21.11)$$

где знак ΔQ зависит от местоположения точки на характеристике относительно экстремума. В системах этого типа имеется логическое устройство, формирующее рабочий сигнал в зависимости от знака приращения основного показателя качества ΔQ . Контур самонастройки на экстремум может содержать устройство памяти экстремального значения $Q_{\text{эк}}$ и логическое устройство. Из-за наличия логического устройства системы данного типа иногда называются *системами логического действия*. Работа экстремальной системы с определением знака производной (приращения) характеризуется наличием установившихся поисковых колебаний относительно точки экстремума, поскольку логическое устройство переключается всякий раз при изменении знака приращения ΔQ . Во время такого процесса система следит за уходом экстремальной точки (с учетом влияния внешних условий и т. д.) и выполняет нужные логические операции, способствующие движению в направлении экстремума. На рис. 21.14 показано изменение основных переменных, характеризующих процесс в экстремальной системе с регулированием по знаку производной (принято, что все элементы системы являются безынерционными).

Если условно перенесем начало координат в точку экстремума O_1 (см. рис. 21.10, а), то, обозначив отклонение выходной переменной экстремального звена через Q^* , запишем следующую зависимость:

$$Q^* = -kX_*^2, \quad (21.12)$$

где X_* — отклонение входной переменной.

Для экстремальной характеристики с минимумом

$$Q^* = kX_*^2. \quad (21.11a)$$

Предположим, что процесс регулирования начинается при расположении точки A слева от экстремума (см. рис. 21.10, а), когда на вход регулятора подан сигнал, определяющий зависимость (21.9). В связи с этим x_* будет изменяться с постоянной скоростью

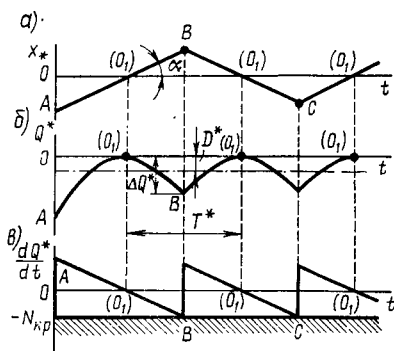


Рис. 21.14

исполнительными работами функциональных элементов осуществляется командным генератором $КГ$ импульсного действия, который представляет собой сочетание генератора импульсов с шаговым или бестактным распределителем импульсов. Величина выбираемого шага Δt зависит от степени ухода экстремальной характеристики под влиянием внешних условий и от условий защиты от помех. Первый фактор вынуждает выбирать как можно меньшее значение шага, а второй — возможно большее. Величина Δt задается командным генератором. Чем меньше величина шага, тем меньше зона нечувствительности регулятора и устройства сравнения, меньше период и амплитуда колебаний экстремального параметра. Амплитуда колебаний зависит от крутизны участка экстремальной характеристики, соответствующего каждому шагу (рис. 21.16). Из-

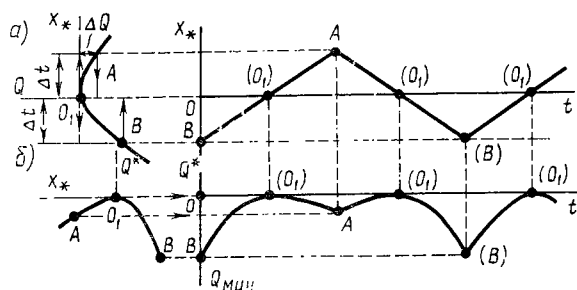


Рис. 21.16

менение входной переменной экстремального звена $x_*(t)$ подобно введенному на рис. 21.14, а. В связи с фиксацией значений экстремального параметра в дискретные моменты времени действительная экстремальная характеристика в системе шагового типа заменяется ступенчатой (рис. 21.16, а). На тех участках, где величина отрицательного приращения экстремального параметра превышает зону нечувствительности устройства сравнения, происходит реверс работы сигнала (система релейного типа), изменяющегося с постоянной частотой. Изменение экстремального параметра системы шагового типа (рис. 21.16, б) определяется крутизной экстремальной характеристики на каждом шаге в разные стороны (точки А и В) от экстремальной точки O_1 и стабильностью этой характеристики в течение периодов между реверсами логического устройства.

В системе шагового типа поиск экстремальной точки осуществляется на основании исследования влияния изменения основного входного сигнала на выходной экстремальный параметр. Однако системы шагового типа более помехоустойчивы и при соответствующем выборе величины шага и элементов системы имеют меньшую амплитуду выброса около экстремальной точки.

Системы с дополнительным поисковым сигналом. Определение положения системы относительно экстремальной точки может быть осуществлено при помощи дополнительного поискового сигнала, подаваемого на входе системы на основной сигнал. Поиск экстре-

мальной точки производится на основании дополнительного сигнала на выходе системы. Эти системы целесообразно применять в тех случаях, когда объект по условиям эксплуатации допускает периодический режим.

Дополнительный поисковый сигнал является модулирующим по отношению к основному сигналу, поэтому системы данного типа называются *экстремальными системами с модулирующим воздействием*.

Рассмотрим процесс прохождения дополнительного гармонического сигнала через экстремальное звено. Если основной сигнал X_1 соответствует положению точки на экстремальной характеристике,

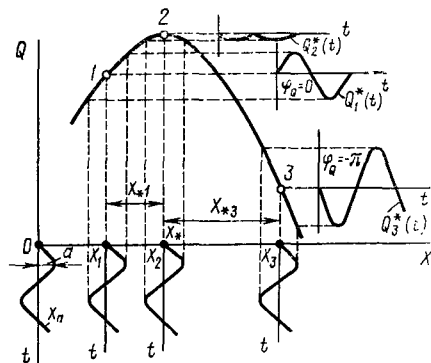


Рис. 21.17

находящейся слева (точка 1) от экстремума (рис. 21.17), то поданный на вход модулирующий гармонический сигнал определенной частоты создаст составляющую гармонических колебаний на выходе той же частоты. Фаза этих колебаний φ_Q будет совпадать с фазой входного периодического сигнала. Если основной сигнал X_3 соответствует положению точки на экстремальной характеристике, находящейся справа (точка 3) от экстремума, то поданный на вход модулирующий гармонический сигнал определенной частоты создаст составляющую гармонических колебаний на выходе той же частоты, но противоположной фазы. Следовательно, фаза выходного периодического сигнала φ_Q характеризует положение точки относительно экстремума. При сигнале X_2 , соответствующем экстремуму (точка 2), выходной сигнал имеет двойную частоту.

Таким образом, подавая на вход экстремальной системы гармонический сигнал (дополнительный поисковый сигнал), используя на выходе фильтр, пропускающий сигнал только основной частоты входного сигнала, и сравнивая фазу φ_Q выходного периодического сигнала с фазой входного сигнала, можно сформировать рабочий сигнал, обеспечивающий движение системы к экстремальной точке. Для выявления сдвига фазы выходного периодического сигнала по сравнению с входным обычно используется фазовый дискриминатор (синхронный детектор), поэтому системы данного типа в некоторых случаях называются *системами с синхронным детектором*. Принципы построения экстремальных систем с дополнительным поисковым сигналом поясняется на рис. 21.18. Здесь генератор синусоидальных колебаний создает на входе экстремального звена дополнительный непрерывный сигнал

$$x_n = a \sin \omega_n t, \quad (21.13)$$

где a и ω_n — амплитуда и частота дополнительного поискового сигнала.

Этот сигнал через регулятор P поступает на линейную часть объекта ЛЧО. Выходной сигнал экстремального звена $Q(t)$ подается на фильтр Φ , где выделяется периодическая составляющая основной частоты ω_n сигнала поиска. Далее сигнал с выхода фильтра поступает на фазовый дискриминатор $\Phi Д$, где выявляется сдвиг по фазе относительно сигнала генератора синусоидальных колебаний ГСК. Полученный сигнал проходит через логическое устройство ЛУ, которое формирует необходимый сигнал для движения системы к экстремальной точке. Такая система относится к типу релейных экстремальных систем.

В ряде случаев кроме фазового дискриминатора используется множительное звено и дополнительный фильтр, что позволяет получить систему пропорционального типа.

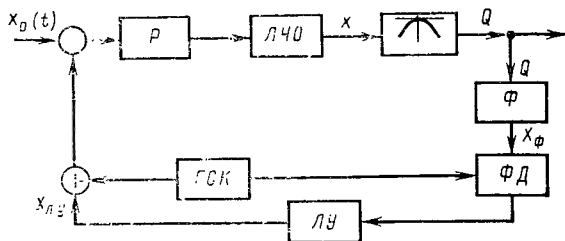


Рис. 21.18

Приведем аналитические выражения для системы с дополнительным поисковым сигналом.

Если все звенья системы считать безынерционными, то сигнал на входе экстремального звена (см. рис. 21.17):

$$x = X_i + a \sin \omega_n t, \quad (21.14)$$

где X_i — основной сигнал на входе экстремального звена.

Приведем сигнал (21.14) к экстремальной точке (см. рис. 21.10, а), условно помещая в ней начало координат, тогда (см. рис. 21.17):

$$x_* = X_{*i} + a \sin \omega_n t,$$

где X_{*i} — отклонение основного сигнала от экстремальной точки.

С учетом (21.12) отклонение сигнала на выходе экстремального звена

$$\begin{aligned} Q_n^* &= -k(X_{*i} + a \sin \omega_n t)^2 = -kX_{*i}^2 - 2kX_{*i}a \sin \omega_n t - \\ &- ka^2 \sin^2 \omega_n t = -k \left(X_{*i}^2 + \frac{a^2}{2} \right) - 2kX_{*i}a \sin \omega_n t + \frac{ka^2}{2} \cos 2\omega_n t. \end{aligned} \quad (21.15)$$

После прохождения фильтра сигнал

$$x_\phi = -2kX_{*i}a \sin \omega_n t. \quad (21.16)$$

Если используется фазовый дискриминатор, то сигнал (21.16) поступает на вход этого дискриминатора и далее на логическое устройство (см. рис. 21.18), формирующее рабочий сигнал

$$dx_i/dt = h_0 \operatorname{sign} [\varphi_Q]. \quad (21.17)$$

Таким образом, система с фазовым дискриминатором относится к типу релейных экстремальных систем.

Если используется множительное звено, то сигнал (21.16) и сигнал $a \sin \omega_n t$ с выхода линейной части объекта подаются на множительное звено, на выходе которого

$$x_m = -2kX_{*i} a^2 \sin^2 \omega_n t = -kX_{*i} a^2 (1 - \cos 2\omega_n t). \quad (21.18)$$

После прохождения этого сигнала через дополнительный фильтр выделяется постоянная составляющая $-kX_{*i} a^2$, формирующая рабочий сигнал

$$dx_i/dt = h_0 X_{*i}. \quad (21.19)$$

Следовательно, система с фильтрами и множительным устройством относится к типу пропорциональных экстремальных систем. Экстремальные системы с дополнительным поисковым сигналом не содержат дифференцирующих устройств, поэтому они хорошо защищены от помех и учитывают влияние внешних условий, вызывающих неустойчивость экстремальной характеристики. Рабочий сигнал в этих системах появляется только в случае ухода объекта от экстремума.

В автоколебательных нелинейных системах можно не вводить дополнительный поисковый сигнал, а использовать автоколебания системы для определения экстремума и формирования рабочего сигнала контура экстремальной настройки.

В качестве дополнительного поискового сигнала может быть использована также стационарная случайная помеха.

§ 21.9. Основные параметры, характеризующие экстремальные системы

В экстремальных системах наблюдаются колебания (рыскания) около экстремального значения выходной переменной системы. Определим параметры этих колебаний.

Для релейных экстремальных систем без дополнительного поискового сигнала. Из рис. 21.14, а и 21.16, а устанавливаем, что при постоянной скорости изменения входной переменной экстремального звена в интервале $T_i^* \leq t \leq T_i^*/2$

$$x_* = \pm \operatorname{tg} \alpha \cdot t = \pm k_1 t, \quad (21.20)$$

где $k_1 = \operatorname{tg} \alpha$; знак «+» соответствует периоду T_i^* , когда $x_*' > 0$; знак «-» — периоду T_i^* , когда $x_*' < 0$.

Период рысканий T^* системы определяется моментами прохождения точки через экстремум (см. рис. 21.14, б).

Используя (21.12) и (21.20), запишем выражение для отклонений экстремального параметра на одном участке периода:

$$Q^* = -kk_1^2 t^2. \quad (21.21)$$

Скорость изменения этого отклонения на участках между переключениями (см. рис. 21.14, в) определяется производной

$$dQ^*/dt = -2kk_1^2 t. \quad (21.22)$$

Среднее за период рыскания значение отклонения экстремального параметра называется *потерей на рыскание* D^* (см. рис. 21.14, б) и определяется интегралом

$$D^* = -\frac{1}{T^*} \int_0^{T^*} Q^* dt = -\frac{2kk_1^2}{T^*} \int_0^{0,5T^*} t^2 dt = -\frac{k(k_1 T^*)^2}{12}. \quad (21.23)$$

Амплитуда рыскания получается из (21.21), если подставить $t = 0,5T^*$ (см. рис. 21.14, б):

$$\Delta Q^* = -k(k_1 T^*)^2/4. \quad (21.24)$$

Из (21.23) и (21.24) видно, что амплитуда рысканий в три раза больше потери на рыскание:

$$\Delta Q^* = 3D^*. \quad (21.25)$$

Критическое значение производной экстремального параметра на основании (21.22) при $t = 0,5 T^*$ (см. рис. 21.14, в):

$$N_{\text{кр}} = (dQ^*/dt)_{\text{макс}} = -kk_1^2 T^*. \quad (21.26)$$

На основании (21.23) и (21.26) потери на рыскание, выраженные через критическое значение производной,

$$D^* = -T^* N_{\text{кр}}/12. \quad (21.27)$$

Следовательно, чтобы снизить потери на рыскание, надо уменьшить критическое значение производной (21.26) и период рыскания T^* . Однако это сопряжено с определенными трудностями (защита от помех и обеспечение стабильной работы системы). Частота рыскания системы определяется периодом T^* .

Для систем с дополнительным поисковым сигналом. Системы этого типа обычно работают в точке экстремума экстремальной характеристики. Если система находится вблизи экстремума, то при $X_{*i} \approx 0$ из (21.15) получим выражение для отклонения экстремального параметра.

$$Q_n^* = -ka^2 \sin^2 \omega_n t = -ka^2 (1 - \cos 2\omega_n t)/2. \quad (21.28)$$

В этом случае амплитуда рыскания на выходе системы, определяемая дополнительным поисковым сигналом,

$$\Delta Q_n^* = -ka^2. \quad (21.29)$$

Колебания экстремального параметра при этом происходят с двойной частотой и потеря на рыскание за период T^*

$$D_n^* = \frac{1}{T^*} \int_0^{T^*} Q_n^* dt = -\frac{1}{T^*} \int_0^{T^*} \left(-\frac{ka^2}{2} \right) dt + \frac{1}{T^*} \int_0^{T^*} \frac{ka^2}{2} \cos 2\omega_n t dt.$$

Последний интеграл в правой части равен нулю, поэтому потеря на рыскание в системе с дополнительным поисковым сигналом

$$D_n^* = -ka^2/2.$$

В данном случае потеря на рыскание в два раза меньше амплитуды рыскания:

$$D_n^* = \Delta Q_n^*/2. \quad (21.31)$$

Чтобы снизить потери на рыскание, следует уменьшить амплитуду дополнительного поискового сигнала, что в ряде случаев ограничивается влиянием помех. Правильно выбрать амплитуду и частоту дополнительного поискового сигнала можно, анализируя спектр помех на выходе системы. Участок спектра с наименьшими амплитудами помех позволяет найти амплитуду и частоту дополнительного поискового сигнала при минимальной потере на рыскание и достаточной надежности работы системы в экстремальном режиме.

Экстремальные системы пропорционального типа без дополнительного поискового сигнала не имеют рыскания около экстремума, поэтому они не имеют и потерь на рыскание.

§ 21.10. Влияние инерционности элементов экстремальной системы

Рассмотренные выше принципы построения экстремальных систем и их работа соответствуют идеальному случаю, когда все элементы являются безинерционными, поэтому движение рабочей точки происходит по экстремальной характеристике. Однако на практике система содержит ряд инерционных элементов. Инерционность искажает зависимости, характеризующие выход системы на экстремум. Изменение основных переменных в процессе поиска и рыскания системы будет отличаться от указанного на рис. 21.14 и 21.16.

Наличие инерционных элементов на выходе системы без дополнительного поискового сигнала приводит к смещению характеристики $Q^*(t)$ вдоль оси абсцисс и искажению ее формы без изменения зависимости $x_*(t)$.

Если система релейного типа без дополнительного поискового сигнала содержит инерционные элементы на входе и выходе, то графики $x_*(t)$ и $Q^*(t)$ искажаются и смещаются вдоль оси абсцисс (кривые 2 на рис. 21.19). При этом появляющиеся смещения T_1 и T_2 зависят от постоянных времени соответствующих инерционных элементов на входе и выходе системы (рис. 21.19, а и б, где кривые 1 соответствуют идеальной экстремальной системе, не имеющей инерционных элементов).

Динамика выхода системы на экстремум (в точку C , рис. 21.20) при наличии инерционных элементов характеризуется некоторым условным графиком, имеющим сложную форму (штриховая, рис. 21.20, a) по сравнению с реальной экстремальной характеристикой (сплошная, рис. 21.20, a). В этом случае система приходит к установившемуся режиму, когда рыскания около экстремума совершаются по петлеобразной характеристике (штриховая, рис. 21.20, b),

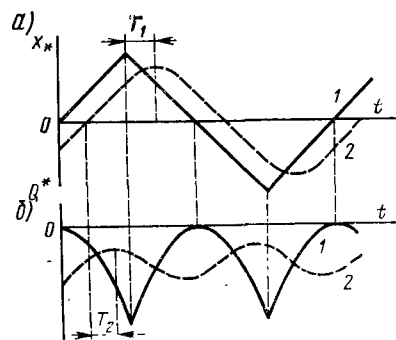


Рис. 21.19

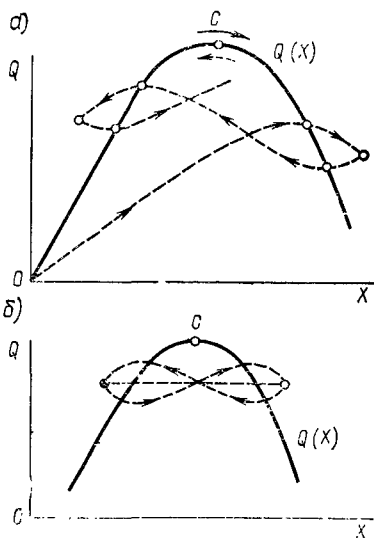


Рис. 21.20

но никогда не достигает экстремума. Петлеобразная характеристика называется *предельным циклом* рыскания. После смещения экстремума в результате неустойчивости экстремальной характеристики система перемещается на новый предельный цикл в области нового экстремума.

§ 21.11. О методах поиска экстремума, являющегося функцией нескольких независимых переменных

Случай, когда экстремальный параметр является функцией одной переменной величины, подаваемой на вход объекта, встречается наиболее часто. Однако величина экстремального параметра может зависеть от двух и более независимых друг от друга величин, подаваемых на вход объекта. В этом случае методы поиска экстремума более сложны.

Необходимым условием экстремума дифференцируемой функции нескольких независимых переменных

$$Q = F(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (21.32)$$

является равенство нулю в точке экстремума частных производных этой функции:

$$\partial F / \partial X_1 = 0; \partial F / \partial X_2 = 0; \dots; \partial F / \partial X_n = 0. \quad (21.33)$$

Введем понятие о г р а д и е н т е функции (21.32), представленном в виде суммы векторов:

$$\text{grad } F = \mathbf{k}_1 \frac{\partial F}{\partial X_1} + \mathbf{k}_2 \frac{\partial F}{\partial X_2} + \dots + \mathbf{k}_n \frac{\partial F}{\partial X_n}, \quad (21.34)$$

где $\mathbf{k}_i$ — единичные векторы осей, по которым отсчитываются независимые переменные.

В точке экстремума градиент функции (21.34) равен нулю ($\text{grad } F = 0$). Наличие градиента указывает на имеющиеся отклонения функции (21.32) от экстремума.

Задача поиска в системах данного вида разбивается на две: определение градиента (21.34) или отклонения от точки экстремума; организация движения к точке экстремума. Эти задачи решаются различными методами: конечных приращений, производной по времени, синхронного детектирования. Метод конечных п р и р а щ е н и й основан на замене частных производных в (21.34) отношениями конечных приращений и определении этих приращений. При этом поочередно изменяют переменные X_i и вычисляют соответствующие приращения составляющих градиента.

При методе п р о и з в о д н о й по времени поочередно изменяют переменные X_i и вычисляют соответствующие частные производные.

Недостатком этих двух методов является необходимость поочередного изменения переменных и вычисления составляющих градиента, что требует значительного времени.

При методе с и н х р о н н о г о д е т е к т и р о в а н и я параметры X_i модулируются дополнительными поисковыми сигналами различных амплитуд и частот. Причем, количество детекторов должно равняться числу независимых переменных, определяющих экстремум функции (21.32). Выходные сигналы синхронных детекторов приблизительно пропорциональны частным производным F по соответствующим переменным X_i , что можно установить после разложения функции (21.32) в ряд Тейлора по степеням приращений переменных ΔX_i , вызванных модулирующими колебаниями. В связи с тем, что модулирующие сигналы разделены по частотному спектру, составляющие градиента по соответствующим независимым переменным определяются параллельно, что значительно сокращает время вычисления градиента.

Для сокращения времени вычисления градиента могут быть применены также другие способы, например, использование быстродействующей вычислительной машины и модели объекта [Л. 28].

В зависимости от выбранного способа движения к экстремуму (вторая часть задачи настройки на экстремум) существует несколько методов поиска экстремума функции нескольких независимых переменных: Гаусса — Зайделя, градиента, наискорейшего спуска и др.

Метод Гаусса — Зайделя. Сущность этого метода заключается в поочередном изменении переменных X_i и поочередном движении системы в направлении экстремума составляющих градиента до тех

пор, пока не будет достигнута экстремальная точка. Первоначально изменяется координата X_1 в направлении уменьшения составляющей градиента $\partial F/\partial X_1$ при постоянных значениях других координат. После обращения в нуль составляющей $\partial F/\partial X_1$ изменяется координата X_2 в сторону уменьшения составляющей градиента $\partial F/\partial X_2$ при постоянных значениях других координат. Далее следует поиск по координате X_3 и т. д. После осуществления поиска по всем n независимым переменным вновь изменяется координата X_1 до обращения $\partial F/\partial X_1$ в нуль, и цикл повторяется. Процесс поиска заканчивается, когда все составляющие $\partial F/\partial X_i$ и градиент (21.34) будут равны нулю.

Рассмотрим процесс выхода на экстремум по методу Гаусса — Зайделя на примере зависимости экстремальной функции от независимых переменных X_1 и X_2 (рис. 21.21). Функция $F(X_1, X_2)$ представлена здесь линиями равных значений $F = \text{const}$; вблизи точки экстремума $Q_{\text{эк}}$ эти линии имеют вид concentric эллипсов. Пусть в начальный момент поиска система имеет значение экстремального параметра $Q_0 = F(X_{10}, X_{20})$ и характеризуется положением точки A на линии Q_A . Полагая фиксированным $X_2 = X_{20}$, изменяют переменную X_1 так, чтобы производная $\partial F/\partial X_1$ обратилась в нуль. Это происходит в точке B , где линия движения 1 касается линии Q_B . В этой точке система переключается на исследование переменной X_2 при фиксированном X_{1B} . Точка перемещается далее до того момента, когда $\partial F/\partial X_2$ станет равным нулю. Это происходит в точке C , где линия движения касается линии Q_C . После этого фиксируется переменная X_{2C} и исследуется переменная X_1 ; далее цикл повторяется до тех пор, пока система не выйдет на экстремум в точку $Q_{\text{эк}}$, где градиент и обе составляющие частных производных равны нулю. Здесь движение системы происходит в направлении уменьшения составляющих градиента.

Этот метод поочередного изменения переменных X_i удобен тем, что позволяет использовать известные типы экстремальных систем, созданные для поиска экстремума по одному параметру X с учетом дополнительного устройства переключения на исследуемые параметры. Однако, как видно из рис. 21.21 (линия 1), движение системы в область экстремума происходит далеко не кратчайшим путем.

Метод градиента. Этот метод заключается в определении всех составляющих градиента и обеспечении движения системы в направлении уменьшения мгновенного значения градиента.

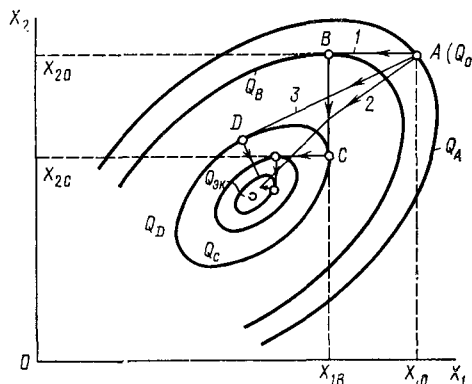


Рис. 21.21

Скорость изменения независимых переменных при движении системы к экстремуму пропорциональна составляющим градиента по соответствующим переменным:

$$dX_i/dt = a\partial F/\partial X_i, \quad (21.35)$$

где значение $a = \text{const}$ больше нуля для экстремума-максимума и меньше нуля для экстремума-минимума.

В случае дискретного изменения параметров величина приращения по данной переменной на каждом шаге пропорциональна соответствующей составляющей градиента

$$\Delta X_i = a\partial F/\partial X_i. \quad (21.36)$$

Зависимости (21.35) и (21.36) используются для формирования рабочих сигналов экстремальной системы, обеспечивающих движение к экстремальному значению выходной переменной Q . Траектория движения изображающей точки в пространстве координат X_i нормальна к поверхностям равных значений Q_i и соответствует кратчайшему пути в этом пространстве. Ломаная 2 на рис. 21.21 относится к случаю зависимости функции от двух переменных. Достоинством метода является относительно быстрый выход системы в область экстремума и малая величина амплитуды рыскания; недостатком — необходимость непрерывного определения значений градиента, что усложняет схему системы и требует значительного времени для вычисления градиента, т. е. не позволяет вывести систему на экстремум за наименьшее время.

Метод наискорейшего спуска по времени. При этом методе в начальной точке состояния системы определяется направление движения вектора градиента (21.34). Движение происходит до тех пор, пока частная производная экстремальной функции $\partial F/\partial l$, взятая вдоль указанного направления l , не обратится в нуль. В точке, где частная производная $\partial F/\partial l$ обращается в нуль, вновь находится направление движения вектора градиента. Движение происходит снова до обращения в нуль частной производной, взятой по новому направлению вектора градиента, и т. д. При этом движение изображающей точки в пространстве координат X_i характеризуется ломаной линией, участки которой в моменты изменения направления движения перпендикулярны.

На рис. 21.21 этому движению соответствует ломаная линия 3 для случая зависимости экстремальной функции от двух переменных. Направление движения из точки A определяется вектором градиента, нормальным к кривой Q_A до точки касания линии движения с кривой $Q_D = Q_C$ (точка D). Далее определяется новое направление движения вдоль вектора градиента, соответствующего точке D и т. д.

По сущности метода движение является шаговым, когда на определенных шагах вектор градиента принимается неизменным. Для метода наискорейшего спуска характерно относительно малое

время выхода на экстремум при крупных шагах движения на начальном этапе поиска. По сравнению с методом градиента здесь затрачивается меньшее время на вычисление градиента за весь период поиска.

В заключение следует указать, что возможно применение различных комбинаций указанных методов поиска.

Устройства, обеспечивающие автоматическое определение экстремума, иногда называются *оптимизаторами*.

§ 21.12. Краткие сведения о некоторых более совершенных самонастраивающихся системах

В последнее время в литературе часто встречаются термины «самообучающиеся» и «игровые» системы. Современная техника действительно может обеспечить создание систем, которые в состоянии не только видоизменять свои характеристики, но и самоулучшать их в процессе функционирования, т. е. обучаться в процессе работы и т. д. Такие системы являются наиболее совершенным типом самонастраивающихся систем и наиболее высоким классом автоматических систем.

Если в самонастраивающейся системе предусмотреть еще один контур самонастройки, то система получит способность к с а м о с о в е р ш е н с т в о в а н и ю. Его степень может быть различной. Любую самонастраивающуюся самосовершенствующуюся систему следует строить по принципу возрастания количества контуров так, чтобы каждый последующий контур, более совершенный с точки зрения критерия самонастройки, возникал на основе предыдущего контура. При работе такой системы целесообразно установить временную последовательность процессов самонастройки. Сначала должны происходить процессы грубой самонастройки, при этом информация о несовершенстве самонастройки поступает в последующий контур и обуславливает протекание процесса дальнейшего совершенствования. Контуры самосовершенствования обычно содержат самообучающуюся модель, вычислительные машины, программирующие устройства и т. д. Следовательно, самосовершенствующиеся самонастраивающиеся системы могут самообучаться, самоорганизовываться и самоприспосабливаться, используя прошлый опыт.

Применение принципа обучения в системах автоматического управления является высшим достижением технической кибернетики. Дальнейшее развитие самонастраивающихся систем пойдет по пути моделирования и использования в технике основных функциональных возможностей человека: способности распознавать образы, учитывать прошлый опыт, анализировать и т. д.

Наиболее совершенные самонастраивающиеся системы называются *кибернетическими*. Отличительной особенностью киберне-

тические систем является наличие элементов логического действия, памяти и др.

Исследование самообучающихся систем с целью их применения в различных отраслях народного хозяйства только начинается, поэтому существующие системы автоматического управления способны моделировать лишь простейшие элементы процесса обучения живых существ. Однако развитие кибернетики показывает, что моделирование этого процесса с каждым годом будет углубляться. И нет никакого сомнения в том, что в ближайшем будущем самообучающиеся системы найдут широкое применение.

В самостоятельный широкий класс возможных систем автоматического управления выделены и г р о в ы е системы. Сложные задачи автоматического управления операциями многих объектов можно трактовать как задачи автоматического проведения некоторой игры, в которой могут участвовать две и более сторон. Действия сторон могут быть частично случайными, частично подчиненными некоторым правилам (алгоритмам). Игра состоит из ряда последовательных этапов (шагов), поэтому управление в игровой системе осуществляется дискретно путем формирования последовательности команд управления одной или несколькими сторонами, участвующими в игре.

Отличительной особенностью принципа действия игровых систем является формирование команд управления на основании сопоставления множества возможных решений — в ы б о р о в в каждом этапе управляемой операции. Критерием сопоставления различных выборов служит некоторый показатель, называемый *функцией выгоды*. Функция выгоды задается при построении игровой системы управления на основании анализа управляемой операции. Решения, соответствующие наибольшему значению функции выгоды, называются *оптимальными*, поэтому при разработке игровых систем используются методы теории оптимальных систем, например метод динамического программирования [Л.15, 40].

Основным узлом игровой системы управления является управляющая машина, определяющая множество возможных выборов и оптимальный выбор в этом множестве. Большинство возможных практических применений игровых систем может быть представлено в виде игры двух участвующих сторон. Одна из этих сторон является управляемой данной системой, вторая — неуправляемой. Игровые системы управления могут использоваться, например, в средствах и каналах связи в телемеханике, при обеспечении экономичности перевозок заданными видами транспорта между заданными пунктами, при управлении средствами обороны и нападения и др.

Можно указать два принципиально различных подкласса игровых систем: игровые системы с набором ш а б л о н н ы х решений и игровые системы с п о з т а п н ы м автоматическим поиском решений.

Для расчета и исследования самонастраивающихся систем могут быть использованы все инженерные методы теории автоматического управления. Однако в виду того что самонастраивающиеся системы обладают определенными особенностями, применимость этих методов несколько ограничена. Возникает необходимость разработки новых методов расчета, а также использования методов расчета обычных автоматических систем с учетом специфических особенностей самонастраивающихся систем.

Одной из основных особенностей самонастраивающихся систем является то, что они описываются дифференциальными уравнениями с переменными во времени коэффициентами. Следовательно, самонастраивающиеся системы в общем случае являются нестационарными системами. Особенностью экстремальных систем является наличие несимметричной нелинейности экстремального звена. Всевозможные классы самонастраивающихся систем и их отдельные типы обладают различными особенностями.

В зависимости от специфики работы самонастраивающейся системы могут быть использованы следующие методы расчета: гармонической линеаризации, фазового портрета, графо-аналитические, численные, статистические, линейной теории, математического моделирования и др.

Основными этапами, выполняемыми при расчете и исследовании самонастраивающихся систем, являются: обоснование необходимости применения самонастройки, расчет процесса самонастройки, обеспечение устойчивости, расчет выхода на экстремум, обеспечение устойчивого режима в области экстремума, определение показателей качества динамики самонастраивающейся системы и др.

Обоснование самонастройки. Доказательство необходимости самонастройки может быть произведено аналитически, экспериментально или на основании физических соображений. Отправными условиями при этом считаются экономический эффект, достигаемый за счет применения самонастройки, либо невозможность создания системы с постоянными параметрами и структурой с точки зрения обеспечения требуемой точности управления, заданного запаса устойчивости и качества переходного процесса. Производимый расчет позволяет указать в ряде случаев необходимый диапазон изменения параметров элемента системы, на который действует контур самонастройки.

Пусть, например, в результате влияния внешних условий изменяются коэффициент усиления и постоянная времени объекта регулирования, входящие в характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$T_p T_o(t) p^2 + [T_p + T_o(t)] p + k_p k_o(t) = 0,$$

где k_p и T_p — коэффициент усиления и постоянная времени регулятора; $k_0(t)$ и $T_0(t)$ — коэффициент усиления и постоянная времени объекта, изменяющиеся в некотором диапазоне.

На основании критерия Гурвица устойчивость системы будет обеспечена, если выполняется неравенство

$$k_p k_0(t) < \frac{1}{T_p} + \frac{1}{T_0(t)}.$$

Если задано $T_p = 0,01$ сек, то для максимального значения постоянной времени объекта $T_{0, \max} = 0,2$ сек наибольшее допустимое значение коэффициента усиления из условий устойчивости

$$K_{\max} = k_p k_0(t) = 1/0,01 + 1/0,2 = 105.$$

Пусть, например, коэффициент усиления объекта изменяется в пределах от 1 до 10, тогда для сохранения заданной точности, определяемой величиной $K_{\max}$, необходимо применить самонастройку и изменить коэффициент усиления регулятора из условия

$$K_{\max} = k_p k_0(t) = 105 = \text{const}.$$

Следовательно, для $k_0(t) = 1$ получим необходимое значение $k_p = 105$, а для $k_0(t) = 10$ — соответственно $k_p = 10,5$. Таким образом, установлен необходимый диапазон изменения коэффициента усиления регулятора.

О методах расчета самонастраивающихся систем. Инженерные методы расчета самонастраивающихся систем должны прежде всего учитывать изменяемость параметров во времени. Часто условием расчета является предположение, что процесс самонастройки составляет часть периода изменения параметров объекта.

Применяемые в технике автоматического управления самонастраивающиеся системы с переменными параметрами в своем большинстве по тем или иным причинам относятся к классу систем с медленно изменяющимися параметрами и называются *квазистационарными*.

Медленность изменения параметров системы в каждом конкретном случае должна характеризоваться тем или иным показателем. Системой с медленно изменяющимися параметрами в широком смысле будет называться система, у которой коэффициенты дифференциального уравнения $a_i(t)$ несущественно изменяют свои значения за время переходного процесса $x(t)$ (рис. 21.22).

Для анализа квазистационарных самонастраивающихся систем можно применить метод замороженных коэффициентов. При этом полагают, что, начиная с момента t_* , параметры системы остаются неизменными. Тогда уравнения, описывающие систему, становятся уравнениями с постоянными коэффициентами; далее применяют обычные методы теории автоматического управ-

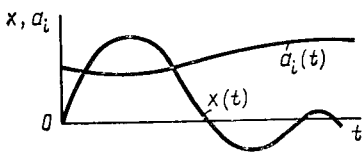


Рис. 21.22

ления. Это позволяет оценить динамику системы для выбранного момента времени t_i . Произведя аналогичные исследования для значений коэффициентов в другие моменты времени t_k , выясняют свойства системы при других значениях коэффициентов.

Квазистационарные самонастраивающиеся системы можно рассчитать графо-аналитическими методами Башкирова и Башарина. При этом необходимо знать характеристики и параметры элементов системы на расчетных интервалах времени. При расчете по методу Башарина, например, надо построить поле статических характеристик объекта для различных моментов времени, учитывая при построении изменение угла наклона луча на соответствующих интервалах. Наиболее удобным методом исследования нестационарных самонастраивающихся систем в общем случае является метод математического моделирования. На математической модели набирается основной контур с учетом переменных коэффициентов звеньев, а также контур самонастройки. Это позволяет широко исследовать самонастраивающуюся систему.

Для анализа самонастраивающихся систем могут быть использованы и численные методы с решением задачи на ЦВМ.

При расчете самонастраивающихся систем существенно возрастает роль статистических методов, которые позволяют повысить быстродействие системы посредством ввода априорной информации об изменении характеристик объекта на основании вероятностных предположений и т. д.

Расчет экстремальных самонастраивающихся систем отличается тем, что система содержит нелинейное звено с несимметричной характеристикой, поэтому автоколебания в таких системах имеют постоянную составляющую (несимметричные автоколебания) и сложную форму. В связи с этим гармоническая линеаризация соответствующих нелинейных элементов должна производиться с учетом высших гармоник во входном сигнале нелинейного элемента [Л. 23]. Методы расчета и исследования экстремальных систем в настоящее время только разрабатываются и отличаются значительной сложностью [Л. 15, 35, 46].

Для расчета и анализа сложных оптимальных самонастраивающихся систем, содержащих вычислительные машины, требуется применять сложные математические методы — теории информации, игр, динамического и линейного программирования и др.

При исследовании систем с переменными параметрами основное практическое значение приобретает непосредственное определение переходного процесса на выходе системы для заданного входного воздействия. Рассмотрим кратко особенности применения частотного метода для решения этой задачи. Известно, что переходная функция на выходе системы $x_{\text{вых}}(t)$ может быть выражена через импульсную $x'_{\text{вых}}(t)$ переходную функцию

$$x_{\text{вых}}(t) = \int_0^t x'_{\text{вых}}(t - \xi) x_{\text{вх}}(\xi) d\xi. \quad (21.37)$$

Для нестационарных систем импульсная переходная функция зависит от момента приложенного внешнего воздействия в виде единичного импульса, т. е. следует считать ее также функцией некоторого параметра ξ : $x'_{\text{вых}}(t, \xi)$. Учитывая это в общем случае, когда сложный сигнал на входе появляется в бесконечно отдаленный момент времени, для нестационарных систем запишем

$$x_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^t x'_{\text{вых}}(t - \xi, \xi) x_{\text{вх}}(\xi) d\xi. \quad (21.38)$$

Если за начало отсчета принять момент ξ приложения входного сигнала и обозначить $(t - \xi)$ через τ , то вместо (21.38) получим

$$x_{\text{вых}}(t) = \int_0^t x'_{\text{вых}}(t, \tau) x_{\text{вх}}(\tau) d\tau, \quad (21.39)$$

где τ — новая переменная интегрирования.

Предположим, что сигнал на входе можно представить интегралом Фурье:

$$x_{\text{вх}}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_{\text{вх}}(j\omega) e^{j\omega\xi} d\omega. \quad (21.40)$$

Подставим (21.40) в (21.38), меняя порядок интегрирования и вводя произведение $e^{j\omega t} \cdot e^{-j\omega t} = 1$:

$$x_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_{\text{вх}}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \int_{-\infty}^t x'_{\text{вых}}(t - \xi, \xi) e^{-j\omega(t - \xi)} d\xi. \quad (21.41)$$

Введем параметрическую частотную функцию нестационарной системы, определяемую последним интегралом в (21.41):

$$W(j\omega, t) = \int_{-\infty}^t x'_{\text{вых}}(t - \xi, \xi) e^{-j\omega(t - \xi)} d\xi. \quad (21.42)$$

Аналогичное выражение можно получить непосредственно из (21.38), если входной сигнал представить в виде $e^{j\omega\xi}$ и обе части равенства умножить на $e^{-j\omega t}$:

$$\frac{x_{\text{вых}}(t)}{e^{j\omega t}} = W(j\omega, t) = \int_{-\infty}^t x'_{\text{вых}}(t - \xi, \xi) e^{-j\omega(t - \xi)} d\xi.$$

На основании этого выражения устанавливаем, что частотная функция нестационарной системы характеризует установившееся движение системы при гармоническом сигнале $e^{j\omega t}$ на входе. В этом смысле имеется аналогия с частотной функцией стационарной системы. Если в стационарных системах частотная функция зависит только от частоты, то в нестационарных системах она зависит также и от времени.

Учитывая (21.42), вместо (21.41) запишем

$$x_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega, t) X_{\text{вх}}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (21.43)$$

Введем новую переменную интегрирования $\tau = t - \xi$, тогда параметрическая частотная функция нестационарной системы (21.42)

$$W(j\omega, t) = \int_0^t x'_{\text{вых}}(t, \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (21.44)$$

Положив в (21.43) и (21.44) $j\omega = p$, перейдем к преобразованию Лапласа:

$$x_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} W(p, t) X_{\text{вх}}(p) e^{pt} dp; \quad (21.45)$$

$$W(p, t) = \int_0^t x'_{\text{вых}}(t, \tau) e^{-p\tau} d\tau. \quad (21.46)$$

Формула (21.46) является обобщением известного выражения передаточной функции, представленного через импульсную переходную функцию системы и называется *параметрической передаточной функцией* нестационарной системы, поскольку содержит параметр времени. Особенностью этой функции является то, что ее нельзя определить непосредственно из дифференциального уравнения нестационарной системы, как это делалось в стационарных системах, а требуется выполнять специальные сложные преобразования.

По формуле обратного преобразования Лапласа из (21.46) получим выражение, определяющее импульсную переходную функцию нестационарной системы через параметрическую передаточную функцию

$$x'_{\text{вых}}(t, \tau) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} W(p, t) e^{p\tau} dp. \quad (21.47)$$

Графически импульсная переходная функция представляет собой поверхность в трехмерном пространстве, поскольку она зависит от времени t и момента ξ приложения входного воздействия (рис. 21.23, а).

Чтобы вычислить оригинал $x_{\text{вых}}(t)$ по известному изображению [см. (21.45)]

$$X_{\text{вых}}(p) = W(p, t) X_{\text{вх}}(p), \quad (21.48)$$

можно использовать приближенные методы, известные для стационарных систем.

Если в (21.43) выделить вещественную часть обобщенной параметрической частотной функции

$$R_0(\omega, t) = \operatorname{Re}[W(j\omega, t) X_{\text{вх}}(j\omega)],$$

то можно записать

$$x_{\text{вых}}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R_0(\omega, t) \cos \omega t d\omega.$$

Известными способами этот интеграл можно привести к виду

$$x_{\text{вых}}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{R_1(\omega, t)}{\omega} \sin \omega t d\omega, \quad (21.49)$$

где

$$R_1(\omega, t) = \operatorname{Re}[W(j\omega, t) X_{\text{вх}}(j\omega) \omega].$$

Интеграл вида (21.49) использовался в теории стационарных систем для определения переходного процесса по вещественным частотным характеристикам.

Построим параметрические вещественные частотные характеристики $R_1(\omega, t)$ для различных a_i , соответствующих фиксированным моментам времени t_i . Тогда, применяя в каж-

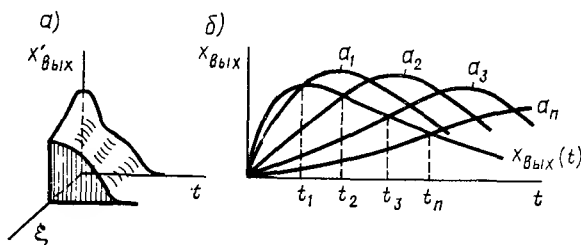


Рис. 21.23

дом случае трапецеидальный метод, определим серию переходных характеристик для $a_1 \div a_n$ нестационарной системы при указанных фиксированных моментах времени $t_1 \div t_n$ (рис. 21.23, б). Откладывая по оси абсцисс моменты времени t_i и проводя перпендикуляр для пересечения с кривой, соответствующей данному моменту времени t_i , получим результирующую переходную характеристику $x_{\text{вых}}(t)$ нестационарной системы.

Вопросы для самопроверки

1. Приведите классификацию самонастраивающихся систем.
2. Каково назначение элементов самонастройки?
3. Дайте определение экстремальной системы.
4. Каковы способы определения экстремума?
5. Изобразите структуру самонастраивающейся системы.
6. Какие методы используются при расчете самонастраивающихся систем?

$x_{\text{вх}}$ и $x_{\text{вых}}$ — входная и выходная переменные;

$x_{\text{н}}$ — заданное значение выходной переменной;

Δx — сигнал рассогласования;

z — возмущающее воздействие;

δ — статическая ошибка системы;

K — коэффициент усиления разомкнутой системы;

k и T — коэффициент усиления и постоянная времени звена;

$K(p)$ и $K(j\omega)$ — передаточная и частотная функции разомкнутой системы (звена);

$A_p(\omega)$ и $\varphi_p(\omega)$ — амплитудная и фазовая частотные характеристики разомкнутой системы;

$W(p)$ и $W(j\omega)$ — передаточная и частотная функции замкнутой системы;

$A_z(\omega)$ и $\varphi_z(\omega)$ — амплитудная и фазовая частотные характеристики замкнутой системы;

$P(\omega)$ и $Q(\omega)$ — вещественная и мнимая частотные характеристики замкнутой системы;

ρ — коэффициент демпфирования;

τ — время запаздывания;

$\omega_{кр}$ и $\omega_{ср}$ — критическая частота (для границы устойчивости) и частота среза;

t_p — время переходного процесса (регулирования);

σ — перерегулирование;

$h(t)$ — нормированная переходная характеристика системы;

M — показатель колебательности;

h и γ — запасы по модулю и фазе;

α_0 — степень устойчивости;

A_1^0 и ω_1 — амплитуда и частота автоколебаний нелинейной системы;

$q(A)$ и $q_1(A)$ — коэффициенты гармонической линеаризации нелинейных звеньев;

$T_{ц}$ — период повторения (цикла) импульсов;

$h_{и}$ — высота импульсов;

$\gamma T_{ц}$ — длительность импульсов;

$\overline{\varepsilon^2}$ — среднее значение квадрата ошибки системы.

$\tau \backslash \chi$	0,0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,5	0,158	0,165	0,176	0,184	0,192	0,199	0,207	0,215	0,223	0,231
1,0	0,310	0,325	0,340	0,356	0,371	0,386	0,402	0,417	0,432	0,447
<u>1,5</u>	0,449	0,469	0,494	0,516	0,538	0,560	0,594	0,603	0,617	0,646
2,0	0,571	0,560	0,628	0,655	0,682	0,709	0,732	0,761	0,785	0,810
<u>2,5</u>	0,674	0,707	0,739	0,771	0,802	0,833	0,862	0,891	0,917	0,943
3,0	0,755	0,792	0,828	0,863	0,895	0,928	0,958	0,986	1,013	1,038
3,5	0,815	0,853	0,892	0,928	0,963	0,994	1,024	1,050	1,074	1,095
<u>4,0</u>	0,856	0,898	0,937	0,974	1,008	1,039	1,066	1,090	1,110	1,127
4,5	0,883	0,923	0,960	0,998	1,029	1,057	1,084	1,104	1,120	1,129
5,0	0,895	0,939	0,977	1,012	1,042	1,067	1,087	1,102	1,112	1,117
<u>5,5</u>	0,900	0,940	0,986	1,015	1,042	1,063	1,079	1,088	1,092	1,096
6,0	0,903	0,945	0,981	1,013	1,037	1,054	1,065	1,070	1,068	1,062
6,5	0,904	0,943	0,980	1,009	1,029	1,043	1,050	1,049	1,043	1,033
<u>7,0</u>	0,904	0,945	0,978	1,006	1,024	1,034	1,037	1,033	1,023	1,009
7,5	0,907	0,945	0,980	1,005	1,021	1,027	1,027	1,020	1,005	0,989
<u>8,0</u>	0,911	0,951	0,983	1,007	1,020	1,024	1,021	1,011	0,998	0,982
8,5	0,918	0,956	0,989	1,010	1,021	1,024	1,018	1,007	0,993	0,978
9,0	0,925	0,966	0,996	1,016	1,025	1,025	1,017	1,006	0,992	0,978
9,5	0,932	0,972	1,004	1,020	1,028	1,026	1,018	1,006	0,993	0,982
<u>10,0</u>	0,939	0,980	1,009	1,025	1,030	1,027	1,018	1,005	0,994	0,985
10,5	0,946	0,985	1,013	1,028	1,031	1,026	1,016	1,004	0,994	0,989
11,0	0,947	0,988	1,015	1,028	1,030	1,024	1,013	1,002	0,993	0,990
<u>11,5</u>	0,949	0,988	1,016	1,027	1,028	1,021	1,010	0,998	0,991	0,991
<u>12,0</u>	0,950	0,990	1,015	1,025	1,024	1,015	1,004	0,994	0,989	0,990

Приложения

единичных трапеций

0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,240	0,248	0,255	0,259	0,267	0,275	0,282	0,290	0,297	0,304	0,314
0,461	0,476	0,490	0,505	0,519	0,534	0,547	0,561	0,575	0,590	0,602
0,665	0,685	0,706	0,722	0,740	0,758	0,776	0,794	0,813	0,832	0,844
0,831	0,856	0,878	0,899	0,919	0,938	0,957	0,974	0,991	1,008	1,022
0,967	0,985	1,010	1,030	1,050	1,067	1,084	1,090	1,113	1,120	1,133
1,061	1,081	1,100	1,116	1,131	1,143	1,154	1,162	1,169	1,175	1,177
1,115	1,132	1,145	1,158	1,165	1,170	1,174	1,174	1,175	1,176	1,175
1,141	1,151	1,158	1,162	1,163	1,161	1,156	1,150	1,141	1,132	1,119
1,138	1,141	1,141	1,138	1,132	1,127	1,111 ^v	1,099	1,085	1,071	1,053
1,117	1,114	1,107	1,097	1,084	1,069	1,053	1,036	1,019	1,003	0,987
1,090	1,076	1,064	1,050	1,032	1,016	0,994	0,979	0,962	0,951	0,932
1,051	1,036	1,020	1,001	0,984	0,956	0,949	0,934	0,922	0,914	0,907
1,018	1,001	0,982	0,965	0,948	0,936	0,920	0,910	0,906	0,904	0,905
0,992	0,975	0,957	0,941	0,927	0,917	0,911	0,909	0,911	0,917	0,926
0,974	0,956	0,944	0,931	0,922	0,919	0,920	0,927	0,934	0,946	0,962
0,966	0,952	0,941	0,934	0,932	0,936	0,944	0,955	0,970	0,986	1,002
0,964	0,954	0,948	0,948	0,951	0,958	0,974	0,990	1,006	1,023	1,041
0,968	0,962	0,961	0,967	0,976	0,990	1,006	1,023	1,038	1,051	1,060
0,975	0,972	0,977	0,987	1,000	1,015	1,033	1,048	1,059	1,065	1,066
0,982	0,984	0,993	1,006	1,020	1,036	1,049	1,059	1,063	1,062	1,056
0,988	0,994	1,005	1,019	1,033	1,046	1,054	1,058	1,055	1,048	1,033
0,993	1,001	1,014	1,027	1,039	1,047	1,048	1,044	1,034	1,021	1,005
0,996	1,006	1,017	1,029	1,037	1,039	1,034	1,024	1,010	0,994	0,977
0,997	1,007	1,018	1,026	1,029	1,025	1,015	1,000	0,984	0,970	0,958

П. II. Таблица соответствия решетчатых функций и их изображений

Оригинал решетчатой функции	Изображение при $\varepsilon = 0$	Изображение смещенной функции при $\varepsilon \neq 0$
$1 [n]$	$\frac{e^q}{e^q - 1}$	$\frac{e^q}{e^q - 1}$
$\Delta 1 [n-1]$	1	—
$n \uparrow \varepsilon$	$\frac{e^q}{(e^q - 1)^2}$	$\frac{e^q}{(e^q - 1)^2} + \frac{e^q}{e^q - 1} \varepsilon$
$(n \uparrow \varepsilon)^2$	$\frac{e^q}{(e^q - 1)^3} (e^q \uparrow 1)$	$\frac{e^q (e^q + 1)}{(e^q - 1)^3} + 2 \frac{e^q}{(e^q - 1)^2} \varepsilon + \frac{e^q}{e^q - 1} \varepsilon^2$
$e^{\alpha (n + \varepsilon)}$	$\frac{e^q}{e^q - e^{\alpha}}$	$\frac{e^q}{e^q - e^{\alpha}} e^{\alpha \varepsilon}$
$1 - e^{\alpha (n + \varepsilon)}$	$\frac{e^q (1 - e^{\alpha})}{(e^q - e^{\alpha}) (e^q - 1)}$	$\frac{e^q}{e^q - 1} - \frac{e^q}{e^q - e^{\alpha}} e^{\alpha \varepsilon}$
$\cos \bar{\omega} (n \uparrow \varepsilon)$	$\frac{(e^q - \cos \bar{\omega}) e^q}{e^{2q} - 2e^q \cos \bar{\omega} + 1}$	$\frac{e^{2q} \cos \bar{\omega} \varepsilon - e^q \cos \bar{\omega} (1 - \varepsilon)}{e^{2q} - 2e^q \cos \bar{\omega} + 1}$
$\sin \bar{\omega} (n \uparrow \varepsilon)$	$\frac{e^q \sin \bar{\omega}}{e^{2q} - 2e^q \cos \bar{\omega} + 1}$	$\frac{e^{2q} \sin \bar{\omega} \varepsilon - e^q \sin \bar{\omega} (1 - \varepsilon)}{e^{2q} - 2e^q \cos \bar{\omega} + 1}$
$e^{\alpha (n + \varepsilon)} \times$ $\times \cos \bar{\omega} (n + \varepsilon)$	$\frac{(e^q - e^{\alpha} \cos \bar{\omega}) e^q}{e^{2q} - 2e^q e^{\alpha} \cos \bar{\omega} + e^{2\alpha}}$	$\frac{e^{2q} \cos \bar{\omega} \varepsilon - e^q e^{\alpha} \cos \bar{\omega} (1 - \varepsilon)}{e^{2q} - 2e^q e^{\alpha} \cos \bar{\omega} + e^{2\alpha}} e^{\alpha \varepsilon}$
$e^{\alpha (n + \varepsilon)} \times$ $\times \sin \bar{\omega} (n + \varepsilon)$	$\frac{e^q e^{\alpha} \sin \bar{\omega}}{e^{2q} - 2e^q \cos \bar{\omega} + e^{2\alpha}}$	$\frac{e^{2q} \sin \bar{\omega} \varepsilon + e^q e^{\alpha} \sin \bar{\omega} (1 - \varepsilon)}{e^{2q} - 2e^q e^{\alpha} \cos \bar{\omega} + e^{2\alpha}} e^{\alpha \varepsilon}$

$x(t-\tau)$	$X(p)$	$X^*(z)$ при $\tau=0$	$X^*(z)$ при $\tau \neq 0$
$1(t-\tau)$	$\frac{1}{p} e^{-\tau p}$	$\frac{z}{z-1}$	$z^{r-1}/(z-1)$
$(t-\tau)1(t-\tau)$	$\frac{1}{p^2} e^{-\tau p}$	$\frac{T_{\Pi} z}{(z-1)^2}$	$\frac{2T_{\Pi}-\tau}{z^{r-1}(z-1)} + \frac{T_{\Pi}}{z^{r-1}(z-1)^2}$
$(t-\tau)^2 \cdot 1(t-\tau)$	$\frac{2}{p^3} e^{-\tau p}$	$\frac{T_{\Pi}^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$	$\frac{(rT_{\Pi}-\tau)^2}{z^{r-1}(z-1)} + 2 \frac{(rT_{\Pi}-\tau)T_{\Pi}}{z^{r-1}(z-1)^2} + \frac{T_{\Pi}^2(z+1)}{z^{r-1}(z-1)^3}$
$e^{-a(t-\tau)} \cdot 1(t-\tau)$	$\frac{1}{p+a} e^{-\tau p}$	$\frac{z}{z-e^{-aT_{\Pi}}}$	$\frac{e^{-a(rT_{\Pi}-\tau)}}{z^{r-1}(z-e^{-aT_{\Pi}})}$
$\cos \beta(t-\tau)1(t-\tau)$	$\frac{p}{p^2 + \beta^2} e^{-\tau p}$	$\frac{z^2 - z \cos \beta T_{\Pi}}{z^2 - 2z \cos \beta T_{\Pi} + 1}$	$\frac{z \cos \beta(rT_{\Pi}-\tau) - \cos \beta[\tau - (r-1)T_{\Pi}]}{z^{r-1}(z^2 - 2z \cos \beta T_{\Pi} + 1)}$
$\sin \beta(t-\tau)1(t-\tau)$	$\frac{\beta}{p^2 + \beta^2} e^{-\tau p}$	$\frac{z \sin \beta T_{\Pi}}{z^2 - 2z \cos \beta T_{\Pi} + 1}$	$\frac{z \sin \beta(rT_{\Pi}-\tau) + \sin \beta[\tau - (r-1)T_{\Pi}]}{z^{r-1}(z^2 - 2z \cos \beta T_{\Pi} + 1)}$
$e^{-a(t-\tau)} \cos \beta(t-\tau) \times$ $\times 1(t-\tau)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \beta^2} e^{-\tau p}$	$\frac{z(z-e^{-aT_{\Pi}} \cos \beta T_{\Pi})}{z^2 - 2ze^{-aT_{\Pi}} \cos \beta T_{\Pi} + e^{-2aT_{\Pi}}}$	$\frac{e^{-a(rT_{\Pi}-\tau)} z \cos \beta(rT_{\Pi}-\tau) - e^{-aT_{\Pi}} \cos \beta[\tau - (r-1)T_{\Pi}]}{z^{r-1}(z^2 - 2ze^{-aT_{\Pi}} \cos \beta T_{\Pi} + e^{-2aT_{\Pi}})}$
$e^{-a(t-\tau)} \sin \beta(t-\tau) \times$ $\times 1(t-\tau)$	$\frac{\beta}{(p+a)^2 + \beta^2} e^{-\tau p}$	$\frac{ze^{-aT_{\Pi}} \sin \beta T_{\Pi}}{z^2 - 2ze^{-aT_{\Pi}} \cos \beta T_{\Pi} + e^{-2aT_{\Pi}}}$	$\frac{e^{-a(rT_{\Pi}-\tau)} z \sin \beta(rT_{\Pi}-\tau) + e^{-aT_{\Pi}} \sin \beta[\tau - (r-1)T_{\Pi}]}{z^{r-1}(z^2 - 2ze^{-aT_{\Pi}} \cos \beta T_{\Pi} + e^{-2aT_{\Pi}})}$

Примечание. Величина $r=1, 2, 3, \dots$ — порядковый номер цикла, в течение которого появляется запаздывающий сигнал.

1. Айзерман М. А. Теория автоматического регулирования. «Наука», 1966.
2. Анисимов В. И., Вавилов А. А., Фатеев А. В. Сборник примеров и задач по линейной теории автоматического регулирования. ГЭИ, 1959.
3. Башарин А. В. Расчет динамики и синтез нелинейных систем управления. ГЭИ, 1960.
4. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. «Наука», 1966.
5. Белова Д. А., Нетушил А. В. Об абсолютной устойчивости систем с неоднозначной нелинейностью типа «люфт» и «упор». «Автоматика и телемеханика», 1967, № 12.
6. Васильев Д. В., Филиппов Г. С. Основы теории и расчета следящих систем. ГЭИ, 1959.
7. Васильев Д. В., Чучич В. Г. Системы автоматического управления. «Высшая школа», 1967.
8. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. ФМ, 1969.
9. Винер Н. Кибернетика, или управление и связь в животном и машине. М., «Советское радио», 1968.
10. Воронов А. А. Основы теории автоматического управления. «Энергия», 1965, 1966, 1970.
11. Егоров К. В. Теория автоматического регулирования. «Энергия», 1968.
12. Иващенко Н. Н. Автоматическое регулирование. Машгиз, 1962.
13. Казаков И. Е., Доступов Б. Г. Статистическая динамика нелинейных автоматических систем. ФМ, 1962.
14. Коган Б. Я. Электронные моделирующие устройства и их применение для исследования систем автоматического регулирования. ФМ, 1963.
15. Красовский А. А., Поспелов Г. С. Основы автоматики и технической кибернетики. ГЭИ, 1962.
16. Кузин Л. Т. Расчет и проектирование дискретных систем управления. Машгиз, 1962.
17. Кулебаки В. С., Петров Б. Н. Теория инвариантности в системах автоматического управления. «Наука», 1964.
18. Куропаткин П. В. Теория автоматического управления. СЗПИ, Л., 1967, 1969.
19. Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов. «Автоматика и телемеханика», 1960, № 4, 5, 6.
20. Летов А. М. Автоматическое управление движением. «Наука», 1970.
21. Ляпунов А. М. Собрание сочинений, т. 2, АН СССР, 1956.
22. Лурье А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. Гостехиздат, 1951.
23. Метод гармонической линеаризации в проектировании нелинейных систем автоматического управления. Под ред. Попова Е. П. «Машиностроение», 1970.
24. Моисеев Н. Д. Очерки развития теории устойчивости. Гостехиздат, 1949.

25. Месеров М. В. Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности. «Наука», 1968.
26. Нелепин Р. А. Точные аналитические методы в теории нелинейных автоматических систем. «Судостроение», 1967.
27. Оппельт В. Критерий устойчивости, основанный на методе двух годографов. «Автоматика и телемеханика», 1961, № 9.
28. Основы автоматического управления. Под ред. Пугачева В. С. «Наука», 1968.
29. Основные понятия автоматики (терминология). Сборник рекомендуемых терминов. Выпуск 71, АН СССР, «Наука», 1966.
30. Понtryгин Л. С., Болтянский В. Г. и др. Математическая теория оптимальных процессов. «Наука», 1969.
31. Робишо Л., Буавер М., Робер Ж. Направленные графы и их приложения к электрическим цепям и машинам. «Энергия», 1964.
32. Сапожников Р. А., Матвеев П. Н. и др. Основы технической кибернетики. «Высшая школа», 1970.
33. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления. Под ред. Бесекерского В. А. ФМ, 1969.
34. Теория автоматического управления. Под ред. Петушила А. В. «Высшая школа», 1968, 1972.
35. Техническая кибернетика. Под ред. Солодовникова В. В. «Машиностроение», 1967, 1969.
36. Тэлер Дж., Пестель М. Анализ и расчет нелинейных систем автоматического управления. «Энергия», 1964.
37. Удерман Э. Г. Метод корневого годографа в теории автоматического управления. ГЭИ, 1963.
38. Фатеев А. В. Основы линейной теории автоматического регулирования. ГЭИ, 1964.
39. Федоров С. М., Литвинов А. И. Автоматические системы с цифровыми управляющими машинами. «Энергия», 1965.
40. Фельдбаум А. А. Основы теории оптимальных автоматических систем. ФМ, 1963.
41. Хлыпало Е. И. Нелинейные системы автоматического регулирования. «Энергия», 1967.
42. Цыпкин Я. З. Теория релейных систем автоматического регулирования. ГИТТЛ, 1955.
43. Цыпкин Я. З. Теория линейных импульсных систем. ФМ, 1963.
44. Чернецкий В. И., Куропаткин П. В. Математические основы технической кибернетики. СЗПИ, Л., 1968.
45. Чернецкий В. И., Дидук Г. А., Потапенко А. А. Математические методы и алгоритмы исследования автоматических систем. «Энергия», 1970.
46. Чинаев П. И. Самонастраивающиеся автоматические системы. Машгиз, 1963.
47. Mason S. E. Feedback theory — some properties of signal flow graphs. «Proc. IRE», Sept. 1953.
- Feedback theory — further properties of signal flow graphs. «Proc. IRE», July, 1956.
48. Routh E. I. A treatise on the stability of a given state of motion, particularly steady motion. London, 1877.
49. Hurwitz A. Über die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt. Mathematische Annalen, 46, 1895.
50. Nyquist H. Regeneration theory. Bell System Tech. Journ., V. 11, № 1, 1932.
51. Leonhard A. Die selbsttätige Regelung in der Elektrotechnik. Springer — Verlag, Berlin, 1940.
52. Bellman R. Dynamic programming. Princeton, 1957.

	<i>Стр.</i>
Предисловие	3
<i>Раздел первый. Введение в теорию автоматического управления .</i>	<i>5</i>
Глава 1. Общие понятия	5
1.1. Введение	5
§ 1.2. Автоматическое регулирование и управление как одна из форм автоматизации	7
§ 1.3. Основные этапы развития автоматических систем и их теории	8
§ 1.4. Роль русских и советских ученых в развитии теории и практики автоматических систем	10
Вопросы для самопроверки	11
Глава 2. Принципы регулирования и управления	12
§ 2.1. Понятие о регулировании и управлении	12
§ 2.2. Принципы регулирования и управления	16
§ 2.3. Функциональные схемы	19
§ 2.4. Основные элементы автоматических систем	20
§ 2.5. Принципы классификации автоматических систем	21
§ 2.6. Задачи теории автоматического управления	22
Вопросы для самопроверки	23
Глава 3. Статика автоматических систем	24
§ 3.1. Статическое регулирование и управление	24
§ 3.2. Астатическое регулирование и управление	26
§ 3.3. Статические характеристики элементов	27
§ 3.4. Статические характеристики автоматических систем	29
Вопросы для самопроверки	31
Глава 4. Уравнения динамических режимов автоматических систем и методы решения этих уравнений	32
§ 4.1. Составление уравнений динамики систем	32
§ 4.2. Линеаризация уравнений и приведение их к форме в отклонениях	33
§ 4.3. Безразмерная форма уравнений	35
§ 4.4. Уравнения автоматической системы стабилизации скорости двигателя	36
§ 4.5. О методах решения уравнений динамики	39
§ 4.6. Формулы прямого и обратного преобразований Фурье и Лапласа	41
§ 4.7. Понятие о составлении операторных уравнений автоматических систем	42
Вопросы для самопроверки	43
Глава 5. Исходные данные для анализа динамики автоматических систем	44

§ 5.1. Понятие о передаточной и частотной функциях линейных систем	44
§ 5.2. Амплитудно-фазовые характеристики	46
§ 5.3. Логарифмические частотные характеристики	48
Вопросы для самопроверки	50
✓ Глава 6. Типовые линейные звенья и их характеристики	51
§ 6.1. Классификация звеньев	51
§ 6.2. Идеальное (безынерционное) звено	53
§ 6.3. Инерционное (апериодическое) звено первого порядка	58
§ 6.4. Интегрирующее звено	60
§ 6.5. Инерционные звенья второго порядка	62
§ 6.6. Консервативное звено	65
§ 6.7. Дифференцирующие звенья	65
§ 6.8. Неминимально-фазовые звенья	68
Вопросы для самопроверки	72

Раздел второй. Основные вопросы линейной теории автоматического управления

✓ Глава 7. Структурные схемы, передаточные и частотные функции автоматических систем	74
§ 7.1. Обозначения, применяемые в структурных схемах	73
§ 7.2. Правила преобразований структурной схемы при различном соединении звеньев	74
§ 7.3. Структурные схемы и передаточные функции одноконтурных и многоконтурных замкнутых систем	78
§ 7.4. Получение операторного уравнения системы по структурной схеме	82
§ 7.5. Частотные функции разомкнутых и замкнутых систем. Методы построения частотных характеристик	83
§ 7.6. Построение логарифмических частотных характеристик многоконтурной системы с неперекрещивающимися обратными связями	86
§ 7.7. Составление и преобразование структурной схемы автоматической системы	88
Вопросы для самопроверки	94
✓ Глава 8. Устойчивость линеаризованных систем	94
§ 8.1. Методы определения устойчивости	94
§ 8.2. Получение характеристического уравнения. Условие устойчивости линейной (линеаризованной) системы	97
§ 8.3. Достаточность условий положительности коэффициентов для устойчивости систем	99
§ 8.4. Алгебраические критерии устойчивости	100
§ 8.5. Частотный критерий устойчивости	103
§ 8.6. Определение устойчивости по методу разделения частотных характеристик разомкнутой системы	109
§ 8.7. Критерий Михайлова	111
§ 8.8. Критерий Вышнеградского	114
§ 8.9. Определение областей устойчивости	116
§ 8.10. Понятие о D -разбиении пространства коэффициентов характеристического уравнения	118

§ 8.11. D-разбиение плоскости одного комплексного параметра	119
§ 8.12. D-разбиение плоскости двух параметров	120
§ 8.13. Запас устойчивости	124
§ 8.14. Критический коэффициент усиления	127
§ 8.15. Устойчивость систем с запаздыванием	131
§ 8.16. Вопросы структурной устойчивости систем	135
§ 8.17. Исследование устойчивости методом корневого годографа	138
Вопросы для самопроверки	143
Глава 9. Методы коррекции автоматических систем	144
§ 9.1. Жесткая обратная связь (безынерционная)	144
§ 9.2. Гибкая обратная связь	146
§ 9.3. Смешанная обратная связь	147
§ 9.4. Влияние отрицательных обратных связей на работу автоматических систем	147
§ 9.5. Введение производных в закон управления при помощи прямых параллельных связей	149
§ 9.6. Введение интеграла в закон управления	153
§ 9.7. Средства коррекции автоматических систем	154
§ 9.8. Корректирующие устройства на переменном токе	160
§ 9.9. Место включения корректирующих устройств	162
Вопросы для самопроверки	164
Глава 10. Оценка качества процесса управления	165
10.1. Классификация внешних воздействий. Требования, предъявляемые к качеству процесса управления	165
§ 10.2. Характер затухания переходного процесса	166
§ 10.3. Максимальное отклонение управляемой переменной. Перерегулирование. Время переходного процесса	167
§ 10.4. Точность управления. Ошибки системы	168
§ 10.5. Интегральные оценки	173
§ 10.6. Приближенная оценка качества переходного процесса по методу распределения нулей и полюсов	179
§ 10.7. Основы частотного метода анализа качества процесса управления	188
§ 10.8. Анализ качества переходного процесса по амплитудно-частотным характеристикам замкнутой системы	193
§ 10.9. Оценка качества по вещественным частотным характеристикам замкнутой системы	197
§ 10.10. Оценка качества переходного процесса по логарифмическим частотным характеристикам разомкнутой системы	207
Вопросы для самопроверки	210
Глава 11. Обеспечение заданного качества процесса управления	211
§ 11.1. Повышение точности управления	211
§ 11.2. Об обеспечении заданного качества переходного процесса	217
§ 11.3. Синтез корректирующих устройств при помощи ЛАХ	224
§ 11.4. Синтез корректирующих устройств при помощи амплитудно-фазовых характеристик	238
§ 11.5. Синтез корректирующих устройств автоматических систем методом разделения частотных характеристик	241

§ 11.6. Применение метода корневого годографа для синтеза корректирующих устройств	245
Вопросы для самопроверки	250
Глава 12. Методы построения кривой переходного процесса линейных автоматических систем	251
§ 12.1. Операторный метод Лангаса	251
§ 12.2. Метод трапецидальных вещественных частотных характеристик	255
§ 12.3. Использование ЛАХ при построении переходного процесса	259
§ 12.4. Метод математического моделирования	263
Вопросы для самопроверки	270

Раздел третий. Основные вопросы нелинейной теории автоматического управления 271

Глава 13. Устойчивость и автоколебания нелинейных систем	271
§ 13.1. Классификация нелинейных звеньев и систем	272
§ 13.2. О методах исследования нелинейных систем	275
§ 13.3. Метод фазовой плоскости	278
§ 13.4. Примеры фазовых портретов нелинейных систем	284
§ 13.5. Метод точечных преобразований	292
§ 13.6. Основы метода гармонической линеаризации	294
§ 13.7. Определение комплексных коэффициентов усиления и передаточных функций нелинейных звеньев	299
§ 13.8. Метод Л. С. Гольдфарба	302
§ 13.9. Метод Е. И. Попова	305
§ 13.10. Частотный метод анализа релейных систем	311
§ 13.11. Исследование абсолютной устойчивости нелинейных систем методом В. М. Попова	317
§ 13.12. О вынужденных колебаниях в нелинейных системах	320
§ 13.13. Статические характеристики нелинейных систем	322
Вопросы для самопроверки	327
Глава 14. Коррекция нелинейных систем	327
§ 14.1. О способах коррекции нелинейных систем	327
§ 14.2. Влияние линейных корректирующих устройств на фазовый портрет систем второго порядка	328
§ 14.3. Получение скользящих режимов в релейных системах второго порядка	331
§ 14.4. О влиянии псевдичных главных обратных связей на диаграмму точечных преобразований	336
§ 14.5. Расчет линейных корректирующих устройств методом гармонической линеаризации	337
§ 14.6. Вопросы коррекции релейных систем	339
§ 14.7. Компенсация влияния нелинейностей	340
§ 14.8. О синтезе линейных корректирующих устройств нелинейных систем методом разделения частотных характеристик	344
Вопросы для самопроверки	345
Глава 15. Качество переходных процессов нелинейных систем	346

§ 15.1. Оценка качества переходного процесса по данным фазового портрета	346
§ 15.2. Оценка качества переходного процесса по методу гармонической линеаризации	348
§ 15.3. Методы численного интегрирования	353
§ 15.4. Графо-аналитические методы	357
§ 15.5. О расчете переходных процессов релейных систем	363
§ 15.6. Особенности моделирования нелинейных систем	364
Вопросы для самопроверки	372

Раздел четвертый. Основные вопросы теории линейных импульсных автоматических систем 373

Глава 16. Анализ динамики импульсных систем	373
§ 16.1. Классификация импульсных элементов и систем	374
§ 16.2. Об особенностях исследования динамики импульсных систем	376
§ 16.3. Исследование устойчивости системы непосредственно по разностному уравнению	381
§ 16.4. Критерии устойчивости импульсных систем	382
§ 16.5. Понятие о дискретном преобразовании Лапласа	384
§ 16.6. Определение передаточной функции импульсной системы	387
§ 16.7. Понятие о частотных функциях и характеристиках импульсных систем	390
§ 16.8. Исследование устойчивости импульсных систем по частотным характеристикам	394
§ 16.9. Качество переходного процесса импульсных систем	395
§ 16.10. Особенности расчета импульсных систем по методу z-преобразования	403
§ 16.11. Понятие о методе ω -преобразования	406
§ 16.12. Особенности моделирования импульсных систем	408
Вопросы для самопроверки	411
Глава 17. Коррекция импульсных систем	412
§ 17.1. Применение непрерывных корректирующих устройств	412
§ 17.2. Применение дискретных корректирующих устройств	415
§ 17.3. Непрерывное регулирование как граница импульсного регулирования	417
§ 17.4. Понятие о применении цифровых управляющих устройств	420
Вопросы для самопроверки	421

Раздел пятый. Введение в статистическую динамику автоматических систем 422

Глава 18. Случайные процессы в линейных автоматических системах	423
§ 18.1. Общие понятия о случайных процессах	423
§ 18.2. Оценка работы линейных автоматических систем при случайных сигналах	427
§ 18.3. Корреляционные функции выходной переменной и ошибки системы	428
§ 18.4. Спектральная плотность выходной переменной и ошибки системы	430
§ 18.5. Способы вычисления среднего значения квадрата ошибки системы	431
§ 18.6. Понятие о прохождении случайного сигнала через импульсную систему	435

Вопросы для самопроверки	436
Глава 19. Случайные процессы в нелинейных автоматических системах	437
§ 19.1. Прохождение случайных сигналов через нелинейный элемент	437
§ 19.2. Статистическая линеаризация нелинейных элементов	438
§ 19.3. О совместной статистической и гармонической линеаризации	441
§ 19.4. Исследование точности нелинейных автоматических систем при стационарных случайных воздействиях	444
§ 19.5. Методы улучшения качества работы автоматических систем при наличии помех	446
Вопросы для самопроверки	448

Раздел шестой. Понятие об оптимальных и самонастраивающихся автоматических системах

Глава 20. Понятие об оптимальном управлении	449
§ 20.1. Показатели (критерии) оптимальности автоматических систем	450
§ 20.2. Классификация оптимальных систем	453
§ 20.3. Основные вопросы теории оптимальных систем	454
§ 20.4. Системы, оптимальные по быстродействию	454
§ 20.5. Оптимальные по точности автоматические системы управления при случайных сигналах	462
§ 20.6. Методы расчета оптимальных параметров и определения закона управления оптимальных систем	466
Вопросы для самопроверки	477
Глава 21. Принципы построения самонастраивающихся автоматических систем	477
§ 21.1. Критерии самонастройки. Назначение и эффективность приме- нения элементов самонастройки	478
§ 21.2. Функциональные схемы и основные элементы самонастраиваю- щихся систем	479
§ 21.3. Классификация самонастраивающихся систем	480
§ 21.4. Особенности самонастраивающихся систем	481
§ 21.5. Системы, настраивающиеся по сигналам внешних воздействий и выходных переменных	482
§ 21.6. Системы, настраивающиеся по динамическим характеристикам объектов	484
§ 21.7. Понятие об экстремальных автоматических системах	489
§ 21.8. Понятие о построении экстремальных систем	493
§ 21.9. Основные параметры, характеризующие экстремальные системы	500
§ 21.10. Влияние инерционности элементов экстремальной системы	502
§ 21.11. О методах поиска экстремума, являющегося функцией нескольких независимых переменных	503
§ 21.12. Краткие сведения о некоторых более совершенных самонастраи- вающихся системах	507
§ 21.13. О задачах и методах расчета и исследования самонастраиваю- щихся автоматических систем	509
Вопросы для самопроверки	514
Приложения	516
Литература	520

§ 15.1. С
§ 15.2. С
§ 15.3. 1
§ 15.4. 1
§ 15.5. 1
§ 15.6.
Вопрос

Раз

Глава 1
§ 16.1.
§ 16.2.
§ 16.3.

§ 16.4.
§ 16.5.
§ 16.6.
§ 16.7.

§ 16.8.

✓ § 16.9.
✓ § 16.10

§ 16.11

§ 16.1

Вопрос

Глава

§ 17.1

§ 17.2

§ 17.3

§ 17.4

Вопрос

F

Глава

§ 18.

§ 18.

§ 18.

§ 18.

§ 18.

§ 18.

Куропаткин Петр Васильевич

Теория автоматического управления

Редактор С. М. Оводова
Художник О. В. Камасов
Художественный редактор Н. К. Гуторов
Технический редактор Т. Д. Гарина
Корректор М. М. Малиновская

Сдано в набор 4/IX—72 г. Подп. к печати 21/II—73
Формат 60×90^{1/16} Объем 33 печ. л. Уч.-изд. л. 32
Изд. № Стд 94 Тираж 30.000 экз.
Зак. 1124 Цена 1 р. 37 к.

План выпуска литературы издательства
«Высшая школа» (вузы и техникумы) на 1973 г.

Позиция № 110
Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14,
Издательство «Высшая школа»

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома
Государственного комитета Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торгов
Б. Переяславская ул. д. 46